REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

Mathématiques

ECONOMIE et GESTION

3 $^{\text{éme}}$ année de l' Enseignement secondaire

Coordinatrice

Hikma Smida
Professeur universitaire

Auteurs

Noureddine Affi
Inspecteur principal

Othman Ferjani
Inspecteur

Riadh Laifi
Professeur

Hédi Galfat
Professeur

Evaluateurs

Khadija Kaâniche Ben Messaoud
Inspectrice principale

Ali Rahmouni
Inspecteur principal

Centre National pédagogique

Préface

Le présent ouvrage est conçu conformément aux nouveaux programmes. Il s'adresse aux élèves de la troisième année économie et gestion.
Les chapitres de ce manuel, dans leur presque totalité, comportent les rubriques suivantes :

• Pour commencer

Dans cette rubrique sont proposées des activités dans l'intention de faire le point sur les connaissances antérieures indispensables à l 'élève pour aborder un nouveau chapitre.

• Le cours

Dans cette partie un cours est organisé de façon progressive. Il comporte des activités de découverte de la notion à étudier, des définitions, les résultats utiles et des activités d'application pour contrôler le degré d'acquisition des nouveaux concepts .

• Utilisation des TIC

Dans cette rubrique on invite l'élève à profiter de l'outil informatique pour utiliser, contrôler ou conjecturer certains résultats et ce à travers des activités suggérées ,traitées et illustrées par étapes pourvu qu'elles répondent au besoin des utilisateurs les plus débutants .

• Exercices et problèmes.

Cette rubrique présente :
- De nombreux exercices simples qui permettent à l'élève d'affermir ses connaissances et de maîtriser de nouvelles techniques.
- Des exercices et des problèmes où il peut être question de modéliser des situations économiques et sociales qui permettent à l'élève éventuellement l'appréciation des mathématiques.

• Math culture

Cette rubrique comporte un aperçu historique sur une notion mathématique ou sur un savant, un texte ou un document tiré d'un ouvrage mathématique.

Sommaire

Science sans conscience n 'est que ruine de l' âme

FRANÇOIS RABELAIS

Chapitre 1

STATISTIQUES

- **Pour commencer**
- **Cours**

  I - Série statistique simple.

  II - Série statistique double.
- **Utilisation des T.I.C.**
- **Exercices et problèmes**
- **Math culture.**

POUR COMMENCER

Activité 1 : (QCM)

1°) Une série de notes de dix élèves d'une classe est donnée dans le tableau suivant.

x_i	2	8	9	10	19
n_i	3	1	4	1	1

Un élève a obtenu 8. cette note est supérieure
a/ au mode **b/** à la médiane **c/** à la moyenne.

2°) Sur 1000 candidats qui se sont présentés à un concours,
500 d'entre eux ont été reçus. On considère la série des notes obtenues.
La moyenne des notes obtenues est 9,437 et la médiane de la série est 9,241.
Si un candidat a été admis, alors il a obtenu une note
a/ supérieure à 10 ; **b/** supérieure à 9,437 ; **c/**. supérieure à 9,241.

Activité 2 : (Vrai ou faux)

1°) Dites, en justifiant vos réponses, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
a/ Dans toute série statistique, la moyenne est comprise entre la valeur minimale et la valeur maximale.
b/ Dans toute série statistique, l'écart type est toujours inférieur à la variance.
c/ Dans toute série statistique, si l'on ajoute un même réel k positif à toutes les valeurs alors l'intervalle interquartile est augmenté de k.

2°) Onze élèves ont passé un test.
Leur enseignant donne les renseignements suivants sur les résultats du groupe:
moyenne : 10,5 médiane : 9 etendue : 12.

Dire, si possible, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
a/ cinq élèves ont plus de 9.
b/ cinq élèves ont moins de 10,5.
c/ il y a 15 points d'écart entre la note la plus haute et la note la plus basse.
d/ le groupe est hétérogène : une partie des élèves a des notes élevées, une autre a des notes très faibles.

Activité 3 :

Voici une série croissante de valeurs dont les effectifs sont donnés dans le tableau ci-dessous.

valeur	6	7,5	8	8,5	9	x
effectif	2	3	4	1	1	y

1°) Déterminer y pour que la médiane soit égale à 8.
2°) Si y = 2, calculer x pour que la moyenne de cette série soit égale à 8.

Activité 4 :

1°) Dans une classe, il y a 10 garçons et 20 filles, la taille moyenne des garçons est 1,7 m et celle des filles est 1,61 m.Quelle est la taille moyenne de l'ensemble des élèves de la classe ?
2°) Dans une autre classe, il y a 28 élèves. La taille moyenne des garçons est 1,68 m, celle des filles est 1,60 m et celle des 28 élèves de la classe est 1,66 m. Combien y a-t-il de garçons et de filles dans cette classe ?

Activité 5 :

on donne la série statistique suivante :

x_i	2	3	5	6	7	8	9	10	12	15	16	18	19
n_i	1	1	1	3	1	1	3	2	3	1	2	1	1

1°) Déterminer la médiane, la moyenne et l'étendue de cette série.
2°) Changer des données pour avoir une médiane égale à 10 sans changer ni la moyenne ni l'étendue de la série. (A savoir par exemple que 9 + 9 = dix-huit !!)

Activité 6 :

Dans une classe, la moyenne des notes d'un devoir est 10,5 et la médiane est 12.
1°) On enlève la note la plus basse, qui est 3, obtenue par un seul élève et la note la plus haute, qui est 18, obtenue par un seul élève.
Que deviennent la moyenne et la médiane ?
2°) On enlève seulement la note la plus haute, la moyenne est alors 10,2.
Quel est le nombre des élèves de la classe ?

I– Serie statistique simple

1°) Résumé d'une série statistique simple

Activité 1 :

La répartition de 100 ménages selon leurs dépenses mensuelles est la suivante :

classe de dépense mensuelle en dinars	nombre de ménages
[100,200[	15
[200,300[	20
[300,400[	30
[400,500[	20
[500,600[	15

Le résumé d'une série statistique peut être visuel (représentation graphique) comme il peut être numérique (calcul de certains paramètres de cette série)

1°) Calculer la médiane et la moyenne de cette série.
2°) Calculer la variance et l'écart type de cette série.

Activité 2 :

Une machine est programmée pour fabriquer une pièce dont le diamètre doit être de 5 cm. Pour cela, l'opérateur règle la machine sur cette valeur. On observe toutefois des variations dans les diamètres des pièces fabriquées, ceci est inévitable mais doit rester dans des limites acceptables.
Un échantillon de 40 pièces est prélevé en vue de contrôler la machine.
Les résultats sont dans le tableau suivant :

4,9	5	5,2	4,7	4,8
5,1	4,5	5,2	4,9	4,8
4,9	4,9	4,9	5,3	5,3
4,8	4,8	4,9	5,1	4,8
5,4	4,9	4,9	5	4,8
4,8	5,3	4,8	5,1	5
5,1	4,8	4,7	5	4,9
4,8	4,6	4,7	4,9	4,7

1°) On a calculé que, si la machine est bien réglée, la moyenne des diamètres dans un échantillon d'effectif 40 doit appartenir à l'intervalle [4,88;5,12] . Est-ce le cas ici ?
2°) On a calculé que si la machine est bien réglée, l'écart type des diamètres dans un échantillon d'effectif 40 doit être dans l'intervalle [0,13;0,25].
Est-ce le cas ici ?
3°) Quelle décision doit-on prendre : régler la machine ou poursuivre la production ?

Activité 3 :

Une usine fabrique en grande série des billes d'acier. A un instant donné, on prélève un échantillon de billes et on mesure leurs diamètres (en mm).

diamétre	[48 ; 49[	[49 ; 50[	[50 ; 51[	[51 ; 52[
fréquence	4%	16%	24%	22%

diamétre	[52 ; 53[	[53 ; 54[	[54 ; 55[	[55 ; 56[
fréquence	18%	10%	4%	2%

1°) Déterminer les fréquences cumulées croissantes de cette série.
2°) Représenter dans un repère orthogonal le polygone des fréquences cumulées croissantes.
(on représentera :
-Les diamètres en abscisse, en graduant cet axe de 48 à 56
-Les fréquences cumulées en ordonnée).
3°) Sur ce graphique, estimer la médiane M_e de cette série.

a/ Calculer la moyenne $\bar{X}$ et l'écart type σ de cet échantillon.

b/ Par lecture graphique estimer le pourcentage de billes dont le diamètre est dans l'intervalle $\left[\bar{X}-\sigma , \bar{X}+\sigma\right]$.

c/ Quelle erreur commet-on si le diamètre d'une bille de cet intervalle est confondu avec la moyenne $\bar{X}$?

Activité 4 :

chiffre d'affaires	effectif	effectif cumulé croissant
[100;150[	4	
[150;200[	5	
[200;250[	6	
[250;300[	7	
[300,350[	10	
[350;400[	8	
[400;450[	6	
[450;500[	4	

1°) **a/** Reproduire et compléter le tableau ci-dessus.

b/ Vérifier que le premier quartile Q_1 se trouve dans la classe [200;250[.

c/ Dans quel intervalle se trouve la médiane M_e ? le troisième quartile Q_3 ?

2°) Pour calculer une valeur approchée du premier quartile Q_1 , on fait l'hypothèse que les valeurs de la série sont réparties uniformément dans la classe [200;250[.

chiffre d'affaire	200	Q_1	250
effectif cumulé croissant	9	12,5	15

a/ Expliquer pourquoi $\dfrac{Q_1 - 200}{12,5 - 9} = \dfrac{250 - 200}{15 - 9}$. .

b/ Calculer une valeur approchée arrondie au dixième du premier quartile .

c/ Calculer de la même façon M_e et Q_3 .

Activité 5 :

Le tableau ci-dessous donne le taux d'hémoglobine dans le sang (en grammes par litre)pour 60 adultes supposés en bonne santé

105	110	112	112	118	119	120	120	125	126	127	128	130	132	133
134	135	138	138	138	138	141	142	144	145	146	148	148	148	149
150	150	150	151	151	153	153	153	154	154	154	156	156	156	158
160	160	160	163	164	164	165	166	168	168	170	172	172	176	179

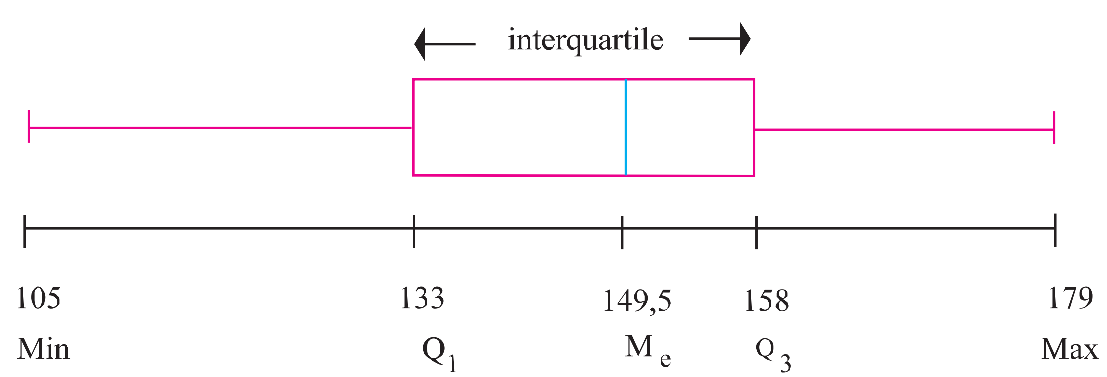
1°)Vérifier l'exactitude des valeurs suivantes :
- le minimum du taux d'hémoglobine est 105.
- le maximum du taux d'hémoglobine est 179.
- le premier quartile Q_1 est 133
- la médiane M_e est 149,5.
- le troisième quartile Q_3 est 158.

n étant l'effectif d'une série statistique dont les valeurs sont rangées par ordre croissant $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$

* Si n est multiple de 4 alors Q_1 (respectivement Q_3) est la valeur du caractère de rang $\dfrac{n}{4}$ (respectivement $\dfrac{3n}{4}$).

* Si n n'est pas multiple de 4 alors Q_1 (respectivement Q_3) est la valeur du caractère dont le rang est immédiatement supérieur à $\dfrac{n}{4}$ (respectivement $\dfrac{3n}{4}$).

2°) On peut présenter les valeurs précédentes sous la forme suivante appelée **boite de dispersion** ou **diagramme en boite.**



a/ Calculer les quotients $\frac{Q_3 - M_e}{Q_3 - Q_1}$ et $\frac{Q_1 - M_e}{Q_1 - Q_3}$

b/Compléter les phrases suivantes :

- Les 25 %des taux d'hémoglobine entre Q_1 et M_e occupent … % de la boite.
- Les 25 %des taux d'hémoglobine entre M_e et Q_3 occupent … % de la boite.

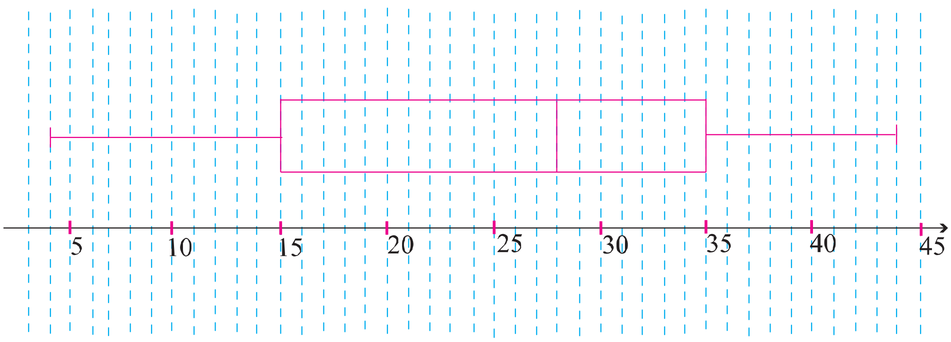
Remarques

*La boite de dispersion, qui représente à la fois un résumé visuel et numérique d'une série statistique montre la dispersion autour de la médiane dans l'intervalle interquartile.

* la dispersion est plus étalée à gauche de la médiane.

Activité 6 :

Voici le diagramme en boite d'une serie statistique



1°) **a/** .Quelles sont les valeurs minimale et maximale de la série ?

b/Quelle est la médiane de cette série ?

c/ Quels sont les premier et troisième quartiles ?

2°) **a/** Déterminer l'écart interquartile.

b/Recopier et compléter les phrases :

" Au moins … % des valeurs sont inférieures ou égales à 15 ".

" Au moins … % des valeurs sont inférieures ou égales à 35 ".

Activité 7 :

La répartition des employés d'une entreprise suivant la prime de fin d'année a permis de dresser le tableau suivant :

prime en dinars	[125;175[	[175;225[	[225;275[	[275;325[
nombre des employés	130	350	210	130

prime en dinars	[325;375[	[375;425[	[425;475[	[475;525[
nombre des employés	90	50	30	10

1°) Quelle est l'étendue de cette série ?
2°) Calculer la prime moyenne.
3°) Calculer les deux quartiles et la médiane.
4°) Représenter la boite de dispersion de cette série.

Activité 8 :

Le tableau ci-dessous donne la répartition des salariés d'une entreprise suivant le salaire trimestriel en milliers de dinars.

salaire	1	1,4	2,1	2,7	5,8
effectif	40	50	10	4	1

On appelle S_1 cette série statistique, et on appelle S_2 la série obtenue en supprimant le salaire le plus élevé.

1°) a/Calculer la moyenne et la médiane de chacune des deux séries S_1 et S_2 .

b/ Calculer l'étendue, l'écart–type et l'écart interquartile de chacune des deux séries S_1 et S_2 .

2°) Indiquer, parmi les paramètres calculés, ceux qui sont sensibles à la valeur extrême (le salaire le plus élevé).

3°) Quels sont alors les paramètres les plus significatifs pour un candidat à l'embauche dans cette entreprise ?

Remarque

On résume souvent une série statistique par la détermination soit du couple (moyenne , écart type) dont les deux termes sont sensibles aux valeurs extrêmes soit par le couple (médiane, écart interquartile) qui n'a pas cet inconvénient mais dont la détermination est un peu délicate

2°) Comparaison de séries.

Activité 1 :

Les deux séries suivantes donnent les précipitations moyennes mensuelles (en mm) de deux villes:

mois	J	F	M	A	M	J
V_1	80	95	68	64	77	87
V_2	165	149	97	76	55	40

mois	J	A	S	O	N	D
V_1	127	122	84	88	67	76
V_2	20	20	50	78	157	169

1°) Construire les diagrammes en boite des deux séries à partir d'une graduation commune.
2°) Déterminer la ville où les précipitations sont plus régulières.
3°) Compléter la phrase suivante par : supérieures ou égales ; inférieures ou égales

Pour la ville V_2 , le $\frac{1}{3}$ des mois ont des précipitations …… au maximum de la ville V_1.

4°) Compléter la phrase suivante par : le premier quartile ; le troisième quartile

Plus de la moitié des mois, les précipitations à la ville V_1 sont comprises entre la médiane et le ………. de la série des précipitations de la ville V_2 .

Activité 2 :

On effectue des essais sur un échantillon de 200 lampes éléctriques afin de tester leur durée de vie (exprimée en 100 heures).

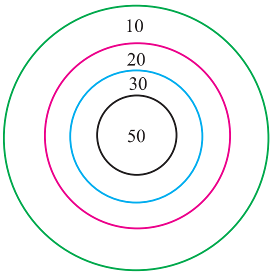
durée de vie	[11;12[	[12;13[	[13;14[	[14;15[	[15;16[	[16;17[	[17;18[	[18;19[
effectif	6	14	25	75	80	10	8	2

1°) **a/** Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes.
b/ Déduire graphiquement une valeur approchée de la médiane et des quartiles.
2°) Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart type σ de cette série.
3°) Un autre lot de lampes de même puissance provenant d'une autre usine est également testé.
La moyenne de durée de vie est 1400 heures, l'écart type est 140 heures.
Quelle est celle des deux usines qui vous semble être la plus performante ?

Activité 3 :

Deux tireurs X et Y s'affrontent en vue d'une sélection lors d'une épreuve comportant vingt-cinq tirs sur cible. Les résultats obtenus ont été consignés dans le tableau ci-dessous :

	0	10	20	30	50
X	2	5	6	7	5
Y	4	4	6	4	7



On se propose de savoir lequel de ces deux joueurs est plus régulier dans ses tirs.
1°) Déterminer la moyenne et la médiane des séries obtenues par X et par Y.
2°) **a/** Compléter la représentation dite " en tiges et feuilles " des deux séries :

```
            X              Y
      * * * * * 50
  * * * * * * * 30 * * * *
                20
                10
                 0
```

b/ à partir de ces graphiques, donner son impression sur le tireur le plus régulier.

3°) Calculer les écarts types des deux séries puis reconnaître le tireur le plus régulier.

Activité 4 :

Les rémunérations mensuelles (en centaines de dinars) des 40 salariés (Hommes) et 40 salariées (Femmes) d'une entreprise sont données dans le tableau suivant:

	Hommes	Femmes
Rémunérations (10^2 dinars)	n_H	n_F
[0;2[	6	25
[2;4[	10	10
[4;6[	22	5
[6;8[	2	0

n_H et n_F représentent respectivement les effectifs des hommes et des femmes.

1°) Calculer la moyenne de la série des hommes (respectivement des femmes) notée $\overline{X}$ (respectivement $\overline{Y}$).

2°) Calculer l'écart type σ_X (respectivement σ_Y).

3°) Calculer le rapport $\frac{\sigma_X}{\overline{X}}$ (respectivement $\frac{\sigma_Y}{\overline{Y}}$) appelé le coefficient de variation.

4°) Selon vous pour comparer ces deux séries vaut-il mieux comparer leurs écarts types ou leurs coefficients de variation ?

II– Série statistique double

1°) Données individuelles

Définition

Activité 1 :

Le tableau suivant donne pour 10 gouvernorats la production des olives à huile en milliers de tonnes et des céréales en milliers de tonnes pour la compagne 2000-2001.

Gouvernorat	production des olives à huile	production des céréales
Ariana	11,6	16
Bizerte	12,8	209,24
Beja	18,9	349,1
zaghouan	46,4	79,03
Sousse	45,2	0,18
sfax	140	0,18
Kairouan	84	52,64
Sidi Bouzid	75	29,92
Gafsa	18,5	1,11
Mednine	22,4	0,01

1°) Quelle est la population concernée par cette étude ?
2°) Quelles sont les deux caractères étudiés chez cette population ?
(On appelle X le premier caractère et Y le second)
3°) Pour chaque variable statistique, déterminer la moyenne et l'écart type.

A chacun des ces gouvernorats écrits dans l'ordre du tableau ci haut, on associe un numéro de 1 à 10.Ainsi le caractère X (respectivement Y) prend 10 valeurs $x_1 = 11{,}6$; $x_2 = 12{,}8$;..........; $x_{10} = 22{,}4$ (respectivement $y_1 = 16$; $y_2 = 209{,}24$..; $y_{10} = 0{,}01$)
La donnée de la famille $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots\dots, (x_{10}, y_{10})$ définit la série statitique double associée au caractère (X , Y).

Nuage de points associé à une série statistique double - Point moyen d'un nuage

Activité 2 :

Le tableau suivant, à double entrée, donne pour 10 élèves leur note x_i en économie et leur note y_i en maths .

x_i	5	7	9	9	10	10	11	12	13	14
y_i	6	7	8	10	11	13	10	13	12	16

1°) Placer dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ les points M_i de coordonnées $(x_i;y_i)$
$i = 1, 2, \dots,10$.
2°) Appelons $\overline{X}$ (respectivement $\overline{Y}$) la moyenne arithmétique de la série statistique à variable la note en économie (respectivement en maths).
a/Calculer $\overline{X}$ et $\overline{Y}$.
b/ Placer le point $G(\overline{X}, \overline{Y})$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Définitions

❖ Dans un repère orthogonal, l'ensemble des points $M_i(x_i;y_i)$ est appelé le nuage de points associé à la série statistique double.

❖ Si $\overline{X}$ est la moyenne des valeurs x_i et $\overline{Y}$ la moyenne des valeurs y_i, le point $G(\overline{X}, \overline{Y})$ est appelé le point moyen de ce nuage.

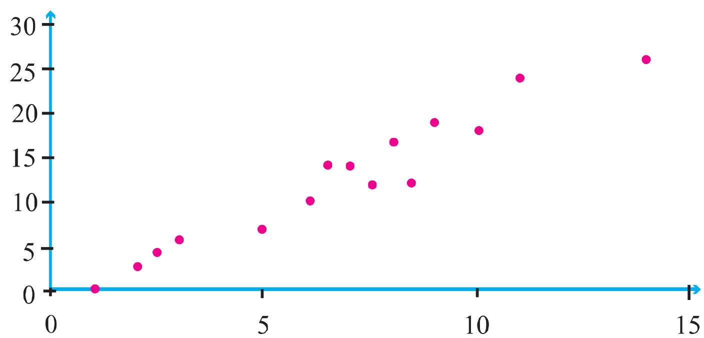
Remarque

La représentation graphique de ces couples $(x_i;y_i)$ peut donner une première idée sur une corrélation éventuelle entre les deux variables X et Y. Pour cela il faut observer la façon avec laquelle les points se regroupent pour former le nuage de points

Exemples

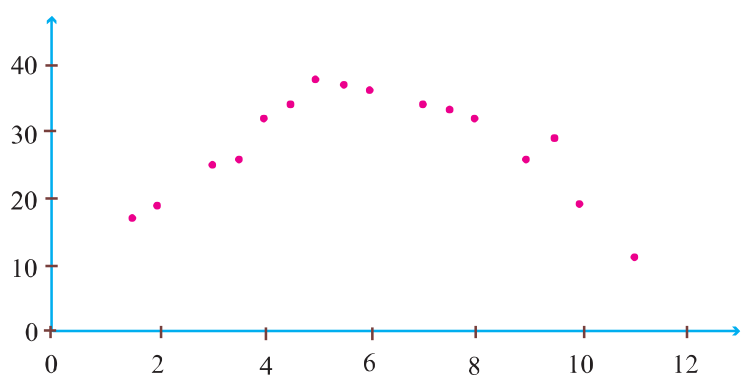
1°) Relation affine

Les points se regroupent autour d'une droite

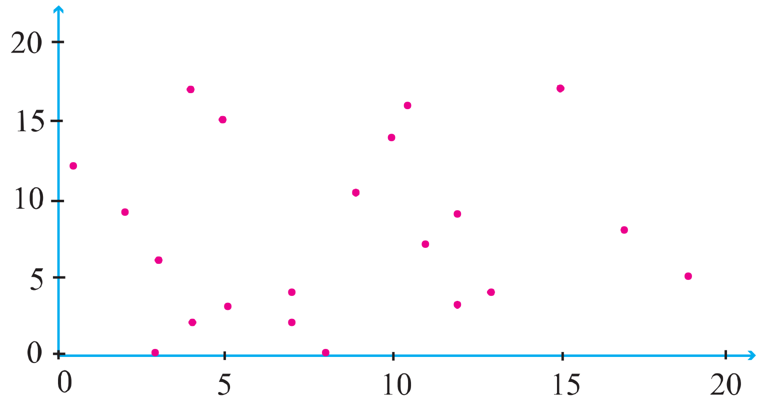


2°) Relation parabolique

Les points se regroupent autour d'une parabole.



3°) Pas de relation



Activité 3 :

Le tableau suivant donne la balance commerciale alimentaire de la Tunisie à partir de l'année 1998 (Les valeurs sont exprimées en millions de dinars)

importation x_i	802,5	670,9	782,4	887,6	940	917
exportation y_i	548,7	706,8	628,2	669,9	471,5	669,5

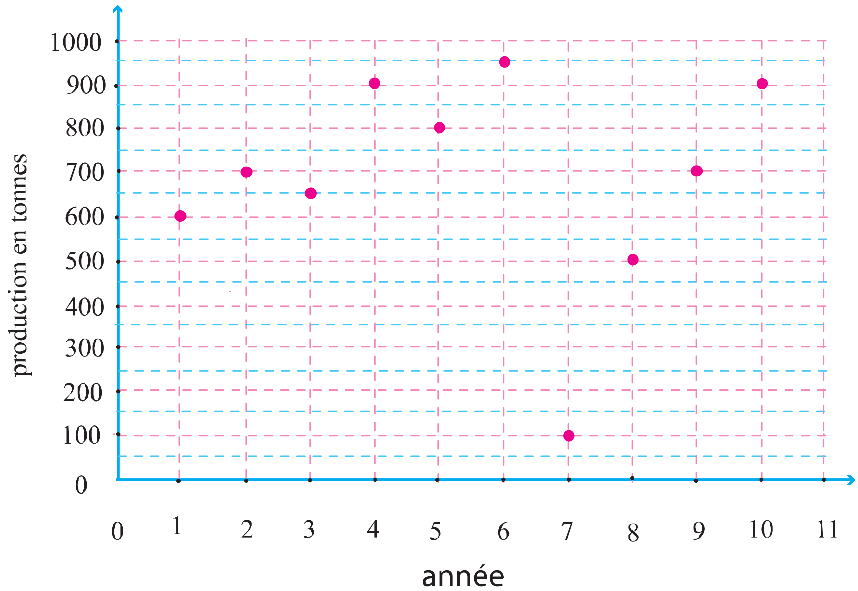
1°) Dans un repère orthogonal, construire le nuage de points de cette série.
2°) Déterminer la moyenne de chacune des deux variables.
3°) Préciser le point moyen de cette série double et le placer.
4°)Déterminer l'écart type de chacune des deux variables

Remarque :

On peut prendre comme coordonnées de l'origine les plus basses valeurs des variables, et une graduation, sur chaque axe, prenant en compte l'étendue de chaque série

Activité 4 :

Le nuage suivant représente la série statistique double donnant, la production d'une entreprise depuis 1995. L'année 1995 est numérotée 1 , l'année 1996 est numérotée 2 … et la production est exprimée en tonnes.



1°) Reconstituer le tableau statistique relatif à ce nuage.
2°) Déterminer la production moyenne de cette entreprise
3°) Préciser le point moyen du nuage.

Activité 5 :

Le tableau suivant indique, pour l'année 1995, le rang occupé dans le monde par un pays donné en fonction de son **I**ndicateur de **D**éveloppement **H**umain (IDH) d'une part et de son **P**roduit **N**ational **Br**ut (PNB) par habitant d'autre part.

pays	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}
rang IDH x_i	11	32	110	62	8	161	6	3	132	10	112	143
rang PNB y_i	12	36	122	10	9	171	13	3	140	19	97	114

1°) Construire le nuage de points M_i (x_i,y_i) ; i =1,.....,12 dans un repère orthonormé.

2°) Déterminer le point moyen G de cette série puis placer le.

3°) N_1 désigne le nuage des points $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, … ,$M_6(x_6,y_6)$.

N_2 désigne le nuage des points restants.

a/ Calculer G_1 (respectivement G_2) le point moyen du nuage N_1(respectivement N_2).

b/ Déterminer une équation cartésienne de la droite $(G_1\,G_2)$.

c/ Expliquer pourquoi cette droite passe par G.

2°) Données groupées

Définition– Distributions marginales

Activité 1 :

Le tableau suivant donne la répartition de 300 membres d'un club sportif, selon leur taille x_i (en cm) et leur poids y_i (en Kg). Sachant que les cases vides correspondent à des effectifs nuls.

Ypoids en kg / Xtaille en cm	$y_1= 60$	$y_2=62{,}5$	$y_3 = 65$	$y_4=67{,}5$	$y_5 =70$	$y_6=72{,}5$	$y_7 = 75$	$y_8=77{,}5$	$y_9 = 80$
$x_1 =160$	4	3	2						
$x_2 = 165$		7	17	8	1				
$x_3 = 170$		2	20	30	17	4	1		
$x_4 = 175$			7	28	36	16	5	1	
$x_5 = 180$			1	6	19	22	10	4	2
$x_6 = 185$					4	3	8	5	1
$x_7 = 190$						2		2	2

1°) **a/** Quelle est la signification du nombre écrit dans la $3^{ème}$ ligne et la $4^{ème}$ colonne (on le note n_{34} et on le lit n , 3 , 4)

b/ Déterminer les nombres n_{44} ,n_{36}et n_{63} et donner leurs significations.

c/ Quel est le nombre de personnes dont la taille est inférieure à 175 cm et dont le poids est supérieur à 65 Kg ?

2°) **a/** Combien de personnes ont une taille égale à 160 cm ?

b/ Combien de personnes ont une taille égale à 165cm ?

c/ Recopier et compléter le tableau suivant :

Taille (en cm)	160	165	170	175	180	185	190	Total
effectif	9							300

❖ Le tableau obtenu définit la distribution des effectifs marginaux des membres du club selon la taille.

3°) **a/** Combien de personnes ont un poids égal à 60 Kg ?

b/ Combien de personnes ont un poids égal à 65Kg ?

c/ Recopier et compléter le tableau suivant :

poids (en kg)	60	62,5	65	67,5	70	72,5	75	77,5	80	Total
effectif				72						300

❖ Le tableau obtenu définit la distribution des effectifs marginaux des membres du club selon le poids

Fréquences marginales

Définition

❖ Les rapports des effectifs d'une distribution marginale d'un caractère à l'effectif total définissent les fréquences marginales de ce caractère.

Ainsi les fréquences marginales de la taille relatives à l'activité précédente sont données dans le tableau suivant:

Taille (en cm)	160	165	170	175	180	185	190
fréquence	0,03	0,11	0,24	0,31	0,21	0,07	0,02

Activité 2 :

Déterminer Les fréquences marginales du caractère " poids" de l'activité précédente.

Activité 3 :

La répartition d'un groupe d'entreprises selon la taille (effectif) "X" et le bénéfice mensuel moyen (en milliers de dinars) "Y" sur une période donnée est présentée dans le tableau suivant::

X \ Y	[10;20[	[20;30[	[30;35[
10	2	0	0
30	1	2	0
60	0	1	4

Déterminer la distribution des effectifs marginaux et les fréquences marginales de chacune des variables Xet Y.

Activité 4 :

Le tableau suivant donne la répartition des employés d'une entreprise en fonction de leur catégorie professionnelle C et de leur salaire mensuel S exprimé en dinars.

C \ S	$200 \leq S < 500$	$500 \leq S < 800$	$800 \leq S < 1000$
ouvrier	170	100	0
cadre	0	10	20

1°) Déterminer la distribution des effectifs marginaux et les fréquences marginales de chacune des variables C et S.
2°) Calculer la moyenne ainsi que l'écart type de la variable S.

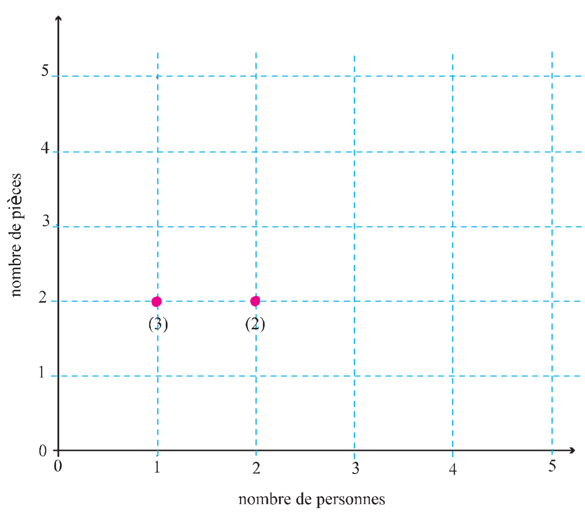
Nuage de points - Point moyen

Activité 5 :

On a étudié la répartition des 21 appartements d'un immeuble suivant le nombre x_i de personnes et le nombre y_i de pièces d'habitation.

X \ Y	2	3	4
2	1	3	0
3	0	2	1
4	1	4	4
5	2	1	2

1°) Déterminer la distribution des effectifs marginaux de chacune des variables statistiques X et Y.
2°) Calculer $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ moyennes respectives des variables statistiques X et Y.
3°) Si le réel n_{ij} qui désigne le nombre d'appartements où il y a x_i personnes dans y_j pièces **n'est pas nul** on considère le point M_{ij} de coordonnées (x_i,y_j) dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$qu'on affecte du coefficient n_{ij} .
Ainsi on obtient 10 points M_{11} (2,2) ; M_{12} (2,3) ; M_{22} (3,3) ; … ;M_{43} (5,4) affectés respectivement de 1 ; 3 ; 2 ; … ; 2.



4°) Placer le point $G(\overline{X}, \overline{Y})$.

L'ensemble des points pondérés (M_{ij}, n_{ij}) avec $n_{ij} \neq 0$ constitue le nuage de points de la série statistique double.
Le point $G(\overline{X}, \overline{Y})$ est appelé **le point moyen** de ce nuage.

Activité 6 :

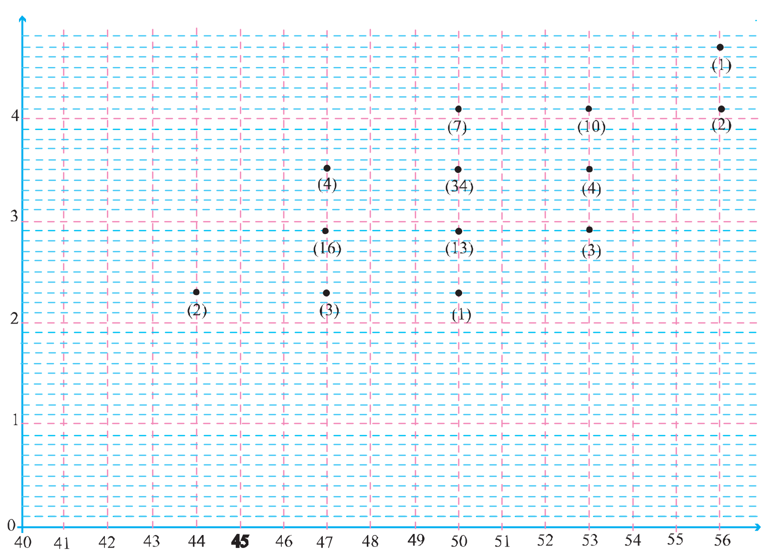
On donne le tableau suivant à double entrée relatif à l'étude de deux caractères
X : puissance d'un véhicule en chauveaux et Y : la durée pneumatique en milliers de kilomètres.

x_i \ y_i	[15;20[	[20;25[	[25;30[
2	0	5	25
3	8	20	3
4	30	7	2

1°) Calculer la proportion des voitures ayant une puissance inférieure ou égale à trois chevaux et une durée pneumatique supérieur ou égale à 20 000 kilomètres.
2°) Déterminer les distributions marginales des effectifs de X et de Y.
3°) **a/** Construire le nuage de points de cette série.
b/ Placer le point moyen G du nuage.

Activité 7 :

Le nuage suivant est la représentation graphique de la série double donnant la répartitionde 100 nouveaux nés suivant la taille , exprimée en cm et le poids exprimé en kg.



1°) Remplir le tableau statistique suivant qui définit la distribution représentée par le nuage précédent.

poids / taille	[2;2,6[	[2,6;3,2[	[3,2;3,8[	[3,8;4,4[	[4,4;5[
43 à 45					
46 à 48					
49 à 51					
52 à 54					
55 à 57					

2°) Déterminer la distribution des effectifs marginaux des variables étudiées.
3°) Préciser les coordonnées du point moyen du nuage.

Activité 8 :

Le tableau ci-dessous donne la répartition de 25 élèves selon la distance de leur domicile au centre-ville et le nombre de séances de cinéma auxquelles ils ont assisté dans une salle du centre-ville pendant le mois précédant l'enquête.

Numéro de l'élève	Nombre de séances X	Distance (en Km)Y
1	2	3
2	1	2
3	4	3
4	0	3
5	1	12
6	4	1
7	1	3
8	2	2
9	0	2
10	1	14
11	0	12
12	1	1
13	2	13
14	0	1
15	1	9
16	2	25
17	0	20
18	1	7
19	1	20
20	0	5
21	4	8
22	1	8
23	3	2
24	0	9
25	1	16

On note X le caractère relatif au nombre de séances de cinéma et Y celui relatif à la distance de leur domicile au centre-ville.

1°) Classer les couples (x_i,y_i)suivant l'ordre croissant des valeurs prises par le caractère X; si de plus, plusieurs couples ont le même premier élément, classer ces couples suivant les valeurs croissantes du deuxième élément.

2°) Partager l'intervalle$[0;25[$ en sous intervalles d'amplitude 5 et disjoints, pour obtenir 5 classes numérotées de 1 à 5. Le centre de la $i^{ième}$ classe est noté y_i .

3°) Dresser un tableau à double entrée de la série double où figurent les effectifs des distributions marginales.

4°) déterminer les distributions des fréquences marginales des deux variables X et Y.

5°) **a/** Construire le nuage de points de cette série.

b/ Placer le point moyen de ce nuage.

Le tableur permet d'obtenir instantanément le salaire moyen après chaque modification de la configuration dans une entreprise.

On a représenté sur un tableur les effectifs (ligne 2) et les salaires (ligne 3) des employés d'une entreprise, en fonction de leur catégorie (ligne 1).

D4 fx = (B2*B3+C2*C3+D2*D3+E2*E3)/(B2+C2+D2+E2)

	A	B	C	D	E	F
1	catégorie	ouvrier	ouvrier qual	cadre moy	cadre sup	
2	effectif	170	100	10	20	
3	salaire moy	300	375	375	450	
4		salaire moyen		337.5		
5						
6						

1°) Reproduire le tableau ci-dessus sur un tableur.

2°) Montrer en effectuant plusieurs essais, qu'en diminuant les salaires (ligne 3) et en modifiant convenablement les effectifs (ligne 2), il est possible d'augmenter le salaire moyen.

1

On note S_1 la série suivante : 3 4 5 8 9 12 13 15 16 50.
S_2 est la série obtenue en supprimant la valeur 50.

1°) Calculer l'étendue, l'écart type et l'écart interquartile (trois mesures de la dispersion) puis la moyenne et la médiane (deux mesures de tendances centrale) de chacune des deux séries.

2°) Quelle caractéristique des ces différentes mesures est mise en évidence par cet exemple ?

2

Dans deux entreprises E_1 et E_2 les employés sont classés en deux catégories : ouvriers et cadres. Les deux tableaux qui suivent donnent la répartition des employés en fonction de leur catégorie professionnelle C et de leur salaire mensuel S, en dinars.

Entreprise E_1

C \ S	$250 \leq S < 350$	$350 \leq S < 400$	$400 \leq S < 500$
ouvrier	170	100	0
cadre	0	10	20

Entreprise E_2

C \ S	$250 \leq S < 350$	$350 \leq S < 400$	$400 \leq S < 500$
ouvrier	280	140	0
cadre	0	40	40

Dans les calculs qui suivent les sommes seront exprimées en dinars et arrondies au dinar inférieur, et on utilisera les centres de classe.

1°)a/Calculer la moyenne des salaires m_1 et m_2 respectivement dans les entreprises E_1 et E_2.

b/Calculer la moyenne des salaires des ouvriers $m_1{}'$ et $m_2{}'$ respectivement dans les entreprises E_1 et E_2 .

c/Même question pour les salaires des cadres $m_1{}''$ et $m_2{}''$

2°) Pour chaque entreprise calculer la fréquence des salaires suivant la catégorie professionnelle (les résultats seront donnés dans deux tableaux distincts).

donner pour chaque entreprise la proportion de cadres parmi les employés (résultats en pourcentage).

3°) Le PDG de l'entreprise E_2 dit à celui de l'entreprise E_1 :" Mes employés sont mieux payés que les vôtres ". " Faux " répond ce dernier, " mes ouvriers sont mieux payés et mes cadres également ".
Expliquer ce paradoxe.

3

Une entreprise qui conditionne du café en paquets individuels a mis à l'essai deux machines.
Le même réglage de 265 grammes a été effectué sur ces deux machines.

Un échantillon de 40 paquets a été prélevé dans la production de la première machine.

256	259	260	260	261	261	261	261
262	262	262	262	263	263	263	264
264	264	264	265	265	265	265	265
265	266	266	266	266	266	266	267
267	268	269	269	270	270	271	273

Un échantillon de 36 paquets a été prélevé dans la production de la deuxiéme machine.

260	262	263	264	264	265	266	266	267
268	268	268	269	269	269	269	269	269
270	270	271	271	271	271	272	272	272
273	273	274	276	276	277	277	279	280

1°) a/ Calculer les quartiles de chaque échantillon.
b/Comparer les écarts interquartiles des deux séries.

2°) a/Construire le diagramme en boite de chaque série.
b/Quelle est la machine qui semble la plus appropriée pour la production envisagée ?

4

Soit le tableau suivant à double entrée des salaires annuels X (en milliers de dinars) et de l'ancienneté Y du personnel d'une entreprise .

X \ Y	[0;5[	[5;10[	[10;15[	[15;20[
[5;10[	5	78	2	1
[10;15[	3	4	3	3
[15;20[	0	1	3	6

1°) Déterminer les distributions marginales de X et Y.
2°) Calculer la moyenne et l'écart type des salaires.

5

Le tableau suivant donne la consommation mondiale de sucre (en milliers de tonnes) entre 1900 et 1999.

1900	8130
1910	12269
1920	13024
1930	24274
1940	26704
1950	29404
1960	49298
1970	70480

1980	88646
1994	112954
1995	116590
1996	120032
1978	122931
1998	124417
1999	126221

(Source: Centre d'études et de documentation du sucre, novembre 2000)
1°) Représenter cette série chronologique par un nuage de points.
2°)Déterminer le point moyen du nuage en arrondissant à l'unité.

6

Dans une entreprise de 450 salariés, il y a trois femmes contre deux hommes.
Les 22 cadres se répartissent égalitairement suivant deux sexes; en revanche, il y a un agent masculin pour deux agents féminins parmi les 72 agents. Le reste des salariés sont des employés.
Dresser un tableau des effectifs selon la catégorie professionnelle et le sexe complété par les effectifs marginaux.

7

Lors d'une enquête, on a interrogé des élèves de 13 à 20 ans sur le nombre de livres lus durant le mois précédent l'enquête. On a obtenu le tableau suivant en %.

nombre de livres lus / age	0	1	2 ou 3	4 ou plus
[13;15[	7	22	40	31
[15;18[	12	33	35	20
[18;20[	26	37	27	10

Sachant que l'échantillon était composé de 50 % d'élèves de 13 à 15 ans, 30 % de 15 à 18 ans et 20 % d'élèves de 18 à 20 ans.
1°) Retrouver le tableau des fréquences.
2°) En déduire les fréquences marginales des deux distributions.

8

On définit la série statistique double suivante (X ; Y).

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

1°) Représenter graphiquement cette série double (X , Y) et déterminer les coordonnées de son point moyen. Placer ce point sur la figure.
On appelle M_i le point de coordonnées (X_i ,Y_i). On partage le nuage de points obtenus en deux " sous nuages" N_1 et N_2 , N_1 contenant les points M_i pour i dans$\{1,2,3,4,5\}$ et N_2 contenant les points M_i pour i dans $\{6,7,8,9,10\}$
2°) Déterminer les coordonnées du point moyen G_1 de N_1 et du points moyen G_2 de N_2 .
Tracer la droite (G_1G_2) et donner une équation réduite de cette droite.

9

Le tableau suivant indique les variations du chiffre d'affaires y_i d'une entreprise selon les frais de publicité x_i (x_i et y_i sont exprimés en millions de dinars) au cours de ces huit dernières années.

année	1	2	3	4	5	6	7	8
X_i	2	2,3	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1
Y_i	52	59	60	65	70	72	73	75

1°) Représenter le nuage de points associé à cette série dans un repère convenablement choisi (x_i en abscisse, y_i en ordonnée).

2°) On considère les points moyens G_1 et G_2 des sous nuages obtenus respectivement pour les 4 premières années et les 4 dernières.

a/ Donner les coordonnées de G_1 et G_2

b/ Tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique de la question 1. ; donner une équation de cette droite.

10

Le tableau suivant donne le PNB (en euros par habitant) ainsi que le nombre d'hôpitaux (pour 1 million d'habitants) dans quelques pays européens

pays	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
X = PNB en euros par habitant	5100	7800	11200	15800	20100	22500	26200	28900
Y = nombre d'hôpitaux par million d'habitants	620	1080	1550	2100	3000	3250	3800	4200

1°) Représenter le nuage de points associés à la série statistique (X , Y).

Unités graphiques :

- en abscisses : 1 cm pour 1000 euros.
- en ordonnées : 1 cm pour 200 hôpitaux.

On prendra pour origine le point (5000 ; 600).

2°) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points. Placer G sur le graphique.

3°) Dans cette question, on considère deux sous nuages : celui des points correspondants aux pays P_1 , P_2 , P_3 , P_4 et celui constitué des points correspondants au pays P_5 , P_6, P_7 , P_8

a/ Calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 des deux sous- nuages. Placer les points G_1 et G_2 sur le graphique.

b/ Démontrer qu'une équation cartésienne de la droite $(G_1 G_2)$ est:$y = 0{,}13x + 159$ (On détaillera les calculs).

4°) La droite (G_1G_2) s'appelle la "droite de Mayer ". Représenter cette droite sur le graphique.

Au II^{e} millénaire av. J.-C., les Chinois étudient déjà les chiffres de leurs productions agricoles, tandis que les Égyptiens organisent des recensements de leur population. Dans l'Antiquité, Grecs et Romains recueillent des données chiffrées relatives à la population. Le gouvernement de Rome procède en particulier au premier recensement de l'histoire à grande échelle, répertoriant aussi la richesse de ses territoires.

Le Moyen Âge connaît très peu de recensements. Au VIII^{e} siècle, Charlemagne ((742-814), roi des Francs (768-814), des Lombards (774-814) et empereur d'Occident (800-814), qui a porté la dynastie carolingienne à son apogée)commande des relevés des propriétés ecclésiastiques. Quelques trois siècles plus tard, Guillaume Ier le Conquérant ((1027-1087), duc de Normandie (1035-1087) et roi d'Angleterre (1066-1087), fondateur de la dynastie anglo-normande) ordonne en 1086 le recensement de toutes les terres anglases. Les informations recueillies à cette occasion sont consignées dans un recueil cadastral, le Domesday Book.

Au début du XVI^{e} siècle, on commence à tenir en Angleterre un registre des décès et des naissances. En France, les intendants Sully, Colbert et Vauban commandent de nombreux inventaires et enquêtes. En 1662, l'Anglais John Graunt constate une certaine constance dans le rapport du nombre de naissances féminines à celui des naissances masculines. Cette observation est le prélude aux développements du XVIII^{e} siècle qui voient les statistiques servir de base à des prévisions. Dès 1853, la statistique se développe dans la plupart des sciences, donnant notamment naissance à la mécanique statistique.

Aujourd'hui, les statistiques sont considérées comme des outils fiables qui peuvent fournir une représentation et une interprétation de données économiques, politiques, sociales, psychologiques, biologiques ou physiques. Elles permettent de mettre en corrélation de telles données et de les analyser.

Le travail du statisticien ne se limite plus, en effet, à recueillir des données et à les présenter sous forme de tableaux ou de graphiques comme autrefois. Désormais, il consiste principalement à interpréter l'information.

(Source:Microsoft.Encarta.2006)

On ne connait completement une science tant qu 'on n' en sait pas l'histoire
AUGUSTICONTE

SUITES RÉELLES

Chapitre 2

- **Pour commencer**
- **Cours**

  I - Limite d'une suite arithmétique.

  II - Limite d'une suite géométrique.

  III - Exploitation de la somme des premiers temes consécutifs d'une suite géométrique.

  VI - Suites récurrentes.
- **Utilisation des T.I.C.**
- **Exercices et problèmes**
- **Math culture.**

Activité 1 :

Cocher la réponse correcte.

1°) La suite U définie sur IN par : $U_n = 2 - 3n$ est:

a/ arithmétique ; **b/** géométrique .

2°) Le troisième terme de la suite définie pour tout entier naturel n,par $U_n = 2 - 3n$ est égal à

a/ -7 ; **b/** -4.

3°) La somme des cent premiers termes de la suite définie pour tout entier naturel n, par $U_n = 2 - n$ est égale à **a/** -4750 **b/** 4750

4°) La suite U définie sur IN par : $U_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ est

a/ arithmétique ; **b/** géométrique .

5°) Le quatrième terme de la suite définie pour tout entier naturel n, par $U_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ est égal à **a/** $\frac{\sqrt{2}}{4}$; **b/** $\frac{1}{4}$

6°) La somme des cent premiers termes de la suite définie pour tout entier naturel n, par $U_n = (-1)^n$ est égale à **a/** 1 **b/** 0 .

7°) La suite U définie sur IN par : $U_n = (1+n)^3$ est

a/géométrique ; **b/**ni arithmétique ni géométrique.

8°)S est la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2.
Le premier de ses termes est égal à 5, le dernier à 640.
Alors : **a/** S = 1200 ; **b/** S = 1275 ; **c/** S = 1280

Activité 2 : (Vrai ou faux)

Dites, en justifiant vos réponses, si les propositions sont vraies ou fausses.

1°) Si (U_n) est une suite arithmétique de raison r = 5 qui vérifie $U_0 = -200$ alors il existe des termes de cette suite qui sont positifs.

2°) Si (U_n) est une suite arithmétique qui vérifie $U_2 = -4$ et $U_8 = 2$, alors $U_{12} \geq 8$.

Activité 3 :

Comparer $1+3+3^2+....+3^{50}$ à 10^{15} .

Activité 4 :

M^r X a décidé de s'entraîner pour un marathon qu'il doit courir le 1er mai 2007.
Il commence son entraînement 24 semaines avant la compétition.
Il décide de courir vingt kilomètres la première semaine, et d'ajouter quatre kilomètres de course chaque semaine.

1°) On note d_1 la distance parcourue la première semaine ($d_1 = 20$), d_2 la distance la deuxième semaine, ...d_n la distance parcourue la nième semaine.

a/Calculer d_1,d_2 et d_4 .

b/ Quelle est la nature de la suite (d_n) ? Exprimer d_n en fonction de n.

2°) Quelle distance M^r X parcoura-t-il la dernière semaine avant sa compétition ?

3°) Quelle distance totale M^r X aura-t-il parcourue durant ses semaines d'entraînement ?

4°) En combien de semaines, M^r X peut-il parcourir une distance de 60 kilomètres ?

Activité 5:

Un capital de 5000 dinars est placé, à intérêt composé, au taux annuel de 7 %.
Désignions par U_0 le dépôt initial, et par U_n la valeur acquise par le capital au bout de n années de placement.

1°) Calculer U_1 et U_2. Donner une relation entreU_n et U_{n+1} .

2°) a/ Prouver que(U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b/ Exprimer U_n en fonction de n.

3°) En combien d'années, le capital initial aura-t-il doublé ?

Activité 6:

Le 1er janvier 2006, le prix d'un objet est P_0 . L'inflation est de 3 % par an à partir de 2006.

1°) Calculer en fonction de P_0 le prix P_1 de cet objet au bout d'un an, P_2 au bout de 2 ans, P_n au bout de n années.

2°) Dans cette question, on suppose que l'inflation est de 3 % une année, -3 % la suivante (il y a désinflation), le cycle se reproduisant par période de 2 ans.
Donner en fonction de P_0 , le prix de l'objet en 2008 ; en 2010.

Calculer le prix P_{2n} au bout de 2n années.

I – Limite d'une suite arithmétique

Activité 1 :

Un élève place une somme de 50 DT à un intérêt simple, au taux annuel de 5 %.
On note $U_0 = 50DT$ (le capital initial) et on désigne par U_n la somme totale (capital initial + intérêt) dont il disposera au bout de n ans.

1°) Calculer U_1, U_2 et U_3 .

2°) Donner une relation entre U_{n+1}et U_n . En déduire que (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison r.

3°) Exprimer U_n en fonction de n.

4°) Placer dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les points $A_n(n,U_n)$, n = 0;1...9.,

5°) Quel est le comportement de U_n quand n tend vers l'infini?

Activité 2 :

Soit U une suite arithmétique de raison r = -2 et de premier terme $U_0 = 5$.

1°) Exprimer U_n en fonction de n.

2°) Placer dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les points $A_n(n,U_n)$, n = 0 ; 1... 8

3°) Quel est le comportement de U_n quand n tend vers l'infini?

Théorème (admis) :

Le terme général d'une suite arithmétique de raison strictement positive tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
Le terme général d'une suite arithmétique de raison strictement négative tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarque

Si la raison d'une suite arithmétique est nulle alors ses termes sont tous égaux.
Une telle suite est constante.

Activité 3 :

Déterminer la limite de la suite de terme général:

a/ $U_n = \dfrac{3-n}{4}$; **b/** $U_n = \dfrac{1}{4}n - \dfrac{1}{3}n$; **c/** $U_n = \dfrac{n(1+2n)}{2} + 3 - n^2$.

Activité 4 :

Soit U la suite définie sur IN par$U_0 = 2$et pour tout entier naturel n ,$U_n = U_{n+1} - \dfrac{2}{3}$.

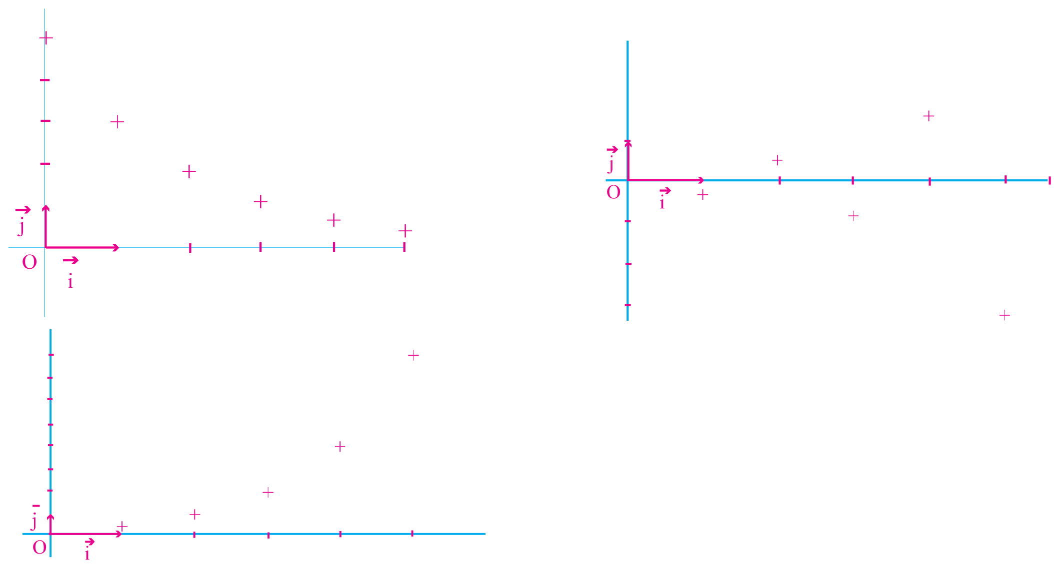
1°) Calculer U_1, U_2 et U_3 .

2°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

II – Limite d'une suite géométrique

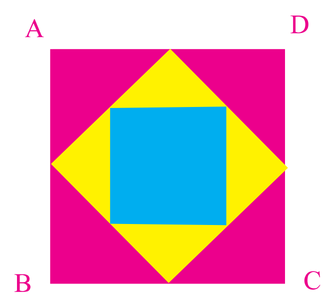
Activité 1 :

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
On considère trois suites géométriques (u_n) , (v_n) et (w_n) de raisons respectives $\frac{3}{5}$; 2 et -2
Sur chacun des graphiques ci-dessous, on a représenté les points
$A_n(n,u_n)$, $B_n(n,v_n)$ **et** $C_n(n,w_n)$, $n \le 5$. Identifier ces points.



Activité 2 :

Dans la figure ci-contre ABCD est un carré de côté 1 noté C_0 .
On désigne par C_1 , le carré obtenu en joignant les milieux des cotés du premier carré.
On répète le procédé indéfiniment pour obtenir à chaque étape n un carré C_n .On désigne par a_n l' aire du carré C_n



1°) Calculer a_1 ,a_2 ,a_3 et a_4 .

2°) Quelle est la nature de la suite (a_n).

3°) Montrer que, pour tout entier n, $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

4°)a/ Représenter dans un repère les points $A_n(n,a_n)$ pour $0 \le n \le 4$.

b/ Utiliser la calculatrice pour déterminer l'entier N tel que pour tout $n \ge N$, $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right| \le 10^{-3}$?

c/ Utiliser la calculatrice pour déterminer l'entier N tel que pour tout $n \ge N$, $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right| \le 10^{-5}$?

d / Utiliser la calculatrice pour déterminer l'entier N tel que pour tout $n \ge N$, $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right| \le 10^{-8}$?

4°) Que peut-on dire de a_n , lorsque n tend vers l'infini ?

Théorème (admis) :

Soit U une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul .
❖ Si $-1 < q < 1$, la suite U est convergente vers 0.

Activité 3 :

Déterminer la limite de la suite de terme général :

$$a/ U_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n ; \quad b/ U_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} ; \quad c/ U_n = \frac{3^{n+1}}{5^n}$$

Activité 4 :

On admet que le taux de croissance annuel de la population mondiale est d'environ 2%.

1°) Sachant que la population mondiale P_0 en 2000 était de 6,2 milliards. Quel sera la population mondiale en 2100 , 2200 ?

2°) Si la surface habitable de la terre est d'environ 20×10^6 hectares, quelle sera la densité de la population mondiale en 2200 ?

3°) Déterminer la population mondiale P_n , n années après l'an 2000.

4°) a/ A partir de quelle année la population mondiale dépassera-t-elle 10 milliards ?
b/ A partir de quelle année la population mondiale dépassera-t-elle 100 milliards ?
c/ A partir de quelle année la population mondiale dépassera-t-elle un billion ?

Théorème (admis) :

Soit U une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul .
❖ Si $q > 1$, la suite U est divergente et sa limite est $+\infty$ ou $-\infty$ selon que U_0 est strictement positif ou strictement négatif

Activité 5 :

Soit U la suite définie sur IN par : $U_0 = -2$ et pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = \frac{4}{3}U_n$

1°) Calculer U_1, U_2, et U_3.

2°) Représenter les points $A(n, U_n)$, pour n inférieur ou égal à 4

3°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Activité 6 :

Soit U la suite géométrique définie sur IN par : $U_0 = 1$ et de raison $q = -1$.

1°) Placer dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points $A_n(n, U_n)$, n = 0 ; 1; …20.

2°) Placer sur l'axe des abscisses U_0 , U_1 ,U_2 , et U_{20} .

3°) Quelles sont les valeurs prises par la suite U ?

Dans l'activité précédente la suite oscille entre deux valeurs et son terme général ne se rapproche d'aucun terme pour les grandes valeurs de n.
On dit que la suite est divergente.

Théorème (admis) :

Soit U une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul U_0.
❖ Si $q \leq -1$, la suite U n'a pas de limite. On dit qu'elle est divergente.

Activité 7 :

Dire si chacune des suites suivantes admet une limite si oui, la préciser

$$a/\ U_n = -\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^n \quad ;b/\ U_n = \frac{(-2)^n}{2^n} \quad ;\ c/\ U_n = \frac{2^{n+1}}{3^n} + \frac{2^n}{3^n} \quad ;\ d/ U_n = \frac{1}{2}(-1{,}2)^n$$

Remarque

Si la raison d'une suite géométrique est égale à 1 alors ses termes sont tous égaux. Une telle suite est constante.

III – Exploitation de la somme des premiers termes consécutifs d'une suite géométrique

Activité 1 :

On considère la suite (U_n) , définie pour tout entier n, par $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

1°) Pour tout entier non nul n, on pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ ...\ + \frac{1}{2^n}$

2°) Montrer que tout entier non nul n, $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$

3°) En utilisant la calculatrice, calculer S_{20} ; S_{50} ; S_{100} .

4°) Que peut-on dire de S_n , lorsque n tend vers l'infini?

On admet que si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$ alors pour tous réels a et b

$$\lim_{n \to +\infty} (\ aU_n + b\ ) = a\ \ell + b$$

Activité 2 :

U est la suite géométrique telle que $U_1 = 0{,}9$ et de raison $q = 10^{-1}$

1°) Calculer U_2 et U_3

2°) Soit le nombre $S_n = 0{,}999\ldots$, dont l'écriture décimale s'obtient comme il est indiqué en écrivant le chiffre 9, n fois. Exprimer S_n , en fonction de n.
Que peut-on dire de la limite de S_n ?

IV- Suites réccurentes

Activité 1 :

Une observation faite par un journal, sur ses abonnés, a permis de constater, pour chaque année, un taux de réabonnement voisin de 80 % ainsi que l'apparition d'environ 5000 nouveaux abonnés.
On suppose que la situation décrite par l'observation reste la même au fil des ans.
On note U_n le nombre des abonnés après n années et on précise que $U_0 = 10000$.

1°) Calculer U_1 et U_2 .

2°) Vérifier que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0,8U_n + 5000$.

3°) Places sur l'axe des abscisses U_0 , U_1, U_2 , U_3, U_4 et U_5 .

4°) Soit V la suite définie sur IN, par : $V_n = U_n - 25000$.

a/ Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n .

b/ Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

c/ Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = -15000 \times (0,8)^n + 25000$.

5°) En déduire la limite de U_n , lorsque n tend vers l'infini .

Définition

Une suite définie par son premier terme et par une relation entre deux termes consécutifs est appelée suite récurrente.

Activité 2 :

Soit la suite U définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = -1 \\ \text{Pour tout entier naturel n, } U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n + 1 \end{cases}$

On a donc $U_{n+1} = f(U_n)$ où f est la fonction affine $x \mapsto \dfrac{1}{2}x + 1$

1°) Placer dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points $A_n(n, U_n)$, n=0; 1; …4.

2°) La lecture graphique laisse prévoir que U converge vers un nombre. Lequel ?

3°) Soit la suite V définie sur IN par $V_n = U_n - 2$.

a/ Quelle est la nature de cette suite V ? Préciser sa raison ?

b/ Quelle est la limite de la suite V ?

c/ Exprimer U_n en fonction de V_n .

d/ Quelle est la limite de (U_n) ?

Activité 3 :

Bien souvent, la consommation d'un pays est fonction du revenu de l'année précédente.
Si on note C_n la consommation l'année n et Y_n le revenu l'année n,
on suppose que $C_n = 0{,}9 \times Y_{n-1} + 200$ pour $n \geq 1$.
0,9 est la propension marginale à consommer (90 % du revenu) et 200 la consommation incompressible.
En macroéconomie fermée, dans la théorie Keynésienne, le revenu l'année n est lié à la consommation par $Y_n = C_n + I$, où I est l'investissement, indépendant de l'année considérée.
Dans ce problème, On suppose que $I = 200$ et $Y_0 = 4500$.

1°) Montrer que $Y_n = 0{,}9\, Y_{n-1} + 300$.

2°) On considère la suite (Z_n) définie par $Z_n = Y_n - 3000$ . .

a/ Montrer que la suite (Z_n) est une suite géométrique, de premier terme $Z_0 = 1500$.

b/ En déduire l'expression de Z_n en fonction de n; puis Y_n en fonction de n.

c/ Déterminer la limite du revenu lorsque n tend vers $+\infty$.

Théorème (admis) :

Soit a un nombre réel non nul.

$$\therefore \text{ Si } \lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty \text{ alors } \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (aU_n + b) = +\infty & \text{si } a > 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (aU_n + b) = -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \text{ Si } \lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty \text{ alors } \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (aU_n + b) = -\infty & \text{si } a > 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (aU_n + b) = +\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$\therefore$ Si la suite (U_n) n'a pas de limite alors la suite $(a\,U_n + b)$, $a \neq 0$ n'a pas de limite.

Activité 4 :

On considère la suite (U_n) définie sur IN par $U_0 = -4$ et pour tout entier naturel n ,
$$U_{n+1} = \frac{5}{2} U_n - 3$$

1°) Déterminer le réel α tel que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n + \alpha$ soit une suite géométrique.

2°) Calculer, en fonction de n, V_n puis U_n .

3°) Déterminer la limite de V_n puis celle de U_n.

Activité 5 :

Soit les suites U et V définies pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = \dfrac{2}{3}U_n - 1; \quad V_n = 2U_n + 6 \end{cases}$$

1°) Montrer que la suite V est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison

2°) Déterminer la limite de V_n puis celle de U_n .

Les tableurs permettent d'obtenir aisément les termes d'une suite ainsi que leur représentation graphique.

Un exemple guidé

Considérons la suite arithmétique(U_n) de premier terme $U_0 = 5$ et de raison $r = 11$

1°) Affichage des termes successifs de la suite.

a/ Reproduire sur Excel la feuille de calcul suivante.

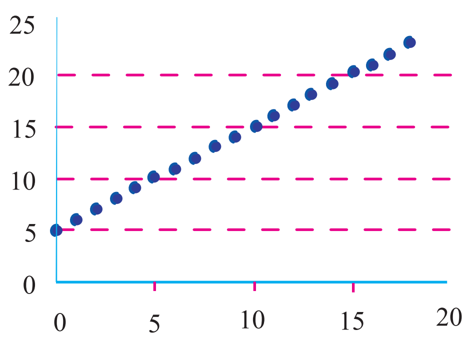
	A	B	C
1	Indice n	Suite (U_n)	
2	0	5	
3	=A2+1	=B 2+1	

La colonne A, affiche les valeurs prises par l'entier n.
La cellule A2 doit contenir le premier indice, donc taper 0 dans A2.
Dans A3 taper la formule "= A2+1 ".
La colonne B, affiche les valeurs prises par U_n .
La cellule B2 doit contenir U_0 , donc taper 5 dans B2.
Dans B3 taper la formule " = B2+11 ".

b/ Cliquer sur la cellule A3, une croix noire s'affiche au coin inférieur droit de cette cellule. Positionner le curseur sur cette croix et tirer vers le bas, jusqu'à atteindre la valeur désirée de n.
Procéder de la même façon avec B3.

2°) représentation graphique des premiers termes.

Sélectionner la page de cellule " A2 ; B20 ". A l'aide de l'assistant graphique  , construire les points correspondant au vingt premiers termes en utilisant le type " nuage de point ". Vous devez obtenir des points alignés régulièrement espacés.



(QCM)

Une seule des réponses proposées est correcte.

1°) la limite de la suite géométrique U définie sur IN par : $U_n = -5\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^n$

a/ est 0 ; **b/** est $+\infty$;
c/ est $-\infty$; **d/** n'existe pas.

2°) la limite de la suite géométrique U définie sur IN par : $U_n = 2\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}$

a/ est $-\infty$; **b/** n'existe pas.
c/ est 0 ; **d/** est $+\infty$.

3°) la limite de la suite géométrique U définie sur IN par: $U_n = -4\left(-\sqrt{2}\right)^n$

a/ n'existe pas. ; **b/** est 0 ;
c/ est $-\infty$; **d/** est $+\infty$.

4°) la limite de la suite géométrique U définie sur IN par : $U_n = -2\left(\dfrac{5}{3}\right)^n$

a/ n'existe pas. ; **b/** est 0 ;
c/ est $-\infty$; **d/** est $+\infty$.

5°) la limite de la suite arithmétique U définie sur IN par : $U_n = \dfrac{1-n}{2}$ est

a/ $\dfrac{1}{2}$; b/ $-\infty$; c/ $+\infty$

6°) la limite de la suite arithmétique U définie sur IN par : $U_n = \dfrac{3}{2}(n+1) - \dfrac{n}{2}$ est

a/ $\dfrac{3}{2}$; b/ $-\infty$; c/ $+\infty$

(Vrai ou faux)

Dites, en justifiant vos réponses, si les propositions sont vraies ou fausses

1°) Une suite qui n'est pas convergente a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$.

2°) Une suite arithmétique de raison positive diverge vers $+\infty$.

3°) Une suite géométrique de raison q , vérifiant $0 \le q \le 1$ converge vers 0.

4°) Une suite géométrique de raison r strictement supérieur à 1 diverge vers $+\infty$

1

Déterminer éventuellement les limites des suites de terme général :

a/ $U_n = 2^{-n}$; **b/** $U_n = 6 \times 3^{-n}$

c/ $U_n = (-1{,}6)^n$; **d/** $U_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 1$;

e/ $U_n = \dfrac{(0{,}03)^n - 1}{0{,}03}$; **f/** $U_n = 25(1.2)^n \times (0{,}8)^n$

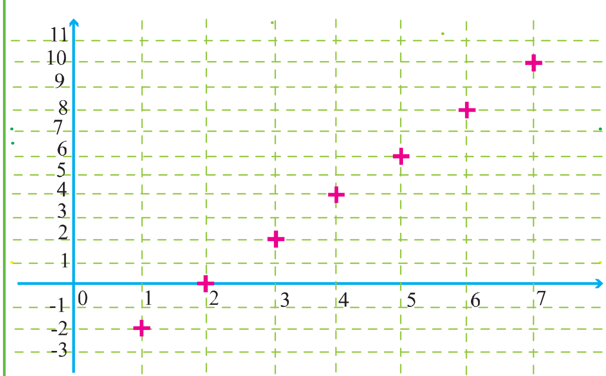
2

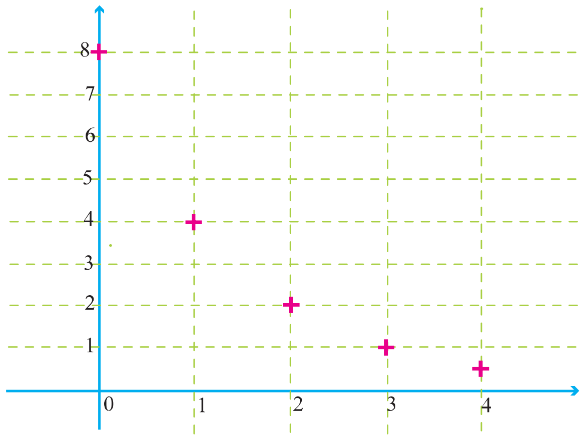
Dans chacun des cas suivants, on représente graphiquement les premiers termes d'une suite (U_n), arithmétique ou géométrique .

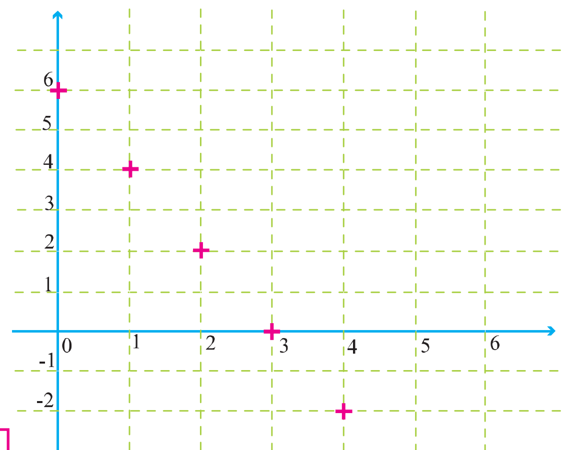
a/ Indiquer la nature de la suite et sa raison.

b/ Donner une expression de U_n en fonction de n.

c/ Déterminer éventuellement la limite de (U_n).







3

U est la suite géométrique telle que $U_1 = 0{,}227$

et de raison $q = 10^{-3}$.

1°) Calculer U_2 et U_3 .

2°) Exprimer en fonction de n la somme $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$

3°) Montrer que le réel $a = 0{,}227\ 227\ 277 \ldots$, dont l'écriture décimale s'obtient comme il est indiqué en écrivant indéfiniment le nombre 227, peut s'écrire sous la forme d'un quotient irréductible de deux nombres entiers que l'on déterminera.

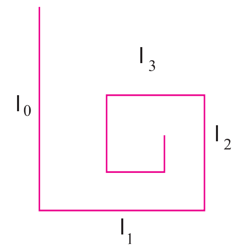
4

Quel est le 999$^{\text{iéme}}$ terme de la suite définie

$U_1 = 0$ et pour tout n de IN, $U_{n+1} = \dfrac{1}{2 - U_n}$?

5

La spirale ci-dessous est obtenue à l'aide de segments perpendiculaires tels que la longueur ℓ_n d'un segment est les $\frac{3}{4}$ de la longueur du segment précédent.



1°) Sachant que $\ell_0 = 4$, exprimer ℓ_n en fonction de n.

2°) a/ Déterminer la longueur L_n de la spirale en fonction de n.

b/ Quelle est la limite de la longueur de la spirale lorsque le nombre de segment devient infini ?

6

M^r X met 1000 DT sur un compte non rémunéré. Il dépose ensuite, chaque mois, 80 % du placement du mois précédent. On note a_n le placement fait par M^r X le mois n et C_n le solde du compte après le placement. Ainsi, $a_0 = 1000 = C_0$, $C_1 = a_0 + a_1$, etc.

1°) Calculera a_1, a_2 ; puis exprimer a_n en fonction de n.

2°) a/ Calculer C_1, C_2 et C_3 ; puis exprimer C_n en fonction de n.

b/ Déterminer la limite de la suite (C_n) en $+\infty$.

7

Une enquête est faite dans un supermarché pour étudier la plus ou moins grande fidélité des clients.
Au cours du premier mois de l'enquête, 8000 personnes sont venues faire leurs achats dans ce supermarché. On constate que, chaque mois, 70 % des clients du mois précédent restent fidèles à ce supermarché et que 3000 nouveaux clients apparaissent.
On note U_n le nombre de clients venus au cours du $n^{\text{iéme}}$ mois de l'enquête.
Ainsi $U_1 = 8000$.

1°)a/ Calculer U_2 et U_3 .

b/ Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n , on a $U_{n+1} = 0{,}7\, U_n + 3000$.

2°) On considère la suite V définie, pour tout entier naturel n ($n > 0$), par $V_n = 10000 - U_n$.
En exprimant V_{n+1} en fonction de V_n , montrer que la suite V est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

3°) Exprimer V_n, puis U_n en fonction de n.

4°)a/Quelle est la limite de la suite U.

b/Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le plus petit entier n tel que $U_n > 9900$.

c/Interpréter les résultats précédents en termes de nombre de clients du supermarché.

8

a est le nombre qui dans le système décimal s'écrit a = 3,2 47 47 47 ……47 …dans lequel, à partir du 2 éme chiffre après la virgule, apparaissent alternativement les chiffres 4 et 7 (et aucun autre) qui se répètent indéfiniment.

On pose $a_0 = 3{,}2$; $a_1 = 3{,}247$ et de manière générale

$$a_n = 3{,}2\underbrace{47\,47\ldots\ldots47}_{\text{n fois le nombre 47}}$$

1°) Vérifier que pour tout entier naturel non nul n,

$$a_n = \frac{1}{10}\left[32 + \frac{47}{100} + \ldots\ldots + \frac{47}{100^n}\right]$$

2°) Exprimer a_n explicitement en fonction de n.

3°) Etudier la limite de la suite (a_n).

4°) Ecrire a sous forme fractionnaire.

9

On considère la suite récurrente $(U_n)_{n\in IN}$ définie par $U_0 = 3$ et pour tout entier naturel n ,

$4\,U_{n+1} = U_n + 12$.

1°) Calculer U_1 , U_2 et U_3 .

2°) On pose pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - 4$.

Montrer que la suite (V_n) est géométrique.

3°) Calculer U_n en fonction de n, et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

10

La suite U définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ,$3U_{n+1} - 4U_n = 0$ est elle convergente ?

Suite de Robinson

Définition

Le premier terme de la suite de Robinson est posé égal à 0. Chaque terme de la suite se construit ensuite en comptant le nombre d'apparitions des différents chiffres de 9 à 0 (dans cet ordre) dans le terme précédent.
Si un chiffre n'apparaît pas, il n'est pas pris en compte.

Concrètement :

$U_0 = 0$

Ce terme comporte juste un " 0 ". Par conséquent, le terme suivant est :

$U_1 = 10$

Celui-ci est composé d'un " 1 " et d'un " 0 "

$U_2 = 1110$

En poursuivant le procédé :

$U_3 = 3110$

$U_4 = 132110$

$U_5 = 13123110$ (En effet U_4 est composé d'un "3" ; d'un "2" ; de trois fois "1" et d'un "0")

$U_6 = 23124110$

$U_7 = 1413223110$

$U_8 = 1423224110$

$U_9 = 2413323110$

$U_{10} = 1433223110$

$U_{11} = 1433223110$

Déterminer U_{12} et U_{13} . Quelle conjecture peut-on faire ?

Propriétés

On constate qu'a partir du 11^e terme de la suite, tous les termes sont égaux à 1433223110. Si le terme initial est choisi entre 1 et 39, la suite atteint également une valeur constante au bout d'un certain nombre de termes. Si , au bout du 10^e terme, la suite oscille entre les valeurs 152423224110 et 152413423110.
Pour $U_0 = 50$, la suite finit par osciller entre les valeurs 16251423225110, 16251413424110 et 16153413225110.
IL a été montré qu'à partir de toute valeur initiale, la suite finit soit par être constante, soit osciller entre deux ou trois valeurs.

les hommes passent mais leurs oeuvres restent
AUGUSTUN -LOUIS GAUCHY

Chapitre 3

DÉNOMBREMENT

POUR COMMENCER

Activité 1 :

On considère un tableau à quatre cases alignées numérotées de 1 à 4 et qui sont de couleurs distinctes : bleu, jaune, rouge, verte.

1	2	3	4

1°) Donner un tableau vérifiant la condition suivante
- la case 1 est verte et la case 4 est rouge.

2°) Donner un tableau vérifiant la condition suivante
- la case 2 est à coté de la case rouge et la case 4 est verte.

3°) Donner un tableau vérifiant les conditions suivantes
- la case 3 est jaune et la case 4 est bleu,
- si la case 1 est verte alors la case 2 est rouge.

Activité 2 :

Une enquête est réalisée auprès de 1000 personnes. Parmi elles, 40% sont fumeurs, 4% souffrent de bronchites, et 75% des personnes atteints de bronchites sont des fumeurs.
Compléter le tableau suivant :

	Personnes atteintes de bronchites	Personnes non atteites de bronchites	Totaux
Fumeur			
Non fumeur			
Totaux			1000

Activité 3 :

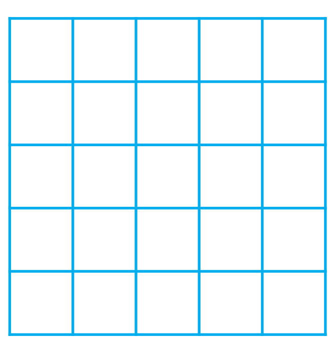
Dans un foyer universitaire hébergeant 80 étudiants, 55 étudiants pratiquent la natation, 33 le tennis, et 16 étudiants ne pratiquent aucun de ces deux sports.
Combien d'étudiants pratiquent à la fois le tennis et la natation ?

Activité 4 :

Dans un péage automatique on n'accepte que les pièces de 100 millimes, 500 millimes et de 1 dinar et on ne rend pas la monnaie.
De combien de manières possibles peut-on acquitter un péage de 1600 millimes ?

Activité 5 :

Combien de carrés comporte cette figure ?



Activité 6 :

On joint l'origine du repère O au point de coordonnées (38 , 57). Par combien de points dont les deux coordonnées sont entières le segment [OA]passe –t-il ?
Donner les coordonnées de ces points.

Activité 7 :

Le code qui permet à M^{r} X de pénétrer à son immeuble est composé de quatre chiffres.

M^{r} X l'a oublié mais il se rappelle que le nombre formé par le code est divisible par 5 et 9 et ses deux chiffres du milieu sont identiques.

Combien de codes au plus M^{r} X doit il faire pour être certain d'ouvrir la porte?

I – Cardinal d' un ensemble fini

Activité 1 :

1°) Déterminer le nombre d'éléments de l'ensemble des entiers naturels pairs et inférieurs à 100.

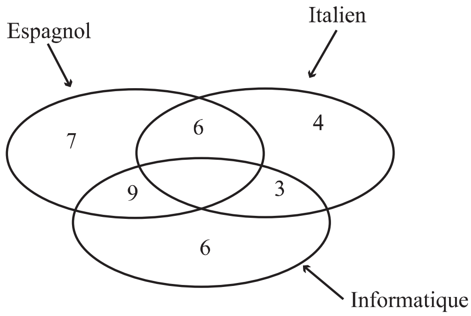
2°) Déterminer le nombre d'éléments de l'ensemble des entiers naturels impairs et inférieurs à 100.

Vocabulaire et notation

Un ensemble qui a un nombre fini d'éléments est dit fini
Lorsqu'un ensemble E a n éléments, on dit que son cardinal est n.
On note alors card E = n.
Un ensemble qui a zéro éléments, est appelé l'ensemble vide et est noté $\varnothing$

Activité 2 :

Trois options sont offertes aux élèves d'une classe : espagnol, italien, informatique. Chaque élève choisit une ou deux options. Le schéma ci-dessous indique le nombre d'élèves pour chaque combinaison d'options possible.



Quel est le nombre d'élèves qui étudient :

a/ L'espagnol,
b/ Uniquement l'espagnol,
c/ L'espagnol et l'italien,
d/ L'espagnol ou l'italien,
e/ Uniquement une des deux langues ; espagnol ou italien (ils peuvent éventuellement font aussi l'informatique),
f/ Une seule des trois options.

Définition

Soit A et B deux ensembles finis.
Leur intersection $A \cap B$,qui se lit « A inter B », est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.
Les ensembles A et B sont dits disjoints lorsqu'ils n'ont aucun élément en comun.
A et B sont disjoints équivaut à $A \cap B = \varnothing$

Activité 3 :

On désigne par C l'ensemble des diviseurs de 15,
D l'ensemble des diviseurs de 8 et E l'ensemble des diviseurs de 12.

1°) Déterminer card($C \cap D$) ; card($E \cap D$) ; card($C \cap E$).

2°) Déterminer card($C \cup D$) ; card($E \cup D$) ; card($C \cup E$).

3°) **a/** Ecrire card ($C \cup D$) en fonction de ceux de C, D et ($C \cap D$) .
b/ Même question pour card ($E \cup D$)et card ($C \cup E$) .

Définition

Soit A et B deux ensembles finis.
Leur réunion $A \cup B$, qui se lit « A union B », est l'ensemble dont les éléments appartiennent à A ou à B.
Si A et B sont disjoints, alors card ($A \cup B$) = card(A) + card(B)
Si A et B ne sont pas disjoints, alors

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) .$$

Activité 4 :

Combien y a-t-il d'entiers naturels multiple de 2 ou de 3 inférieur à 301 ?

Activité 5 :

1°) Déterminer l'ensemble E des diviseurs de 36.
2°) Déterminer l'ensemble A des éléments de E,qui sont impairs.
3°) Déterminer l'ensemble $\overline{A}$ des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

Activité 6 :

On considère l'ensemble E et deux parties A et B de E, tels que
$E = \{(1;1); (1;2); (1;3); (2;3)\}$
$A = \{(1;2)\}$
$B = \{(1;1); \quad (1;3)\}$

- Déterminer les ensembles $\overline{A}$, $A \cup B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$.

-Donner leurs cardinaux respectifs .

Définition et théoréme

Soit E un ensemble fini, de cardinal n et A une partie de E.
Le complémentaire $\overline{A}$ de A dans E est l'ensemble des élments de E qui n'appartiennent pas à A.
On a alors $A \cup \overline{A} = E$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$; card($\overline{A}$)= n - card(A)

II – Produit cartésien d'ensembles finis

Activité 1 :

Un grand magasin enquête auprès de ses clients. Deux questions leur sont posées :

Question 1	Question 2
En général vous venez dans ce magasin - au plus une fois (1) - deux fois (2) - au moins trois fois (3)	Vous venez - à pied (P) - en prenant un moyen de transport (T)

1°) En utilisant un arbre de choix déterminer le nombre total des réponses possibles aux deux questions proposées.
2°) Quel serait le nombre de réponses possibles si la première question comportait quatre choix de réponses.

Activité 2 :

Au libre – service d'un restaurant universitaire, on offre3 entrées (soupe ou salade ou pâté), 2 plats (viande ou poisson) et 4 desserts (orange ou pomme ou fromage ou gâteau).Quel est le nombre de repas possibles constitués d'une entrée d'un plat et et d'un dessert?

Définition

Le produit cartésien E x F, se lit « E croix F », est l'ensemble des couples(x, y) tels que x appartient à E et y appartient à F.
On a si E et F sont des ensembles finis alors card(E xF) = card (E) x card (F) .

Activité 3 :

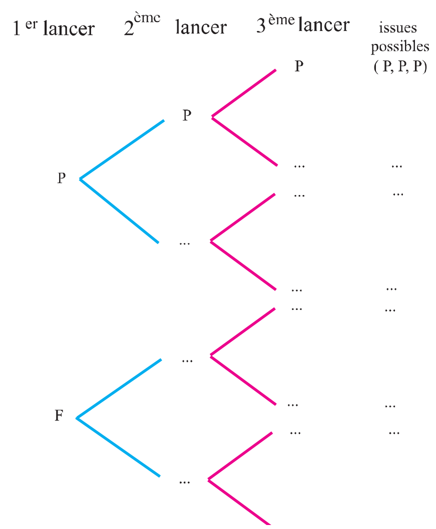
On désigne par E l'ensemble des entiers naturels non nuls, inférieurs ou égaux à 6 et par F l'ensemble des entiers négatifs non nuls supérieurs ou égaux à –6.Déterminer le cardinal de l'ensemble E x F .

Activité 4 :

On lance une pièce de monnaie, le résultat est soit pile (noté P) soit face (noté F).
1°) On lance la pièce deux fois. On modélise une issue par le couple (a, b) où a et b appartiennent à $\{P, F\}$
a/ Combien a-t-on d'issues possibles ?
b/ Déterminer les issues où figure une seule fois face. Combien y en a –t-il ?
c/ Déterminer les issues où figure une seule fois pile. Combien y en a –t-il ?
d/ Déterminer les issues où ne figure aucune fois pile. Combien y en a –t-il ?

2°) On lance la pièce trois fois.
On modélise une issue par le triplet (a, b, c) où a,b et c appartiennent à $\{P, F\}$.

a/ Compléter l'arbre de choix ci-contre.
b/ Combien a-t-on d'issues possibles ?
c/ Dans combien d'issues figure une seule fois face ?
d/ Dans combien d'issues figure trois fois pile ?
e/ Dans combien d'issues figure aucune fois face



Activité 5 :

Dans une urne, il y a trois boules portant respectivement les lettres A, I et L.
On tire une boule et on note la lettre puis on la remet dans l'urne.

1°) On effectue cette opération trois fois, on obtient alors un triplet.
Combien a-t-on de triplets possibles ?

2°) On effectue cette opération dix fois, on obtient alors un dix-uplet.
Combien a-t-on de dix-uplets possibles ?

Définition et théorème

Soit E un ensemble non vide et fini.
Le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{\text{p fois}}$ est l'ensemble des p-uplets $(x_1, x_2, \ldots x_p)$ tels que x_i appartient à E .
On le note E^p et on a $\text{card}(E^p) = (\text{card}(E))^p$.

Activité 6 :

En informatique un « bit » (binary digit) vaut soit 0 soit 1, un « octet » est une succession de huit bits (exemple : 00011001).

1°) Combien existe-t-il d'octets possibles ?
2°) Combien existe-t-il d'octets possibles commençant par 1 ?
3°) Combien existe-t-il d'octets possibles commençant par 0 ?
4°) Combien existe-t-il d'octets possibles commençant par 00 ?

Activité 7 :

On veut ranger, cinq objets discernables notés 1 ,2 , 3 , 4 , 5 dans trois tiroirs notés A , B , C.

1°) Combien de rangements différents peut-on réaliser ?
2°) Combien de rangements où l'objet 1 est placé dans le tiroir A ?
3°) a/ Combien de rangements sont effectués dans un tiroir seulement.
b/ Combien de rangements sont effectués dans deux tiroirs.

Activité 8 :

Dans le jeu de promosport, le parieur doit remplir une grille où il indique les résultats qu'il prévoit pour treize matchs futurs de football.
Pour chacun des treize matchs, trois réponses sont possibles :
l'équipe 1 est annoncée comme gagnante (réponse " 1"); le résultat prévu est un match nul (réponse " x"); l'équipe 2 est annoncée comme gagnante (réponse "2"). Ces trois réponses recouvrent toutes les éventualités et, à l'issue du match, une et une seule se trouvera réalisée.
Extrait de grille :

	Equipe 1	Equipe 2			
1	ESBKhalled	SSfaxien	1	x	2
2	AGabes	OBéja	1	x	2
12	SSZarzouna	ASDjerba	1	x	2
13	ASKasserine	COMédenine	1	x	2

La règle du jeu est la suivante : sur chacune des treize lignes, le parieur coche une et une seule des trois cases | 1 | x | 2 | correspondant au résultat prévu.

C'est ce que on appelle remplir la grille.

1°) De combien de façons différentes peut-on remplir une grille ?

2°) Dénombrer les grilles pour lesquelles, à l'issue des matchs :

a/ toutes les réponses sont exactes;

b/ toutes les réponses sont fausses;

c/ les trois premières réponses sont fausses, les dix autres sont exactes.

Activité 9 :

La porte d'entrée d'un immeuble est commandée par un code d'accès composé d'une lettre suivie de trois chiffres.
On dispose d'un clavier comportant les lettres A, B et C, et les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

1°) Combien de codes peut-on proposer ?

2°) Combien de codes commençant par la lettre A , peut-on proposer ?

3°) Combien de codes commençant par B9 , peut-on proposer ?

4°) Combien de codes comportant trois chiffres distincts, peut-on proposer ?

III– Permutations

Activité 1 :

Trois amis se photographient en changeant de places (un au milieu, un à sa droite et l'autre à sa gauche). De combien de façons différentes peuvent ils se placer pour la photo ?

Activité 2 :

On dispose d'une urne contenant quatre jetons de couleurs différentes : blanc (b), jaune (j), rouge (r), vert (v).On tire successivement l'un après l'autre les quatre jetons. On modélise une issue par un quadruplet.

a/ le quadruplet (b , j , b , r) convient-il ?

b/ Déterminer le nombre de tirages possibles.

Activité 3 :

1°) On appelle anagramme du mot MAI tout mot (ayant un sens ou non) formé des trois lettres M, A et I.Combien y a-t-il d'anagrammes du mot MAI ?

2°) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot NATUREL ?

Activité 4 :

Huit personnes choisissent un nombre compris entre 1 et 8.
Combien y-a-t-il de choix distincts possibles ?

Définition

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n .
On appelle permutation des n éléments de E tout n-uplet d'éléments distincts de E.

Activité 5 :

Montrer la propriété suivante

Le nombre de permutations des n éléments de E est égal à n x (n-1)x …x 1.

Notation

Soit un entier naturel n non nul.
On appelle factorielle de n et on note n !, l'entier 1 x 2 x …x n
On convient que 0 !=1.

Activité 6 :

1°) Calculer 4!; 5!; 6!; 7!; 8!.

2°) Calculer $\frac{5!}{3!}$; $\frac{5!}{8!}$; $\frac{125!}{123!}$; $\frac{104!}{99!}$

3°) Soit un entier naturel $n \geq 3$.

Simplifier les écritures $\frac{n!}{(n-1)!}$, $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ et $\frac{(n-2)!}{n!}$.

Activité 7 :

La fabrication d'une pièce nécessite de passer sur quatre machines A, B, C, D. Dénombrer les trajets possibles dans chacun des cas suivants :

1°) L'ordre de passage est indifférent.
2°) La pièce doit passer d'abord par la machine A.
3°) La pièce doit passer en B avant C et D.

Activité 8 :

Un enfant dispose de 5 crayons de couleurs pour colorier un dessin composé de cinq zones. Il désire que les cinq zones soient de couleurs différentes. Dénombrer toutes les colorations possibles.

1	2	3	4	5

IV- Arrangements

Activité 1 :

On veut former des mots à deux lettres distinctes, avec les lettres A, B, C, D, E et F.
A l'aide d'un arbre de choix, déterminer le nombre de mots possibles.

Activité 2 :

Un parking comporte dix places libres repérées par les numéros 1 à 10.
De combien de façons peut-on garer :

1°) une voiture?
2°) deux voitures?
3°) trois voitures?
4°) neuf voitures?
5°) dix voitures?

Définition

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$ .On appelle arrangement de p éléments de E tout p-uplet d'éléments distincts de E.

Activité 3 :

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$.

1°) Montrer que le nombre d'arrangements de p éléments de E est égal au produit $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$.

2°) Montrer alors que $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

Théorème :

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier naturel tel que $1 \leq p \leq n$.
Le nombre d'arrangements de p éléments de E est l'entier noté A_n^p et tel que

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

On convient que $A_n^0 = 1$.

Activité 4 :

Une association comporte 50 membres. On doit élire un bureau composé de quatre membres (un président, un vice-président, un secrétaire et un trésorier).
Combien y a –t-il de bureaux possibles ?

Activité 5 :

Un sac contient six jetons numérotés de 10 à 15.
On tire successivement trois jetons, sans les remettre dans le sac.
Déterminer le nombre de tirages possibles.

Activité 6 :

Dans un sac se trouvent cinq jetons verts numérotés de 1 à 5 et quatre jetons rouges numérotés de 1 à 4. On tire successivement et sans remise trois jetons dans le sac.

1°) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

2°) Combien y a-t-il de tirages possibles :

a/ ne contenant que des jetons verts,

b/ ne contenant aucun jeton vert,

c/ contenant deux jetons verts et un jeton rouge ,

d/ contenant au plus deux jetons verts.

V– Combinaisons

Activité 1 :

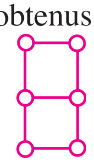
On considère l'ensemble $E = \{a,b,c,d\}$ et n un entier tel que $1 \leq n \leq 4$.

1°) Dénombrer le nombre de parties à un élément, le nombre de parties à trois éléments, le nombre de parties à quatre éléments.

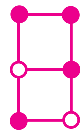
2°) On convient que la seule partie de E à zéro éléments est la partie vide et on note P(E) l'ensemble de toutes les parties de E. Déterminer card(P(E)).

Activité 2 :

Un caractère de l'écriture Braille destiné aux aveugles est formé de points obtenus en piquant la feuille de papier à travers au moins un des six trous de la grille ci contre



Exemple :
Caractère Braille représentant la lettre M



1°)Dénombrer les caractères Braille formé de quatre points.
2°) Combien de caractères Braille peut-on former ?

Définition

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$. On appelle combinaison de p éléments de E, toute partie à p élments distincts de E.

Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est noté C_n^p, (on lit « C, n, p »), ou $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$

Activité 3 :

Soit n un entier naturel .

1°) Vérifier que $C_0^0 = 1$ et que $C_n^0 =$

On suppose que $n \geq 1$.

2°) Vérifier que $C_n^1 = n$ et $C_n^n = 1$.

3°) Montrer que $C_n^{n-1} = n$.

Activité 4 :

1°) On veut écrire un mot de dix lettres et on dispose de trois fois la lettre a et sept fois la lettre b.

On commence par mettre les a, en choisissant trois cases parmi les dix. On place ensuite les b.
Le nombre de mots est donc C_{10}^3 .
Qu'obtient-on en commençant cette fois par mettre les b ?
2°) Soit E un ensemble fini de cardinal n et p tels que $0 \leq p \leq n$.
a/ Vérifier que choisir une partie à p éléments de E revient à choisir une partie à (n – p) éléments.
b/ En déduire que $C_n^{n-p} = C_n^p$.

Activité 5 :

Au jeu de loto, on tire chaque semaine six nombres distincts parmi les entiers compris entre 1 et 49.
On désigne par « résultats » l'ensemble des six nombres tirés.
On se propose de déterminer le nombre de résultats possibles.
1°) On appelle tirage un arrangement de six nombres parmi les quarante neuf nombres.
Combien y a-t-il de tirages au loto ?
2°) On a effectué le tirage (21, 10, 7, 43, 2, 29).
Combien y a-t-il de permutations de l'ensemble de ces six nombres ?
3°) Combien de tirages conduisent au même ensemble de nombres tirés ?
4°) Combien y a-t-il de résultats possibles au loto ?

Théorème :

Soit n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$, on a $C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$

Activité 6 :

Un groupe de 8 élèves, composé de cinq filles et trois garçons.
On choisit au hasard trois élèves . Quel est le nombre de formations comprenant
a/ trois garçons?
b/ au moins une fille?
c/ exactement deux filles?

Activité 7 :

Une urne contient trois boules blanches et cinq boules noires.
On tire simultanément quatre boules de l'urne.
1°) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2°) Combien y a-t-il de tirages qui contiennent :
a/ Une seule boule blanche?
b/ deux boules blanches?
c/ trois boules blanches?
d/ quatre boules blanches?
e/ au moins une boule blanche?
f/ quatre boules noires?
g/ deux boules noires?

Activité 8 :

Soit deux entiers n et p tels que $1 \leq p \leq n-1$.

1°) Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n.
Soit e un élément de E.

a/ Quel est le nombre de parties de E à p éléments ?
b/ Dénombrer les parties à p éléments de E qui contiennent e.
c/ Dénombrer les parties à p éléments de E qui ne contiennent pas e.
d/ En déduire que $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

2°) La formule $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ permet de calculer de proche en proche les nombres .
En effet si on place dans un tableau à la n-ème ligne et p-ème colonne le nombre C_n^p, (voir schéma ci contre, on obtient un tableau appelé triangle de Pascal).

	p - 1	p
n - 1	C_{n-1}^{p-1}	
n		$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

Compléter le triangle de Pascal pour n = 6 représenté ci-dessous.

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	...	...	...		
5	...	...	...	...	...	...	
6	...	...	...	...	...	...	...

VI–Le principe de récurrence.

Activité 1 :

Soit A un ensemble d'entiers naturels vérifiant les hypothèses suivantes

- 1 appartient à A,
- si n appartient à A alors n –1 appartient à A,
- si n appartient à A alors 2n appartient à A.

Montrer que 10 appartient à A, 100 appartient à A.

Activité 2 :

Soit A un ensemble d'entiers naturels vérifiant les hypothèses suivantes

- 0 appartient à A,
- si n appartient à A alors n +1 appartient à A,

1°) Montrer que 10 appartient à A, 100 appartient à A, 1000 appartient à A.
2°) On se propose de déterminer l'ensemble A.

a/ Supposons qu'il existe des entiers naturels n qui n'appartiennent pas à Aet soit q le plus petit de ces entiers.Que peut-on dire de q-1 ?
b/ Conclure.

Principe de récurrence

Soit n_0 un entier naturel et P_n une propriété dépendant d'un entier naturel n supérieur ou égal à n_0 .

Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

∴ P_{n_0} est vraie,

∴ si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie,

alors P_n est vraie pour tout n supérieur ou égal à n_0 .

Activité 3 :

En utilisant le principe de récurrence, établir les formules suivantes

1°) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, pour tout entier naturel $n \geq 1$.

2°) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4}\left(n(n+1)\right)^2$, pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Activité 4 :

Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $4^n - 1$ est divisible par 3.

VII- Le Binôme de Newton

Activité 1 :

1°) Soit a et b deux réels.

a/ Développer $(a+b)^3$.

b/ Vérifier que $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b^1 + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^3$

2°) A l'aide du triangle de Pascal développer :

a/ $(a+b)^3$,

b/ $(a+b)^5$,

c/ $(a+b)^6$,

3°) Soit x un réel, développer $(x+1)^6$,$(x-1)^5$.

Binôme de Newton

Soit a et b deux réels.

Pour tout entier naturel non nul n on a,

$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^n a^0 b^n$.

Activité 2 :

1°) Soit n un entier naturel non nul.

a/ Développer $(2+1)^n$.

b/ En déduire $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + ... + 2^n C_n^n$.

2°) Soit un entier pair $n \geq 2$.

a/ Développer $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$.

b/ En déduire que les nombres $\left[C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... + C_n^n\right]$ et $\left[C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... + C_n^{n-1}\right]$ sont égaux et donner leur valeur commune.

Activité 3 :

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n

1°) Montrer que le nombre de toutes les parties de E est égal à $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n$.

2°) En déduire que le nombre de toutes les parties de E est égal à 2^n .

Activité 4 :

Une association culturelle propose à ses adhérents six activités diverses.
De combien de façons différentes, un adhérent peut-il choisir ses activités ?

Soit U et V deux suites définies sur IN par : $U_n = 2n$ et $V_n = 100\,n$.

1°) a/ Reproduire sur Excel la feuille de calcul suivante.

	A	B	C
1	n	U_n	V_n
2	0	1	0
3	= A2+1	=B2 ^ 2	=C2 + 100

La colonne A, affiche les valeurs prises par l'entier n.
La cellule A2 doit contenir le premier indice, donc taper 0 dans A2.
Dans A3 taper la formule "= A2 + 1 ".
La colonne B, affiche les valeurs prises par U_n .
La cellule B2 doit contenir U_0 , donc taper 1 dans B2.
Dans B3 taper la formule " = B2 ^ 2 ".
La colonne C, affiche les valeurs prises parV_n .
La cellule C2 doit contenir V_0, donc taper 0 dans B2.
Dans C3 taper la formule " = C2 + 100 ".

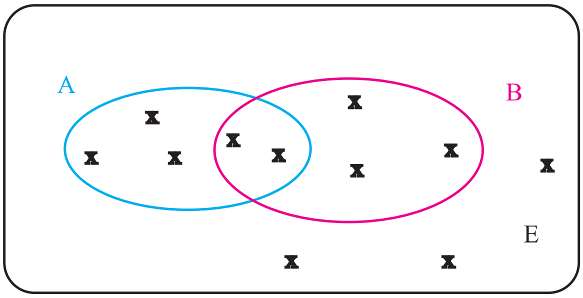
b/ Cliquer sur la cellule A3, une croix noire s'affiche au coin inférieur droit de cette cellule. Positionner le curseur sur cette croix et tirer vers le bas, jusqu'à atteindre la valeur désirée de n ; ($n > 10$)
Procéder de la même façon avec B3 et C3.

c/ Conjecturer pour tout $n > 10$, le lien entre U_n et V_n .

2°) Démontrer par récurrence la conjecture émise au **1°) c/** .

1

On a représenté sur le diagramme ci-dessous un ensemble E et deux de ses sous- ensembles A et B (chaque élément de E est représenté par une croix).



1°) Déterminer card(A), card(B), card($A \cap B$), card($A \cup B$), card(E).

2°) quelle égalité lie les quatre premiers nombres ?

2

Dans une classe , on sait que les $\frac{2}{5}$ aiment les fraises, $\frac{2}{3}$ aiment les poires, $\frac{1}{5}$ aiment les deux.

De combien de personnes est constituée la classe?

3

Le nombre de k-uplets d'éléments distincts ou non, dans un ensemble à p éléments

a/ est égal à k^p

b/ est égal à p^k

4

Cocher la réponse correcte.

Quatre poètes et trois compositeurs veulent s'asseoir sur un banc. Le nombre de manières de les disposer sachant que

les poètes sont assis les uns à côté des autres ainsi que les compositeurs est : 2!x 4! x 3! = 288	oui	non

il n'y a pas de poètes à côté l'un de l'autre ni de compsiteurs à côté l'un de l'autre est	288	144

5

Mounir a six paires de chaussettes de couleurs différentes. Il veut mettre deux chaussettes de couleurs différentes combien de choix possibles a-t-il ?

6

Rami possède une boite de jetons qu'il peut ranger suivant la couleur (rouge, blanc, bleu); la forme (ronde, carrée, triangulaire); la taille (petite, grande).

Toutes les possibilités sont représentées une seule fois ainsi il n'y a par exemple qu'un seul jeton blanc, triangulaire et petit.

1°) Déterminer le nombre de jetons dans la boite.

2°) L'enfant prend simultanément quatre jetons. Quel est le nombre de tirages possibles avec :

a/ "quatre jetons ronds".

b/ "quatre jetons de couleurs deux à deux différentes".

c/ "deux petits jetons et deux grands jetons".

d/ "au moins un jeton bleu".

e/ "un seul jeton petit et rond".

7

Un touriste veut visiter les cinq villes suivantes :
Bizerte , Nabeul , Sousse , Sfax , Tozeur

1°) Combien de voyages peut il réaliser ?

2°) Combien de voyages peut il réaliser s'il doit commencer par Tozeur et finir par Bizerte ?

3°) Combien de voyages peut il réaliser s'il doit visiter Nabeul avant Sfax ?

8

Une société vend une série de 50 fiches de cuisine à mettre dans une boîte classeur. Sachant qu'il y a 10 fiches roses "dessert", 10 fiches bleues "poissons", 10 fiches rouges " viandes", 10 fiches vertes "légumes", 10 fiches jaunes "entrées".

Déterminer le nombre de manières de ranger les fiches dans la boîte classeur, en laissant groupées les fiches d'une même couleur.

9

Soit n un entier supérieur ou égal à 4. On appelle diagonale d'un polygone convexe à n côtés, tout segment joignant deux sommets non consécutifs.

1°) Montrer que le nombre de diagonales est $\frac{n(n-3)}{2}$

2°) Quelle figure comporte 65 diagonales ?

10

Une urne contient n jetons blancs et n jetons noirs. On extrait n simultanément.

1°) Combien de tirages peut-on obtenir ?

2°) Soit p un entier naturel vérifiant $0 \leq p \leq n$.

a/ Démontrer que le nombre de tirages ne comportant pas de jetons blancs est $\left(C_n^0\right)^2$.

b/ Démontrer que le nombre de tirages comportant un seul jeton blanc est $\left(C_n^1\right)^2$.

c/ Démontrer que le nombre de tirages comportant exactement deux jetons blancs est $\left(C_n^2\right)^2$.

d/ Démontrer que le nombre de tirages comportant exactement p jetons blancs est $\left(C_n^p\right)^2$.

e/ Calculer $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2$.

11

A l'occasion de l'Aïd quinze personnes se sont rencontrées. Chacune d'elles serre la main à chacune des autres. Quel est le nombre total de poignées de mains échangées ?

12

Une urne contient 5 boules rouges, 4 noires, 3 vertes. On tire trois boules dans cette urne, successivement, en remettant chaque boule tirée dans l'urne avant de prendre la suivante.

1°) Quel est le nombre de tirages possibles ?

2°) Quel est le nombre de tirages où l'on obtient :

a/ trois boules rouges.

b/ deux boules rouges exactement.

c/ au moins une boule rouge.

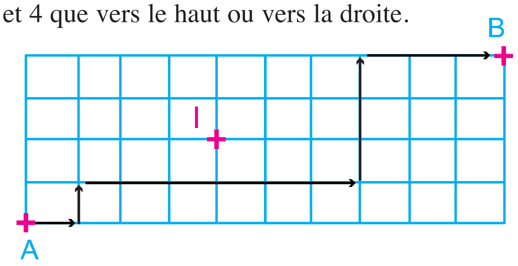
d/ deux boules vertes et une noire.

e/ deux boules de même couleur.

f/ trois boules de trois couleurs différentes.

13

On ne peut se déplacer sur un réseau quadrillé de côtés 10 et 4 que vers le haut ou vers la droite.



1°) Montrer que le nombre de chemins qui mènent du point A au point B est 1001.

2°) Montrer que le nombre de chemins qui mènent du point A au point B en passant par le point I est 420.

3°) Quel est le nombre de chemins qui mènent du point A au point B sans passer par le point I ?

14

On tire trois cartes au hasard et simultanément d'un jeu de 40 cartes, bien battu.

(On rappelle qu'il y a 10 cartes de cœur, 10 cartes de trèfle, 10 de carreau et 10 de pique, ayant pour valeur : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; Dame ; Valet ; Roi).

Quel est le nombre de façons

a/ d'obtenir trois cartes trèfles?

b/ de ne tirer aucune carte cœur?

c/ d'obtenir au plus deux cartes cœurs?

d/ de tirer au moins un cœur ou un pique?

15

On extrait 5 cartes d'un jeu de 40 cartes (on constitue ainsi ce qu'il est usuel d'appeler " main de 5 cartes ").

1°) Combien y a-t-il de mains de 5 cartes possibles ?

2°) Combien de mains de 5 cartes contiennent l'as de pique ?

3°) Dénombrer les mains de 5 cartes ne contenant aucun as et en déduire celles contenant au moins un as.

16

On considère un jeu de 40 cartes. On prend simultanément et au hasard cinq cartes.

Déterminer le cardinal de chacun des ensembles suivants :

A : " obtenir cinq cartes trèfles ".

B : " obtenir cinq cartes dont une seulement est Dame ".

C : obtenir au moins deux Dames ".

D : "n'obtenir aucune Dame ".

17

D'un jeu de 40 cartes on enlève les figures puis on tire simultanément trois cartes. Dénombrer les possibilités telles que :

a/ les cartes tirées portent les numéros 4; 5; 6.

b/ les cartes tirées portent trois numéros consécutifs.

c/ parmi les cartes tirées figure un seul 7 rouge et un seul As noir.

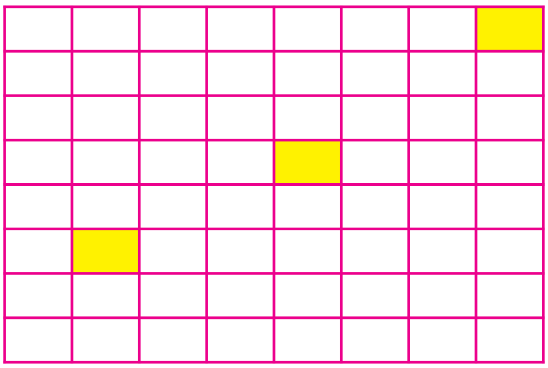
18

1°) Montrer que pour tout entier naturel n et p tels que $1 \leq p \leq n : A_n^p = nA_{n-1}^{p-1}$

2°) Résoudre dans IN l'équation $A_n^4 = 42A_n^2$

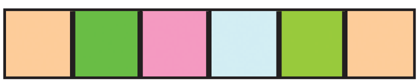
19

De combien de manières peut-on compléter (en coliriant) le quadrillages ci-dessous sachant qu'il doit y avoir un carreau colorié et un seul sur chaque ligne et chaque colone ?



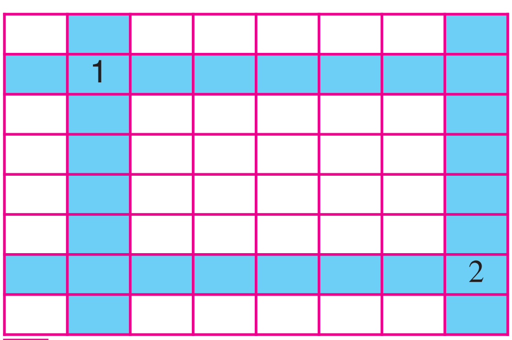
20

On utilise cinq couleurs différentes pour colirier le drâpeau dessiné ci-dessous, deux zones voisines ne pouvant recevoir la même couleur.
Montrer que le nombre de coloriages possibles est 1200.



21

Lorsqu'on place le pion 1 dans le quadrillage ci-dessous, on colorie la colonne et la rangée qui le contiennent.
On place alors le pion 2 sur l'une des cases blanches restantes et l'on procède de même.
De combien de façons peut-on ainsi disposer trois pions numérotés 1 ; 2 et 3.



22

1°) Déterminer le nombre de manières d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire à chacune des quatre boulangeries d'une même municipalité.
2°) Reprendre la question précédente dans chacun des cas suivants :
a/ Deux boulangeries quelconques ne peuvent pas avoir le même jour de repos.
b/ Chaque jour, il doit y avoir au moins une boulangerie ouverte.

23

Soit E l'ensemble à 12 éléments :
{a, , b, c, d, e, f, g, h, k, i,n , m}
1°) Dénombrer les parties de E à 5 éléments qui contiennent :
a/ a et b ;
b/ a, mais pas b ;
c/ b, mais pas a ;
d/ ni a ni b.
2°) En déduire la relation
$C_{12}^{5} = C_{10}^{3} + 2C_{10}^{4} + C_{10}^{5}$

3°) Généraliser le résultat obtenu :
pour $2 \leq p \leq n$, $C_n^p = C_{n-2}^{p-2} + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p}$

24

Pour tout entier p,
$0 \leq p \leq 51$, on pose $U_p = C_{51}^{p}$
1°) Montrer que, pour
$0 \leq p \leq 50$, on a : $\dfrac{U_{p+1}}{U_p} = \dfrac{51-p}{p+1}$.

2°) En déduire que :
$U_0 < U_1 < U_2 < \ldots < U_{25}$
$U_{51} < U_{50} < U_{49} < \ldots < U_{26}$
avec égalité des termes écrits l'un sous l'autre.

25

On pose $V_p = C_{50}^{p}$, pour $0 \leq p \leq 50$.
En s'inspirant de l'exercice précédent, prouver que :
$V_0 < V_1 < V_2 < \ldots < V_{25}$
$V_{50} < V_{49} < V_{48} < \ldots < V_{25}$
avec égalité des termes écrits l'un sous l'autre.

26

Soit la suite U définie sur IN* par :
$U_n = 1 \times 2 + 3 \times 4 + \ldots + n \times (n+1)$
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul, on a $U_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

27

Soit la suite U définie sur IN par $U_0 = 7$ et pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 2U_n - 3$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel , on a, $U_n = 2^{n+2} + 3$.

Le triangle de Stirling

Problématique :

n et p deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$.

Etant donné un ensemble E dont le cardinal est n.

De combien de façons différentes peut-on former p sous ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_P$ de E tels que :

- Aucun sous ensemble n'est vide.
- Deux sous ensembles quelconques soient disjoints.
- A_1 » A_2 »...»A_P = E

I - Exemple :

Etant donné 4 fleurs : rouge, jaune, blanche, violette.

De combien de façons peut-on former avec ces fleurs 3 bouquets ?

a/ Déterminer le nombre de façons où la fleur rouge constitue à elle seule un bouquet (ce qui revient à former avec les trois restantes deux bouquets).

b/ Quel est le nombre de façons où la fleur rouge est necessirement avec une fleur des tois autres ?

c/ . En déduire que le nombre de façons de former 3 bouquets à partir des 4 fleurs est 6 (on note $S_4^3 = 6$).

II - Généralisation

Notons S_n^p le nombre de façons de repartir E en p parties tel que c'est décrit au début

a/ Déterminer S_n^1 et S_n^n

b/ Montrer que $S_n^p = S_{n-1}^{p-1} + pS_{n-1}^p$.

<u>Indication</u>

Soit e un élément E.

Déterminer le nombre de partitions de E en p parties dont l'une est le singleton { e} et le nombre de partitions de e en p parties dont aucune est le singleton { e} .

c/ Utiliser les résultats des questions a) et b) pour compléter le tableau ci-dessous appelé le triangle de Stirling où sur l'intersection de la ligne n et de la colonne p on lit l'entier S_n^p.

n \ P	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	1		1				
4	1			1			
5	1		25		1		
6	1					1	
7	1						1

Toute connaissance dégénére en probabilité
DAVID HUME

Chapitre 4

PROBABILITÉS

- **Cours**

  I - Introduction

  II - Définition d'une probabilité

  III - Equiprobabilité

  IV- Epreuves successives et événements indépendants

  V - Epreuves successives et événements dépendants

- **Utilisation des T.I.C.**

- **Exercices et problèmes**

- **Math culture.**

I – Introduction

Activité 1 :

Dans la plupart des calculatrices, il y a une touche Random.
Lorsqu'on appuie sur cette touche, il s'affiche un nombre appartenant à l'intervalle [0, 1[. Dans la plupart des cas, ce nombre s'affiche avec trois décimales.
Chacun de ces nombres a la même chance d'apparaître. Cela permet d'obtenir chaque fois trois chiffres au hasard.

Exemples :

Random = 0.268 donne 2, 6, 8.
Random = 0.420 donne 4, 2, 0.
Utiliser la calculatrice pour obtenir 50 chiffres au hasard

> Lorsqu'on tire au sort un sujet d'examen, ou que l'on lance une pièce de monnaie bien équilibrée ou un dé non pipé, il est impossible de prévoir le résultat, car ce résultat est soumis au hasard.
> On dit alors que le résultat est aléatoire.
> De telles expériences sont dites expériences aléatoires.

Activité 2 :

1°) On se propose de simuler 500 lancers d'une pièce de monnaie ;
- utiliser la calculatrice pour obtenir 500 chiffres aléatoires,
- noter P pour chaque chiffre pair obtenu et F pour chaque chiffre impair obtenu ,
- organiser les résultats dans le tableau ci-contre

Issue	P	F
Fréquence		

2°) A-t-on autant de chances de voir apparaître P que de voir apparaître F ?

Activité 3 :

On a simulé 10000 lancers d'une pièce de monnaie puis on a organisé les résultats dans le tableau ci-dessous.

Nombre de lancers	100	500	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
Nombre d'apparitions de pile	52	242	502	1002	1513	2034	2513	3035	3544	4020	4518	5008

1°) Calculer la fréquence de l'issue « pile ».
2°) Tracer dans un même repère la courbe de fréquence de l'issue « pile » et la droite d'équation y =0.5.
3°) Vers quelle valeur la fréquence de l'issue « pile » tend-t-elle à se stabiliser ?

II – Définition d'une probabilité

Activité 1 :

Un sac contient 100 jetons numérotés de 1 à 100.
Une expérience consiste à tirer un jeton au hasard.
1°) Combien y a t il d'issues possibles ?
2°) a/ Dénombrer chacun des événements ci-dessous.
A: « Obtenir un jeton portant un numéro qui commence par 1 ».
B: «Obtenir un jeton portant un numéro qui finit par 2 ».
C: «Obtenir un jeton portant un numéro impair qui commence par 2».

Lorsqu'on fait une expérience aléatoire :
- Un résultat est appelé issue.
-L'ensemble des issues possibles est appelé univers des possibles.
-Un événement est une partie de l'univers des possibles.
-Un événement qui se réduit à une seule issue est appelé événement élémentaire.
-Deux événements sont dits incompatibles, si leur intersection est vide.

b/Montrer que les événements A, B et C sont deux à deux incompatibles.
3°) Si on suppose que chaque issue apparaît avec la même fréquence égale à $\frac{1}{100}$
Déterminer la fréquence d'apparition de chacun des événements

A, A, B, C, $A \cap B$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cup B \cup C$.

Lorsqu'on répète plusieurs fois une expérience aléatoire, on constate que la fréquence de réalisation d'un événement tend à se stabiliser autour d'un nombre. On parle alors de fréquence théorique de l'événement ou encore de probabilité de l'événement.

Définition

Soit E l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire et P (E) l'ensemble des parties de E.
On appelle probabilité sur E, toute application p , de P (E) dans [0,1] telle que
- ❖ p(E) =1;
- ❖ L'image p(A) d'un événement A, est la somme des images des événements élémentaires de A;
- ❖ L'image de l'ensemble vide p(∅)est égale à 0.

Vocabulaire et notation

Soit E ={ a_1, a_2 ...,a_n }l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire et p une probabilité sur E

- L' événement E est toujours réalisé. On dit que E est l'événement certain.
- L' événement vide n'est jamais réalisé. On dit que le vide est l'événement impossible.
- L'image p(A) d'un événement A, est appelée probabilité de A.
- La probabilité d'un événement élémentaire $\{a_i\}$ est notée $p(a_i)$.

Activité 2 :

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1°) Déterminer l'ensemble des issues de l'expérience.

2°) On suppose que la probabilité d'apparition d'un nombre impair est le double de la probabilité d'apparition d'un nombre pair.

a/ Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.

b/ Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous

A: « Obtenir un nombre pair »
B: « Obtenir un nombre impair inférieur ou égal à 3 »
C: « Obtenir un nombre pair strictement supérieur à 3».
D: « Obtenir un multiple de 3 ou un nombre pair ».

Activité 3 :

Soit E un ensemble fini et p une loi de probabilité sur E.
Soit A et B deux parties de E.

1°) On suppose que A et B sont incompatibles prouver que $P(A\cup B) = p(A) + p(B)$.

L'événement complémentaire d'un événement A est dit événement contraire de A.

2°) Déduire que $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

3°) On note A_1 l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B.

a/ Vérifier que $A = A_1 \cup (A \cap B)$ et que $A\cup B = A_1 \cup B$.

b/ Déduire que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

théorème

Soit E un ensemble fini et p une probabilité sur E.
Soit A et B deux événements, alors

- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
- $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- $p(A\cup B) = p(A) + p(B)$ si A et B sont incompatibles.

Activité 4 :

Un sac contient des jetons, non identiques, numérotés de 10 à 19.
Une expérience aléatoire consiste à tirer un jeton du sac.
Le tableau ci-dessous donne les probabilités d'apparition des numéros.

a_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
P_i	0,2	0,1	0,05	0,06	0,04	0,1	0,1	0,15	0,15	0,05

Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous :

1°) le chiffre obtenu est pair.

2°) le chiffre obtenu est un carré.

3°) le chiffre obtenu n'est pas un carré.

4°) le chiffre obtenu est un multiple de 3 ou un multiple de 4.

5°) le chiffre obtenu n'est ni un multiple de 3, ni un multiple de 4.

Activité 5 :

Dans une classe de troisième année, 35% des élèves ont 17 ans, 55% ont 18 ans et le reste ont 19 ans.

On rencontre un élève au hasard de cette classe.

Quelle est la probabilité des événements suivants.

- A : " l'élève a plus de 17 ans " ;
- B : " l'élève a au plus 18 ans ".

Activité 6 :

Dans un jeu de 40 cartes. On tire simultanément deux cartes.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants.

- A : "on tire deux figures ";
- B : " on tire deux cartes rouges " ;
- C : " on tire deux figures ou deux cartes rouges ".

III – Equiprobabilité

Lorsque dans une expérience aléatoire toutes les issues ont la même probabilité d'apparaître, on dit qu'il y a équiprobabilité.

C'est le cas, par exemple, lorsqu'on lance une pièce de monnaie bien équilibrée ou on jette un dé non pipé ou on tire au hasard.

théorème

Soit E l'ensemble des issues dans une situation d'équiprobabilité.

Si le cardinal de E est égal à N et si p est la probabilité sur E ,on a

- Pour tout événement élémentaire a_i, $p(a_i) = \frac{1}{N}$.

- Pour tout événement A, $p(A) = \frac{\text{card}A}{N}$.

Activité 1 :

Une bonbonnière contient trois caramels et sept mentholés. On prend au hasard trois bonbons.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A: « les bonbons sont des caramels »

B: « les bonbons sont de même type »

C :« il y a au plus un mentholé »

Activité 2 :

On a rangé cinq paires de chaussures de couleurs différentes dans un tiroir.
On tire au hasard deux chaussures. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A: « les chaussures appartiennent à la même paire »;
B: « il y a un pied droit et un pied gauche».

Activité 3 :

Une entreprise fabrique des puces pour cartes téléphoniques.
On a remarqué que : 15% des puces présentent un défaut D_1;
24% des puces présentent un défaut D_2 ;
10% des puces présentent les deux défauts à la fois.
On choisit une puce au hasard. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
A: « la puce a au moins l'un des deux défauts »
B: « la puce n' a ni le défaut D_1 ni le défaut D_2 »
C :« la puce a un seul défaut »

Activité 4 :

Une usine organise un sondage, auprès de 500 de ses clients pour déterminer quels sont les produits qu'ils apprécient. On donne ci-dessous les résultats

- 200 clients apprécient le produit A et n'apprécient pas le produit B.
- 120 clients apprécient à la fois les produits A et B
- 150 clients apprécient le produit B et n'apprécient pas le produit C
- 180 clients n'apprécient ni le produit B ni le produit C.
- 100 clients apprécient à la fois les produits B et C.

On choisit un client au hasard parmi ceux qui ont été interrogés.
Quelle est la probabilité de chacun des événements ci-dessous.
E : « Le client apprécie le produit A ».
F : « Le client n'apprécie pas le produit C ».
G : « Le client apprécie le produit C ».
H : « Le client apprécie le produit B ».

Activité 5 :

On range quatre livres sur trois étagères.
1°) Calculer la probabilité pour que les livres soient tous rangés sur la même étagère.
2°) Calculer la probabilité pour que chaque livre soit rangé dans une étagère différente.
3°) Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins deux livres rangés sur une même étagére.
4°) Calculer la probabilité pour que seulement deux livres soient rangés sur la même étagère.

IV – Epreuves successives et événements indépendants

Activité 1 :

On lance une pièce de monnaie, bien équilibrée.

1°) Quelle est la probabilité d'obtenir l'une des faces ?

2°) On répète l'expérience deux fois et on note à chaque fois le côté qui apparaît :

P pour pile et F pour face.

Soit A_1 un événement réalisé lors du premier lancer et A_2 un événement réalisé lors du deuxième lancer.

a/ La réalisation de A_1 influe-t-elle sur celle de A_2 ?

b/ Déterminer et dénombrer l'ensemble E des issues possibles

c/ Déterminer la probabilité d'un événement élémentaire de E.

d/ Calculer la probabilité des événements ci-dessous

A « Obtenir pile au premier lancer ».

B « Obtenir face au deuxième lancer ».

C « Obtenir face au premier lancer et pile au deuxième lancer ».

e/ Calculer la probabilités des événements ,$\overline{A}$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$, $A \cup B$, $A \cup B \cup C$.

On considère une expérience aléatoire, constituée de n expériences aléatoires successives.

Soit A_1 un événement réalisé avec la probabilité p_1 lors de la première expérience, A_2 un événement réalisé avec la probabilité p_2 lors de la deuxième expérience, et A_n est un événement réalisé avec la probabilité p_n lors de la nième expérience. On dit que les événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation du suivant. On a alors :

La probabilité que les événements $A_1, A_2, \ldots A_n$ soient successivement réalisés est égale à $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$

Activité 2 :

Une urne contient deux boules blanches et huit boules rouges.

On tire au hasard une boule.

1°) a/ Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.

b/ En déduire la probabilité de tirer une boule rouge.

On répète l'expérience trois fois en remettant après chaque essai la boule tirée dans l'urne.

2°) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants

a/ Obtenir dans l'ordre une boule rouge, une boule blanche et une boule rouge ;

b/ Obtenir deux boules rouges et une boule blanche;

c/ La seconde boule tirée est blanche ;

d/ Aucune boule tirée n'est blanche;
e/ La dernière boule tirée est blanche;
f/ Le tirage contient au moins une boule blanche.

Activité 3 :

Trois élèves A, B et C travaillent indépendamment sur un problème.
La probabilité que A résolve le problème est $\frac{1}{2}$ celle de B est $\frac{1}{3}$ et celle de C est $\frac{2}{5}$.

Calculer la probabilité que le problème ne soit résolu ni par A ni par B ni par C.
En déduire la probabilité que le problème soit résolu.

Activité 4 :

On jette une pièce de monnaie bien équilibrée dix fois de suite.
Quelle est la probabilité d'obtenir " pile " au moins une fois ?

Activité 5 :

Un sac contient quatre boules : une rouge et trois vertes. On effectue au maximum deux tirages de la manière suivante:
On extrait une boule de l'urne
- si elle est rouge, on s'arrête.
- si non, on la remet et on tire une deuxième boule.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge ?

IV – Epreuves successives et événements dépendants

Activité 1 :

Un libraire dispose de six livres très chers 4 en français et 2 en anglais.
1°) Il vend un livre.
a/ Quelle est la probabilité pour que ce livre soit en français?
b/ Quelle est la probabilité pour qu'il soit en anglais?
2°) Il vend un second livre.
Peut on déterminer la probabilité pour que le second livre soit en français?
3°) On suppose que le premier livre vendu est en français.
Déterminer la probabilité pour que le second livre
a/ soit en français.
b/ soit en anglais.
4°) La vente du premier livre influe-t-elle sur celle du second livre ?
5°) En vendant successivement deux des six livres.
a/ Déterminer les couples de ventes possibles et leurs probabilités correspondantes.
b/ Comparer chaque probabilité obtenue avec le produit des probabilités des ventes respectives

On considère une expérience aléatoire, constituée de n expériences aléatoires successives.
Soit A_1 un événement réalisé lors de la première expérience, A_2 un événement réalisé lors de la deuxième expérience, et A_n est un événement réalisé lors de la nème expérience.
On dit que les événements sont dépendants si la réalisation de l'un influe sur la réalisation dusuivant.
Soit p_1 la probabilité de A_1 , p_2 la probabilité de A_2 si A_1 se réalise et p_n la probabilité de A_n si les événements A_1 ,A_2 .... A_{n-1} se réalisent. Alors la probabilité que les événements A_1 ,A_2 …A_n se réalisent successivement est égale à $p_1 \times p_2 \times ..... p_n$

Activité 2 :

Une personne est emprisonnée dans une pièce comportant quatre portes, d'apparence , identiques et numérotées de 1 à 4. Seule la porte numéro 1 donne accès à l'extérieur.
Si la personne choisit la porte 1, elle peut quitter la pièce.
Si elle choisit l'une des autres portes, elle doit faire un autre essai.
On suppose qu' à chaque essai la personne évite la porte choisie auparavant et choisit entre celles qu'elle n'a pas essayées auparavant.
Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous:

A: « La personne choisit la porte numéro1 au premier essai».
B :« La personne choisit la porte numéro1 au troisième essai ».
C: « La personne choisit la porte numéro1 au cinquième essai ».

Activité 3 :

Lors d'un examen, un élève doit tirer successivement et au hasard trois questions parmi 27 questions réparties de la manière suivante :
9 questions d'analyse
9 questions de géométrie
4 questions de probabilité
5 questions de statistiques.
Calculer les probabilités des événements ci-dessous

1°) l'élève tire trois questions d'analyse.
2°) L'élève ne tire aucune question d'analyse.
3°) L'élève tire au moins une question de probabilité et une seule question de statistiques.
4°) L'élève ne tire que des questions de géométrie et de probabilité.

Activité 4 :

Deux joueurs participent au jeu suivant : à tour de rôle, ils tirent une boule d'une urne qui contient quatre boules rouges et deux boules noires. Les boules ne sont pas remises dans l'urne. Celui des deux joueurs qui extrait une boule rouge gagne la partie.

1°) Quelle est la probabilité pour que le deuxième joueur gagne la partie ?
2°) En déduire la probabilité pour que le premier joueur gagne la partie.

Activité 5 :

Reprendre les questions de l'activité 4 en supposant que l'urne contient quatre boules rouges et trois boules noires.

Activité 6 :

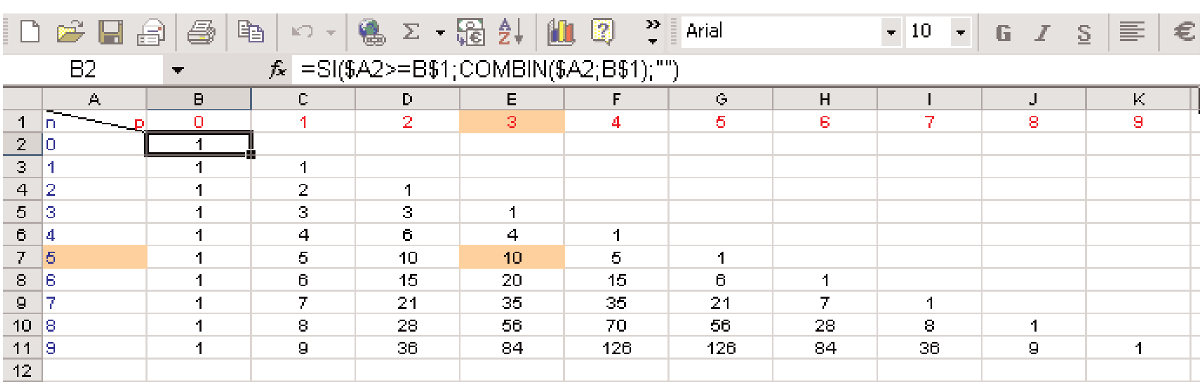
Une urne contient deux boules rouges et trois boules blanches.
Une expérience aléatoire consiste à tirer une boule et à la remettre dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur, puis enfin, à tirer une nouvelle fois une boule de l'urne.
Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
A:« obtenir deux boules rouges ».
B: « obtenir une boule rouge et une boule blanche ».

Activité 7 :

Une urne contient des boules numérotées de 12 à 2007.
On tire, au hasard successivement et sans remise, deux boules de l'urne.
a/. Combien y a -t-il de boules portant un nombre impair ?
b/Quelle est la probabilité pour que le produit des nombres obtenus soit impair ?
c/En déduire la probabilité pour que le produit des nombres obtenus soit pair.

Créer un triangle de Pascal

Le triangle de Pascal est une construction mathématique qui joue un rôle important en analyse combinatoire et en calcul de probabilités. La valeur de chaque case est obtenue en additionnant deux cases de la ligne supérieure (celle juste au-dessus et celle située à sa gauche). Voici comment en construire un d'une hauteur de 9 lignes et d'une base de 9 colonnes .(au-delà, le principe reste le même).
Sachant toutefois qu'un nombre C_n^p ; $0 \leq n, p \leq 9$ et $p \leq n$ est le naturel se trouvant dans l'intersection de la n ième ligne et de la p ième colonne.
Créer sur Excel une feuille vierge et taper, dans les dix cellules **A2: A11** les nombres successifs de **0** à **9** qui représentent les valeurs que peut prendre l'entier n.
De même, taper, dans les dix cellules **B1 : K1** les nombres successifs de **0** à **9** qui représentent les valeurs que peut prendre l'entier p.
En **B2**, recopier la formule =SI($A3>=B$1;COMBIN($A3;B$1);"") en respectant scrupuleusement la présence ou l'absence des caractères **"$".**
Recopier la formule dans toutes les cellules du champ **B2:K11**.
Votre triangle est terminé et vous pouvez lire directement le désiré.
❖La colonne A, affiche les valeurs prises par l'entier n
❖ La ligne "1 " , affiche les valeurs prises par l'entier p.


B2 =SI($A2>=B$1;COMBIN($A2;B$1);"")

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	n p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	1									
3	1	1	1								
4	2	1	2	1							
5	3	1	3	3	1						
6	4	1	4	6	4	1					
7	5	1	5	10	10	5	1				
8	6	1	6	15	20	15	6	1			
9	7	1	7	21	35	35	21	7	1		
10	8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
11	9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
12											

1

Un enfant joue avec des objets de différentes couleurs, répartis de la façon suivante

Couleur	tout rouge	Tout vert	Tout bleu	bleu et rouge	vert et bleu
Nombre d'objets	3	5	6	2	4

L'enfant prend un objet au hasard. Il dit que l'objet est rouge s'il est rouge ou il contient du rouge ; de même pour les autres couleurs.
Déterminer les probabilités des événements suivants :
A : " prendre un objet rouge ";
B : " prendre un objet bleu ";
C : "prendre un objet bleu et rouge ";
D : " prendre un objet bleu ou rouge ".
E : " prendre un objet ni rouge ni bleu ";
F : " prendre un objet qui n'est pas rouge".

2

Dans un texte on relevé la longueur des mots : 12% des mots ont une seule lettre, 18% ont deux lettres, 9% ont trois lettres, 17% ont quatre lettres, 16%ont cinq lettres. On considère un mot quelconque de ce texte

a/ Calculer la probabilité pour que le mot ait moins de cinq lettres.

b/ En déduire la probabilité pour que le mot ait au moins cinq lettres.

3

Vingt bijoux sont emballés de la même manière : 7 montres ,7 colliers, 3 bracelets, 3 bagues. On prend simultanément et au hasard quatre bijoux.
Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants:
A:" obtenir un bijou de chaque sorte "
B:" les quatre bijoux sont de même nature ".
C:" obtenir les trois bagues ".
D:" obtenir au moins un collier ".

4

Un sac contient trois boules rouges, quatre boules bleues et cinq boules jaunes, indiscernables au toucher. On extrait, au hasard, trois boules du sac.
Quelle est la probabilité des évènements suivants:
A:" les trois boules sont jaunes ".
B:" il n'y a aucune boule rouge ".
C:" avoir au moins une boule rouge ".
D:" les trois boules sont de couleurs différentes ".

5

Deux voitures V et W se présentent à une aire de péage comportant trois voies de passage ouvertes numérotées de gauche à droite 1, 2, 3.On suppose qu'elles s'engagent au hasard dans des voies de passage différentes.
Calculer la probabilité des événements suivants :
A:" les deux voitures sont côte à côte ".
B:" les deux voitures ne sont pas côte à côte ".
C:" la voie numéro 3 reste libre ".
D:"la voiture V passe à gauche de la voiture W".

6

Un feu tricolore a les caractéristiques suivantes:
Les feux rouge et vert durent 24 secondes mais l'orangé ne dure que 12 seconds.
Un conducteur suit une route comportant deux feux successifs indépendants l'un de l'autre qui possède les caractéristiques précédentes.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants:
A:" le conducteur rencontre deux feux rouges ".
B:" le conducteur rencontre un feu vert et un feu rouge ".
C:" le conducteur ne s'arrête pas à aucun des deux feux ".

7

Un marchand de glaces propose six arômes distincts pour des glaces en cornet, trois enfants choisissent un des arômes proposés. Déterminer la probabilité des événements suivants:
A:" ils choisissent des arômes deux à deux distincts".
B:" un arôme et un seul est choisi par les trois enfants ".
C:" deux arômes et deux seulement sont choisis par les trois enfants ".
Remarque: la probabilité de C peut être calculée de façon directe ou indirecte

8

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher: deux boules rouges et trois boules blanches.
On tire simultanément trois boules de l'urne.
On désigne par n le nombre de boules blanches tirées
1°) Quelles sont les valeurs possibles de n ?
2°) Soit l'événement A_n :"le nombre de boules blanches tirées est n ".
Pour chaque valeur de n trouvée en **1°)** déterminer la probabilité pour que A_n soit réalisé

9

On dispose d'une urne contenant deux boules blanches et cinq rouges.On tire successivement sans remise quatre boules de l'urne et on désigne par n le rang de la première boule rouge tirée.

1°) Quelles sont les valeurs possibles de n ?

2°) On désigne par R_n l'événement " le rang de la première boule rouge tirée est n."

Pour chaque valeur de n trouvée en **1°)** déterminer la probabilité pour que R_n soit réalisé

10

Dans un lycée, 40% des élèves ont déclaré aimer l'étude de sciences économiques, 55% des mathématiques et 15% des sciences économiques et des mathématiques.

On prend un élève au hasard, quelle est la probabilité pour qu'il:

a/ aime les sciences économiques, mais pas les mathématiques.

b/ aime les mathématiques, mais pas les sciences économiques

c/ n'aime ni les mathématiques ni les sciences économiques.

11

On considère une urne contenant dix boules indiscernables au toucher : sept jaunes et trois rouges. Montrer que la probabilité de tirer simultanément deux boules rouges est supérieure à celle de les tirer successivement et avec remise.

12

Dans une urne, il y a trois boules blanches, trois boules noires et quatre boules vertes .Quelle est la probabilité de tirer:

a/ trois boules de la même couleur ;

b/une boule de chaque couleur;

c/ trois boules de deux couleurs différentes.

13

On effectue une permutation des jetons ci-dessous

N	R	J

1°)Déterminer la probabilité des événements suivants :

A:" un seul jeton est à sa place "

B:" aucun jeton n'est à sa place "

2°) On effectue maintenant une permutation des jetons ci-dessous:

V	N	R	J

Déterminer la probabilité des événements suivants:

A:" un seul jeton est à sa place ".

B:" deux jetons seulement sont à leurs places "

C:" aucun jeton n'est à sa place ".

14

Une boite contient cinq jetons rouges et cinq jetons verts. Dans chaque couleur, les jetons sont numérotés 1, 2, 3, 4 et 5. On tire au hasard et simultanément cinq jetons.

1°) Calculer la probabilité des événements suivants :

A:" les jetons sont de même couleur ".

B:" avoir trois jetons blancs et deux jetons rouges ".

C:" les numéros des jetons sont deux à deux distincts".

2°) Calculer la probabilité pour que les cinq jetons satisfassent à la fois aux deux conditions suivantes :

- un jeton, et un seul, porte le numéro 1.
- quatre jetons, et quatre seulement, sont verts

15

Quatre élèves E, F, G, H laissent leurs livres de math sur le bureau du professeur.

Celui ci leur remet les livres au hasard. Calculer la probabilité des événements suivants :

A:"chaque élève retrouve son livre ".

B:" deux élèves seulement retrouvent leurs livres".

C:"l'élève E seulement à reçoit son livre".

D:" aucun élève ne reçoit son livre".

16

Une urne contient huit boules : trois rouges où on a inscrit sur chacune d'elles -1 ; quatre vertes numérotées 1,1,1,1et une orange numérotée par 2 .

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

1°) Déterminer la probabilité des événements suivants:

A:" la somme des nombres obtenus est égale à (- 2) ".

B:" la somme des nombres obtenus est égale à (-1) ".

C:" la somme des nombres obtenus est nulle ".

D:"la somme des nombres obtenus est égale à 1".

E:"la somme des nombres obtenus est égale à 2 ".

F:" somme des nombres obtenus est égale à 3 " .

2°) Vérifier que

$p(A) + p(B) + p(C) + p(D) + p(E) + p(F) = 1$

et justifier l'égalité.

17

Une première boite contient deux jetons rouges numérotés 1, 2, et une seconde boite contient trois jetons blancs numérotés 0, 1, 2.
On tire un jeton de la première boite puis un second jeton de la deuxième boite. Soit p le produit des deux nombres obtenus.
1°) Montrer que $p \in \{0,1,3,4,\}$.
2°)a/ Calculer, pour chaque valeur possible de p, la probabilité de l'événement
Ap : " le produit des deux numéros obtenus est p ".
b/ Calculer $p(A_0) + p(A_1) + p(A_3) + p(A_4)$
et justifier le résultat obtenu.

18

Une usine produit des articles dont 3% présentent des défauts. En vue d'un contrôle de qualité, on constitue au hasard un échantillon de cinquante articles tirés de la production. La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de cinquante articles.
Calculer la probabilité que l'échantillon contienne :
a/ aucun article défectueux;
b/ un seul article défectueux;
c/au moins un article défectueux.

19

Une maman de cinq enfants (deux filles et trois garçons) est tombée malade pendant 7 jours. Au cours de cette période, les enfants décident de ne faire la vaisselle qu'une fois par jour.
Chaque jour, ils tirent au sort qui fera la vaisselle.
Calculer la probabilité des événements suivants :
A : " aucun garçon ne fait la vaisselle pendant les 7 jours "
B : " au moins une fille fait la vaisselle pendant les 7 jours ".

20

Une urne contient deux boules blanches et trois boules noires.
1°) On tire au hasard et successivement deux boules sans remise
A : " obtenir une boule noire puis une boule blanche
B : " obtenir une boule blanche puis une boule noire "
2°) On tire une première boule et on ne la remet pas dans l'urne :
- Si elle est blanche, on ajoute une boule noire dans l'urne.
- Si elle est noire , on ajoute deux boules blanches dans l'urne.
On tire une deuxième boule. Calculer la probabilité des événements suivants :
A' : " obtenir dans l'ordre une boule blanche, une boule noire "
B' : " obtenir dans l'ordre une boule noire, une boule blanche ".
C : " obtenir une boule noire et une boule blanche ".

Le premier auteur à jeter les bases de la théorie des probabilités fut **Girolamo Cardano** Médecin, inventeur et astrologue italien 1501-1576.
En effet, il exposa le concept mathématique d'anticipation, il expliqua les lois de la répétition des événements, et, enfin, il définit formellement la notion de probabilité comme une fréquence relative.
En 1654, Antoine Gombauld, posa une énigme à **Blaise Pascal** (Philosophe, auteur des célèbres Pensées, mathématicien et physicien, français 1623-1662). Il s'agissait de savoir « comment répartir entre deux joueurs l'enjeu d'un jeu de hasard, lorsque celui-ci est inachevé et qu'un des joueurs a l'avantage sur l'autre ». B. Pascal se tourna vers un mathématicien très connu au XVIIè siècle, **Pierre Fermat** (français, 1601-1665). Les travaux de ces deux mathématiciens constituent les fondements mathématiques de la théorie moderne des probabilités en étudiant des problèmes de jeux et d'espérance de gain. Ce furent sans doute les travaux les plus marquants en matière de probabilité qu'ait connus le XVIIè siècle, même si **Christian Huygens** (hollandais, 1629-1695) proposa le concept de compétition dans les jeux de chance.
Ensuite, au début du XVIIIè siècle, **Jean Bernoulli** (suisse, 1667-1748) énonça pour la première fois de façon rigoureuse les concepts de permutation et de combinaison. De son oeuvre dérive la définition classique des probabilités. De plus, son frère, Jacques Bernoulli, définit la loi des grands nombres. En outre, en 1738, le fils de Jean Bernoulli, Daniel « définit le processus par lequel les individus font des choix et prennent des décisions ».
Une autre avancée a également été cruciale : c'est celle d'un mathématicien français **Abraham de Moivre** (anglais, 1667-1754). En effet, à côté des travaux sur les combinaisons, les permutations, l'analyse de jeux de cartes et l'énoncé du premier théorème limite en probabilité, en 1733, de Moivre découvrit la structure de la loi normale, ainsi que le concept d'écart type.

Cardano

Blaise

Fermat

Huygens

Bernoulli

De Moivre

Un bon dessin vaut mieux qu'un long discours

NAPOLEON

Chapitre 5

INITIATION AUX GRAPHES

- Pour commencer
- Cours

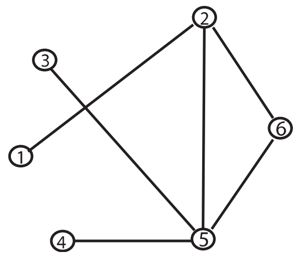
    I - Notion de graphe

    II - Coloriage d'un graphe

    III - Recherche d'une plus courte chaine

- Utilisation des T.I.C.
- Exercices et problèmes
- Math culture.

Activité 1 :

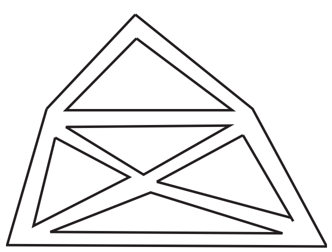


Reproduire le puzzle ci-dessus et le colorier en utilisant le minimum de couleurs de façon que deux pièces qui se touchent soient de couleurs différentes.

Activité 2 :

Un tournoi d'escrime réunit 6 compétiteurs : A, B, C, D, E et F.
Chaque escrimeur rencontre une fois et une seule les cinq autres.
Elaborer un calendrier possible pour ce tournoi.

Activité 3 :



Le graphique ci-contre représente le plan d'un parc municipal.
Le gardien de ce parc doit tous les soirs passer par toutes les allées. Il ne veut pas repasser deux fois par le même chemin mais il peut repasser plusieurs fois par le même carrefour.
A quel carrefour peut-il se placer avant de commencer son tour de surveillance s'il veut passer par toutes les allées ?

Activité 4 :

Une chèvre, un sac de fèves et un loup se trouvent au bord d'une rivière.
Le berger veut les faire traverser, mais sa barque ne peut transporter qu'un seul d'entre eux.
Pour des raisons évidentes il ne peut laisser sans surveillance ni le loup en compagnie de la chèvre ni la chèvre en compagnie de sac de fèves. Comment doit-il s'y prendre ?

Activité 5 :

Six personnes doivent participer à deux reunions.A la première reunion, elles sont toutes assises autour d’une table ronde.
Pour la deuxième reunion, aucun participant ne veut s'assoir à la même table que les deux anciens voisins.
1°) Combien de tables au miminum seront alors nécessaires?
2°) Reprendre la même question en supposant que le nombre de personnes est 5.

I – Notion de graphe

1 – Représentation d'une situation à l'aide d'un graphe :

Activité 1 :

Une personne souhaite inviter six amis que nous désignons par 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Malheureusement, certains de ces six amis ont des relations difficiles ; ce sont celles recensées dans le tableau suivant :

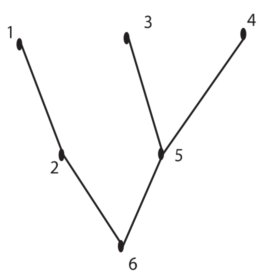
	1	2	3	4	5	6
Relations difficiles avec	2	1, 5, 6	5	5	2, 3, 4, 6	2, 5

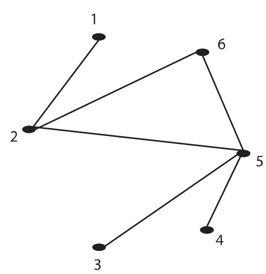
On veut résoudre le problème P suivant : *Combien de personnes au maximum peuvent être invitées ensemble sans risque de problème?*

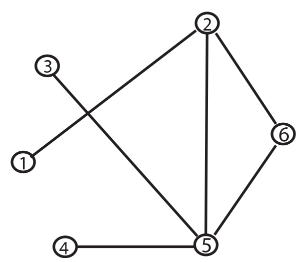
1°) Représenter chaque ami par un point.

2°) Relier deux points représentant deux personnes ayant une relation difficile.

3°) Vérifier que l'on a alors un des schéma







4°) Résoudre le problème P.

Vocabulaire :

- Le schéma (1) ci-dessus représente un graphe.
- Les points 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont les ***sommets*** de ce graphe.
- Les lignes lorsqu'il y en a reliant deux sommets sont appelées des ***arêtes***.
- L'ordre d'un graphe est égal au nombre de ses sommets.
- On dit que deux sommets sont ***adjacents*** s'ils sont reliés par une arête.
- Le ***degré*** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.

Activité 2 :

On donne sept verbes conjugués : aimait, lisait, chantions, a vécu, avons mangé, apprenions, viendrons.

1°) Dessiner deux graphes qui traduisent les relations suivantes entre deux sommets :

a/ « est conjugué au même temps que »

b/ « est conjugué à la même personne que »

2°) Pour chacun des graphes dessinés déterminer :

a/ le degré de chacun de ses sommets.

b/ le nombre de ses arêtes.

Activité 3 :

1°) Dessiner un graphe d’ordre 4 tel que chaque sommet est adjacent à tous les autres.

2°) a/ Dessiner un graphe de sommets A, B, C, D, E et F tel que :

- A est adjacent à C, D et E.
- B adjacent à D.
- C adjacent à A et E.

b/ Déterminer le nombre d’arêtes ayant pour extrémité D.

Définitions

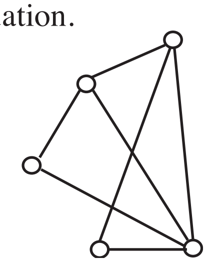
- Un graphe est ***complet*** si chaque sommet est adjacent à tous les autres.
- Un sommet est ***isolé*** s’il n’est adjacent à aucun autre sommet.

Notation : Un graphe complet d'ordre n est noté K_n.

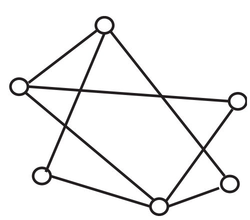
Exercice : Montrer que pour n ≥ à 2 le nombre d'arrêtes d'un graphe complet K_n est C_n^2

Activité 4 :

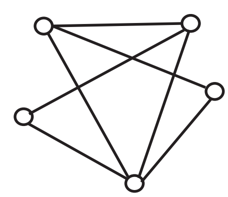
Parmi les graphes ci-dessous, déterminer ceux qui sont susceptibles de décrire une même situation.



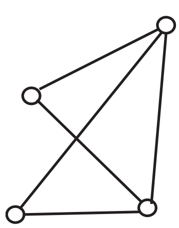
G_1



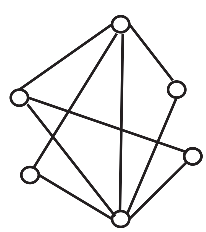
G_2



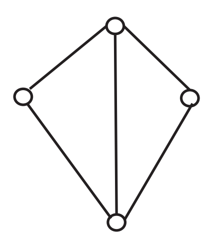
G_3



G_4



G_5



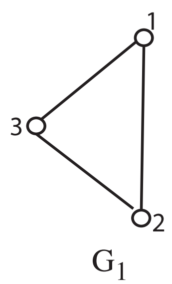
G_6

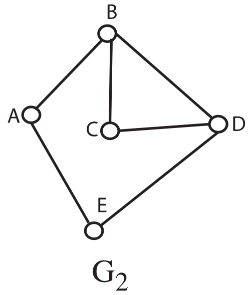
Exercice :
Peut-on construire un graphe ayant au moins deux sommets et tel que tous les sommets ont des degrés distincts ?

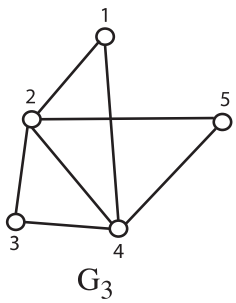
2– Lemme de poignées de main :

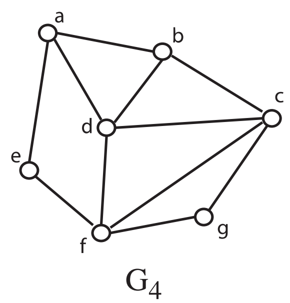
Activité 1 :

Pour chacun des graphes suivants donner :









1°) **a/** Le degré de chaque sommet.
b/ La somme des degrés de tous les sommets
c/ Le nombre d'arêtes.
2°) Quel conjecture peut-on faire ?

La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre des arêtes de ce graphe.

Conséquence :
Le nombre de sommets de degré impair d'un graphe est pair.

Activité 2 :

Combien faut-il prévoir de matchs à jouer si l'on veut organiser un championnat de 14 équipes.

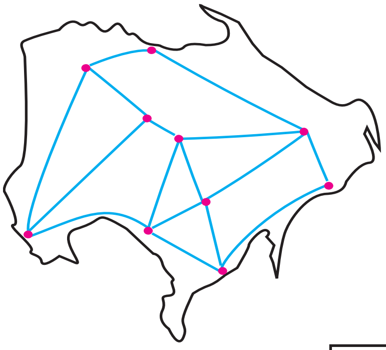
Activité 3 :

Dans un village, il y a seulement 15 appareils téléphoniques, tous fixes.
Est-il possible de les relier par des fils téléphoniques pour que chaque appareil soit relié avec 5 autres ?

Exercice :

Le schéma ci-dessous représente la carte routière de l'île de JERBA.

Déterminer le nombre de tronçons de routes existant dans l'île.



Activité 4 :

On s'intéresse aux graphes dont tous les sommets sont de degré trois.
Construisez si c'est possible de tels graphes ayant 4, 5, 6, 7 sommets.

Activité 5 :

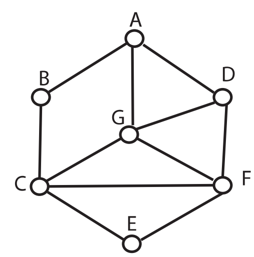
Sept personnes se retrouvent pour un diner. Certaines d'entre elles, qui se sont déjà vues dans la journée, ne se serrent pas la main. Quatre personnes ont serré trois mains, deux en ont serré une.
La septième personne peut elle n'avoir serré qu'une seule main ?

3– Circulation sur un graphe :

Activité 1 :

Des touristes sont logés dans une ville A. Ils veulent visiter les cites B, C, D, E, F et G. Les tronçons de route qu'ils peuvent emprunter sont représentés sur le graphe ci-dessous.

1°) Donner un parcours qui permet d'aller de A à E.
2°) Donner un parcours qui permet d'aller de C à F.
3°) À partir de la ville A les touristes peuvent-ils emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux ?
4°) Même question s'ils doivent obligatoirement terminer leur circuit à la ville A.



Définitions

- Une chaine dans un graphe G est une suite finie ; s_0, a_1, s_1,a_2,s_2, a_3,s_3…,a_n, s_n débutant et finissant par un sommet, alternant sommets et arêtes de telle manière que chaque arête soit encadrée par ses sommets extrémités
- La longueur d'une chaine est le nombre d'arêtes qui la décomposent.
- Une chaine est dite fermée si son origine et son extrémité sont confondues.
- Un cycle est une chaine fermée composée d'arêtes toutes distinctes.

Notation :

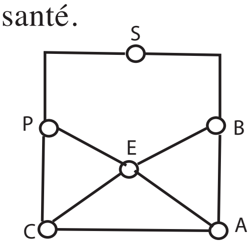
La chaine s_0, a_1, s_1, a_2, s_2, a_3, s_3…, a_n, s_n est notée: s_0 - s_1 - s_2 - s_3-…- s_n.

Exercice :
Dans un graphe G on considère la chaîne : A-B-C-B-D-A-E-B-C-X-Y
1) Détermineé la longueur de cette chaine
2) Déterminée une autre chaine de G qui debute par A et se termine par y
Déterminée alors sa longuer.

Activité 2 :

La figure ci-dessous représente un parcours de santé.

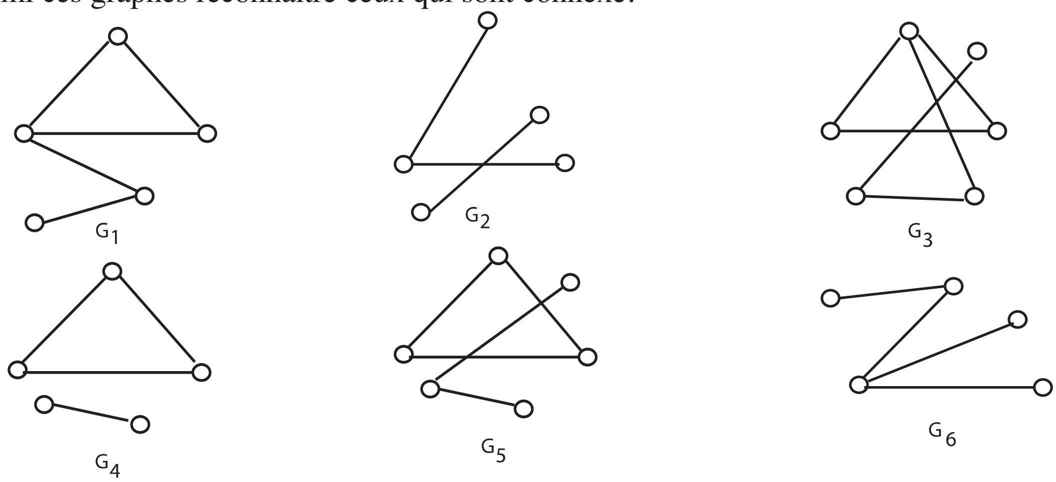
Dresser la liste de toutes les paires de sommets et pour chacune de ces paires vérifier qu'il existe une chaine reliant ces deux sommets.



Définition

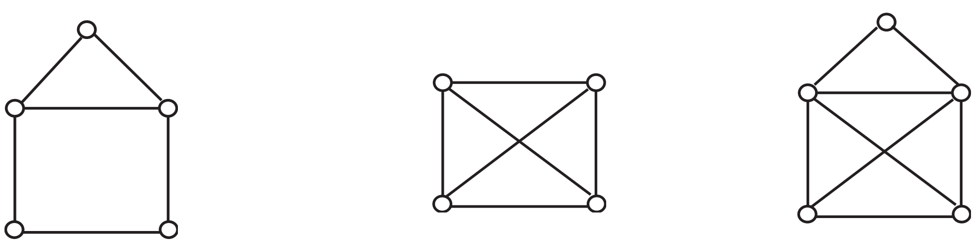
Un graphe est dit connexe si on peut relier deux quelconques de ses sommets par une chaine.

Exercice :
Parmi ces graphes reconnaitre ceux qui sont connexe.



Activité 3 :

Peut-on reproduire les graphes ci-dessous sans lever le crayon et en ne passant qu'une seule fois sur chaque arête.



Définitions

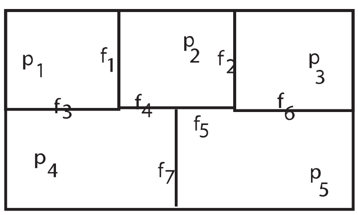
- Une chaine eulérienne est une chaine satisfaisant aux conditions suivantes :
  - o elle contient toutes les arêtes du graphe.
  - o chaque arête n'est décrite qu'une seule fois.
- Un cycle eulérien est une chaine eulérienne fermée.

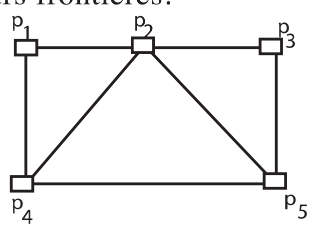
Remarque :

Une chaine eulérienne ne peut pas contenir plusieurs fois la même arête, mais elle peut passer plusieurs fois par le même sommet.

Activité 4 :

Cinq pays sont représentés ci-dessous avec leurs frontières.





1°) De quel pays doit-on partir pour visiter tous les autres pays en franchissant chaque frontière une fois et une seule ?
2°) Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant chaque frontière une fois et une seule ?

Théorème admis 1 : (EULER)

Un graphe connexe G admet une chaine eulérienne, si et seulement si, tous ses sommets sont de degré pair ou deux uniquement de ses sommets sont de degré impair (ce sont les extrémités de la chaine).

Théorème admis 2 : (EULER)

Un graphe connexe G admet un cycle eulérien, si et seulement si, tous ses sommets sont de degré pair.

Activité 5 :

Au pays des milles et une nuit, on utilise beaucoup le tapis volant. De la capitale partent vingt-et-une lignes de tapis volants, de coin-perdu il ne part qu'une seule ligne, et de chacune des autres villes il part exactement vingt lignes.
Est-il possible de partir par tapis volant de coin perdu à la capitale ?

II – Coloriage d'un graphe

Activité 1 :

A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit poissons ; dans le tableau ci-dessous, une croix signifie que les poissons ne peuvent pas cohabiter dans le même aquarium

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		x	x	x			x	x
B	x				x	x	x	
C	x			x		x	x	x
D	x		x		x			x
E		x		x		x	x	
F		x	x		x			
G	x	x	x		x			
H	x		x	x				

On se propose de résoudre le problème P suivant : Quel est le nombre d'aquariums nécessaire ?
1°) Représenter cette situation par un graphe. (Deux sommets sont adjacents si les deux poissons ne cohabitent pas)
2°) Expliquer pourquoi la résolution du problème P revient à la résolution du problème suivant : «Quel est le nombre minimale de couleurs nécessaires pour colorier les huit sommets de ce graphe de sorte que deux sommets adjacents ne soient jamais de même couleur»
3°) Les quatre sommets A, C, D et H sont deux à deux adjacents.
En déduire qu'il faut au moins quatre couleurs.
4°) Vérifier que quatre couleurs suffisent.
5°) Résoudre le problème P.

Vocabulaire :

Colorier un graphe consiste à affecter une couleur à chacun de ses sommets de sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.

UN ALGORITHME POUR COLORER UN GRAPHE : (ALGORITHME DE WELSH ET POWELL)

Pour colorier un graphe on procède de la façon suivante :

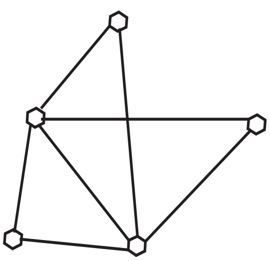
Etape 1 :
Ordonner les sommets dans l'ordre décroissant de leurs degrés

Etape 2 :
Dans la liste ainsi ordonnée, on attribue la couleur C1 au premier sommet de la liste, puis en suivant la liste on attribue cette même couleur aux sommets qui ne lui sont pas adjacents et qui ne sont pas adjacents entre eux.

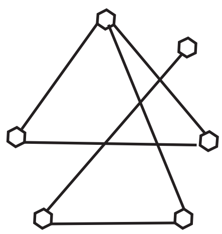
Etape 3 :
On attribue une deuxième couleur C2 au premier sommet non coloré de la liste, et on recommence comme dans l'étape 2 tant qu'il reste des sommets non colorés de la liste.

Activité 2 :

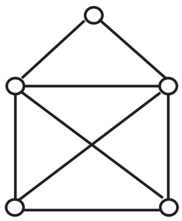
Colorier les graphes suivants :



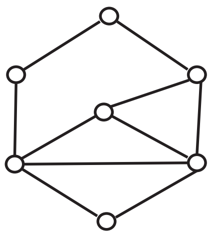
G_1



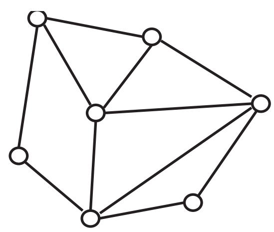
G_2



G_3



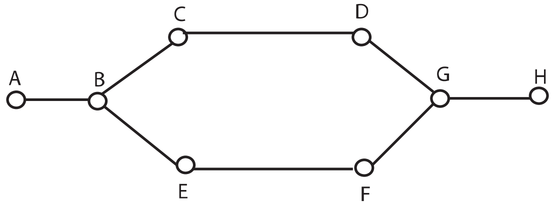
G_4



G_5

Activité 3 :

On donne le graphe suivant :



1°) a/ Colorier le graphe en utilisant l'algorithme précédent.
b/ Quel est le nombre de couleurs utilisées ?
2°) Est-il possible de colorer le graphe en utilisant uniquement deux couleurs ?

Remarque :

L'algorithme de Welsh et Powell ne donne pas le nombre minimal de couleurs nécessaires pour le coloriage d'un graphe.

Définitions

Le nombre chromatique d'un graphe G est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour son coloriage ; on le note γ (G).

Activité 4 :

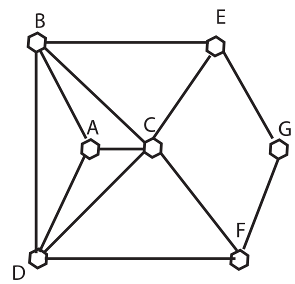
1°) Quel est le nombre chromatique d'un graphe complet d'ordre 3 ?
2°) Quel est le nombre chromatique d'un graphe complet d'ordre 5 ?
3°) Quel est le nombre chromatique d'un graphe complet d'ordre n ?

Théorème :

Le nombre chromatique d'un graphe complet d'ordre n est égal à n.

Activité 5 :

Soit G le graphe ci-contre



Un sous graphe d'un graphe G est composé de quelques sommets de G et de toutes les arêtes qui les relient.

1°) Déterminer tous les sous graphes complets d'ordre 4
2°) Vérifier que quatre couleurs sont suffisantes pour colorer le graphe.

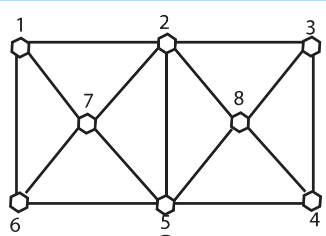
Activité 6 :

Soit G un graphe d'ordre n.
Soit G' un sous graphe complet de G d'ordre k.
Vérifier que γ (G)≥ k.

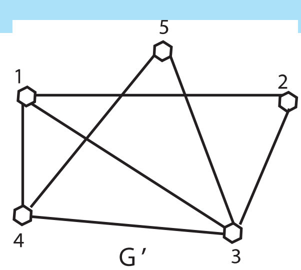
Théorème :

Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égal à l'ordre de tous ses sous-graphes complets .

Activité 7 :



G



G'

1°) Vérifier que trois couleurs suffisent pour colorer les deux graphes G et G'.
2°) Pour chacun des graphes G et G', déterminer le plus haut degré de ses sommets.

Théorème :

Soit G un graphe et k le plus grand degré de ses sommets.
$$\gamma\,(G) \leq k + 1$$

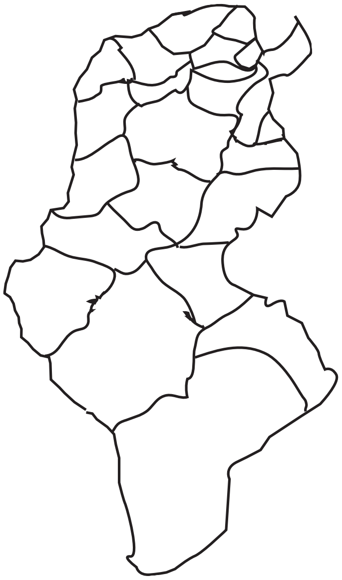
Exercice :

On désire implanter 7 stations radio dans 7 villes dont les distances mutuelles (en Km) sont données ci-dessous. Sachant que deux stations interfèrent si elle se trouvent à moins de 100 km l'une de l'autre,

	B	C	D	E	F	G
A	55	110	108	60	150	88
B		87	142	133	98	139
C			77	91	85	93
D				75	114	82
E					107	141
F						123

1°) Représenter cette situation à l'aide d'un graphe G (deux sommets sont adjacents si la distance séparant deux villes est inferieur à 100).
2°) Vérifier que $\gamma\,(G) \geq 3$.
3°) a/ Vérifier que trois couleurs suffisent pour colorier G.
b/ Quel est alors le nombre minimum de longueurs d'onde qu'il faut prévoir pour éviter toute interférence ?

Activité 8 :



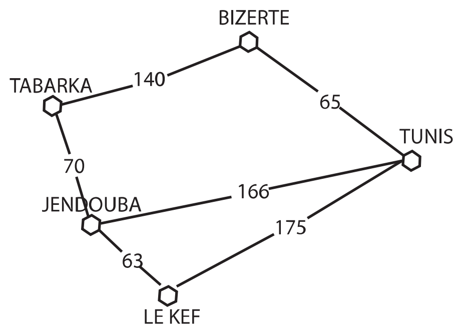
Vérifier que quatre couleurs suffisent pour colorier la carte de TUNISIE sachant que deux gouvernorats voisins sont coloriés de couleurs différentes.

Théorème admis : (des 4 couleurs)

Quatre couleurs suffisent pour colorier n'importe quelle carte géographique de façon que deux pays voisins ne soient pas coloriés par la même couleur.

III – Recherche d'une plus courte chaine :

Activité 1 :



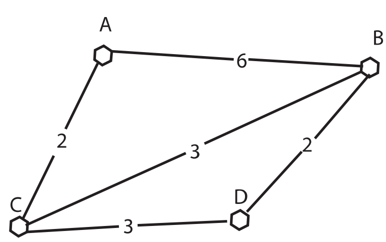
Le graphe ci-dessous représente un réseau routier. Sur ses arêtes on a marqué les distances séparant deux villes.
Entre Bizerte et Le Kef trouver le plus court chemin ?

Définitions

- ***Un graphe pondéré*** est un graphe dont les arêtes sont affectées de coefficients positifs.
- ***Le poids d'une chaine*** est la somme des coefficients des arêtes qui la composent.
- ***Une plus courte chaine*** entre deux sommets est, parmi les chaines qui les relient une chaine de poids minimum.

Activité 2 :

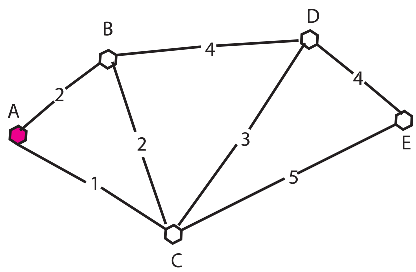
Sur les arêtes du graphe suivant représentant un réseau autoroutier, on a marqué les prix de péage en DT entre deux étapes.



Entre A et D trouver la chaine qui minimise la somme dépensée en péage.

Activité 3 :

On a représenté ci-dessous un réseau d'ordinateurs qu'un virus informatique vient d'infecter en pénétrant par l'ordinateur A.
On a noté sur les arêtes le temps (en minutes) que met un fichier infecté pour aller d'un ordinateur à un autre.



1°) Au bout d'une minute, le virus est-il arrivé en B ? En C ?

2°) **a/** Reproduire le graphe ci-dessus et colorier en rouge tous les ordinateurs atteints par le virus au bout d'une minute.

b/ Indiquer, à côté du sommet C et entre parenthèses, de quel ordinateur est venu l'attaque.

3°) Quel est l'ordinateur atteint ensuite ? Au bout de combien de temps ? Le colorier en rouge.

4°)Y a-t-il un ordinateur sain qui est atteint par le virus à la 3ème minute ? À la 4ème minute ? Le colorier en rouge et indiquer aussi de quel ordinateur est venu l'attaque.

5°) Recopier et compléter le tableau suivant :

Temps (minutes)	Ordinateur(s) atteint(s) pour la 1ère fois	Provenance de l'attaque
0	A	
1	C	A
2		
3		
4		
5		
6		

6°) Indiquer pourquoi il n'est pas utile de continuer après la sixième minute ?

7°) Indiquer le parcours du virus pour atteindre le plus rapidement l'ordinateur E.

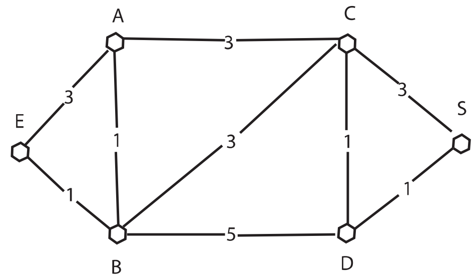
ALGORITHME DE DIJKSTRA

Lorsqu'un graphe pondéré comporte de nombreux sommets et de nombreuses arêtes, la recherche d'une plus courte chaine peut être longue et pénible car on doit examiner et comparer un grand nombre de possibilités.

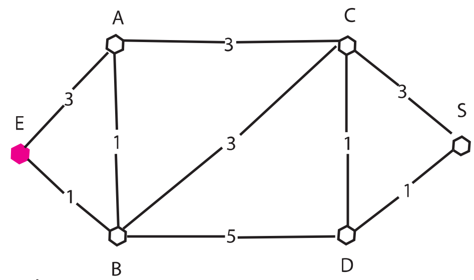
L'algorithme suivant trouvé par DIJKSTRA propose une méthode commode pour trouver la plus courte chaine reliant un sommet bien déterminé à tous les autres sommets du graphe car, en le suivant pas à pas, on est sûr de n'oublier aucun cas possible. D'autre part un tel algorithme peut être facilement programmé sur un ordinateur.

ILLUSTRATION DE L'ALGORITHME :

On considère le graphe suivant :



Le problème consiste à trouver la plus courte chaine partant de E à n'importe quel autre sommet.



On procède de la façon suivante :

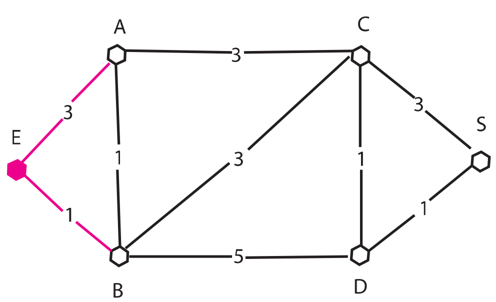
On affecte le coefficient 0 à l'origine (ici E) et le coefficient ∞ à tous les autres sommets. On obtient le tableau suivant :

E	A	B	C	D	S	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	

On sélectionne le sommet de plus petit coefficient et on raye toutes les autres cases de la colonne du sommet sélectionné. (Ici le sommet E)

E	A	B	C	D	S	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	E

On ne s'intéresse qu'aux sommets adjacents au sommet E. (ici A et B)



On affecte le coefficient 3 au sommet A et on écrit 0 + 3 pour signaler que c'est une somme donnant le poids de la chaine E-A et on écrit 3(E) pour signaler quelle provient de E.

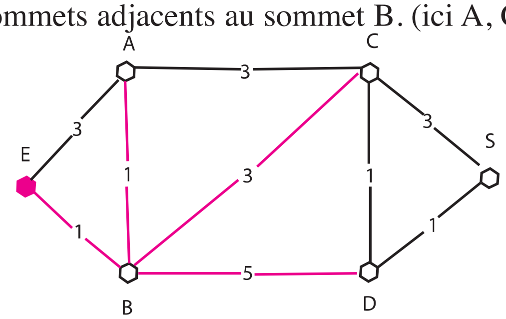
On affecte le coefficient 1 au sommet B et on écrit 0 + 1 pour signaler que c'est une somme donnant le poids de la chaine E-B et on écrit 1(E) pour signaler quelle provient de E.
On affecte le coefficient ∞ à tous les autres sommets. On obtient le tableau suivant :

E	A	B	C	D	S	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	**E**
	0 + 3 3(E)	0 + 1 1(E)	∞	∞	∞	

On sélectionne le sommet de plus petit coefficient (ici B) et on raye toutes les autres cases de la colonne du sommet sélectionné.

E	A	B	C	D	S	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	**E**
	0 + 3 3(E)	0 + 1 1(E)	∞	∞	∞	**B**

On ne s'intéresse qu'aux sommets adjacents au sommet B. (ici A, C et D)

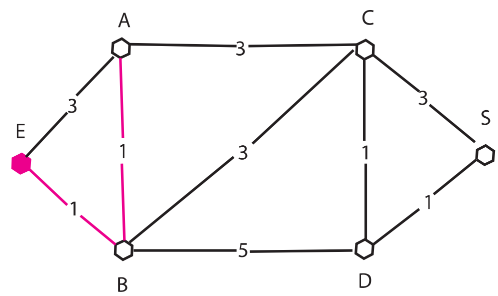


On affecte le coefficient 2 au sommet A et on écrit 1 + 1 pour signaler que c'est une somme donnant le poids de la chaine E-B-A et on écrit 2(B) pour signaler quelle provient de B.
On affecte le coefficient 4 au sommet B et on écrit 1 + 3 pour signaler que c'est une somme donnant le poids de la chaine E-B-C et on écrit 4(B) pour signaler quelle provient de B.
On affecte le coefficient 6 au sommet D et on écrit 1 + 5 pour signaler que c'est une somme donnant le poids de la chaine E-B-D et on écrit 6(B) pour signaler quelle provient de B.
On affecte le coefficient ∞ à tous les autres sommets. On obtient le tableau suivant :

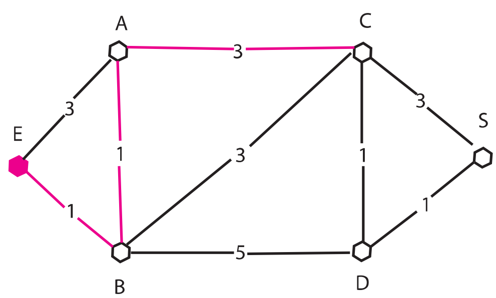
E	A	B	C	D	S	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	**E**
	0 + 3 3(E)	0 + 1 1(E)	∞	∞	∞	**B**
	1 +1 2(B)		1+3 4(B)	1 + 5 6(B)		

On sélectionne le sommet de plus petit coefficient (ici A) et on raye toutes les autres cases de la colonne du sommet sélectionné.

E	A	B	C	D	S	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	**E**
	0 + 3 3(E)	0 + 1 1(E)	∞	∞	∞	**B**
	1 +1 2(B)		1+3 4(B)	1 + 5 6(B)	∞	**A**



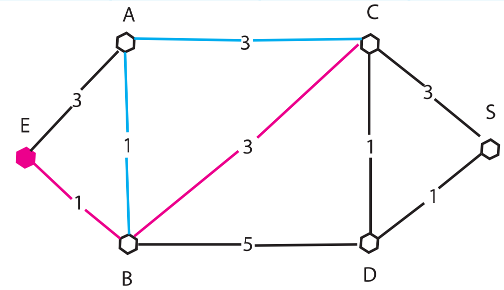
On ne s'intéresse qu'au sommet adjacent au sommet A. (ici C)



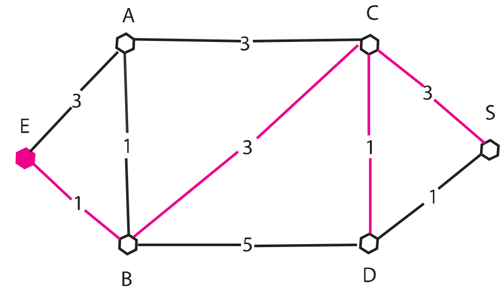
E	A	B	C	D	S	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	**E**
	0 + 3 3(E)	0 + 1 1(E)	∞	∞	∞	**B**
	1 +1 2(B)		1+3 4(B)	1 + 5 6(B)	∞	**A**
			2 + 3 4(B)	6(B)	∞	

On affecte le coefficient 5 au sommet C et on écrit 2 + 3 pour signaler que c'est une somme donnant le poids de la chaine E-B-A-C comme $2 + 3 = 5 > 4$ qui représente le poids de la plus courte chaine liant E à C (E-B-C) et on écrit 4(B) pour signaler quelle provient de B.
On affecte le coefficient 6 au sommet D comme 6 est le poids de la plus courte chaine liant E à D (E-B-D) on écrit 6(B).On obtient le tableau suivant :

E	A	B	C	D	S	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	**E**
	0 + 3 3(E)	0 + 1 1(E)	∞	∞	∞	**B**
	1 +1 2(B)		1+3 4(B)	1 + 5 6(B)	∞	**A**
			2 + 3 4(B)	6(B	∞	**C**



On ne s'intéresse qu'aux sommets adjacents au sommet C. (ici D et S)

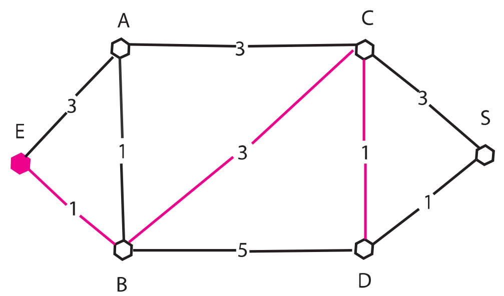


On affecte le coefficient 5 au sommet D et on écrit 4 + 1 pour signaler que c'est une somme donnant le poids de la chaine E-B-C-D et on écrit 5(C) pour signaler quelle provient de C.
On affecte le coefficient 7 au sommet S et on écrit 4 + 3 pour signaler que c'est une somme donnant le poids de la chaine E-B-C-S et on écrit 7(C) pour signaler quelle provient de C.
On obtient le tableau suivant :

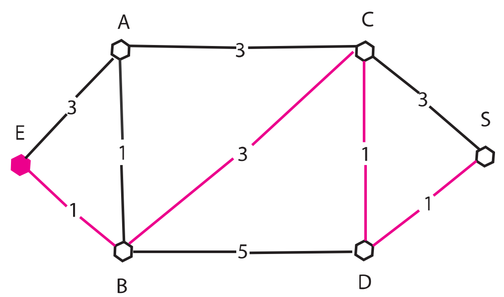
E	A	B	C	D	S	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	**E**
	0 + 3 3(E)	0 + 1 1(E)	∞	∞	∞	**B**
	1 +1 2(B)		1+3 4(B)	1 + 5 6(B)	∞	**A**
			2 + 3 4(B)	6(B)	∞	**C**
				4 + 1 5(C)	4 + 3 7(C)	

On sélectionne le sommet de plus petit coefficient (ici D) et on raye toutes les autres cases de la colonne du sommet sélectionné.

E	A	B	C	D	S	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	**E**
	0 + 3 3(E)	0 + 1 1(E)	∞	∞	∞	**B**
	1 + 1 2(B)		1+3 4(B)	1 + 5 6(B)	∞	**A**
			2 + 3 4(B)	6(B)	∞	**C**
				4 + 1 5(C)	4 + 3 7(C)	**D**



On ne s'intéresse qu'au sommet adjacent au sommet D. (ici S)



On affecte le coefficient 6 au sommet S et on écrit 5 + 1 pour signaler que c'est une somme donnant le poids de la chaine E-B-C-D-S et on écrit 6(D) pour signaler quelle provient de D. On obtient le tableau suivant :

E	A	B	C	D	S	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	**E**
	0 + 3 3(E)	0 + 1 1(E)	∞	∞	∞	**B**
	1 + 1 2(B)		1+3 4(B)	1 + 5 6(B)	∞	**A**
			2 + 3 4(B)	6(B)	∞	**C**
				4 + 1 5(C)	4 + 3 7(C)	**D**
					5 + 1 6(D)	**S**

Pour trouver la plus courte chaine de E à D on procède comme suit :

- Dans la colonne D on repère le point inscrit le plus en bas c'est-à-dire C.
- Dans la colonne C on repère le point inscrit le plus en bas c'est-à-dire B.
- Dans la colonne B on repère le point inscrit le plus en bas c'est-à-dire E.

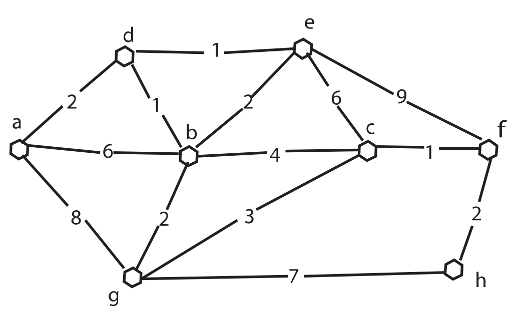
D'où la plus courte chaine reliant E à D est : E-B-C-D

En utilisant le même procédé vérifier les résultats donnés par le tableau suivant :

La plus courte chaine	**Poids**
E-B	1
E-B-A	2
E-B-C	4
E-B-C-D	5
E-C-D-S	6

Activité 4 :

On considère le graphe pondéré suivant représentant un réseau routier dans lequel sont indiquées les longueurs des différents tronçons (unité 10 km)



1°) En appliquant l'algorithme de dijkstra, vérifier que les plus courtes chaines partant de a sont données dans tableau suivant :

a	b	c	d	e	f	g	h	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	a
	0 + 6 6(a)	∞	0 + 2 2(a)	∞	∞	0 + 8 8(a)	∞	d
	2 + 1 3(d)	∞		2 + 1 3(d)	∞	8(a)	∞	b
		3 + 4 7(b)		3(d)	∞	3 + 2 5(b)	∞	e
		7(b)			3 + 9 12(e)	5(b)	∞	g
		7(b)			12(e)		5 + 7 12(g)	c
					7 + 1 8(c)		12(g)	f
							8 + 2 10(f)	h

2°) Donner les plus courtes chaines reliant "a" aux autres sommets ainsi que leurs poids ?

Activité 5 :

Un commerçant effectue ses livraisons d'une ville A à une ville G.
Le tableau ci-contre indique les livraisons d'une ville à une autre ainsi que les coûts de carburant en DT.

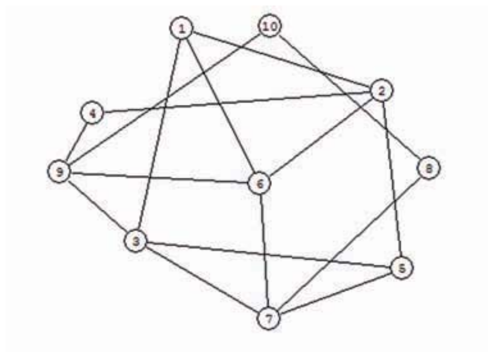
	A	B	C	D	E	F	G
A		3	9				
B			7,2	3	4,8		
C				12		15	18
D					10		60
E						15	
F							7,2

1°) Dessiner un graphe pondéré correspondant à ce tableau.
2°)Déterminer le chemin donnant le coût minimum pour aller de A à G.

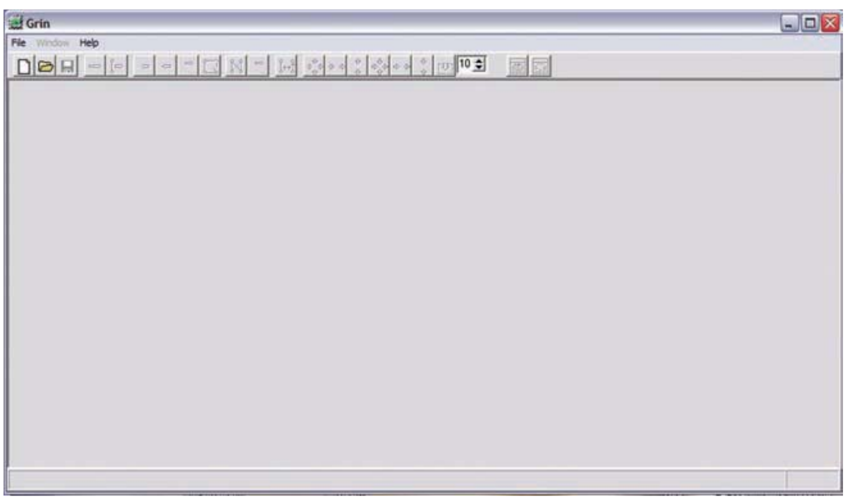
Les deux TP suivants utilisent le logiciel Grin40 téléchargeable gratuitement à l'adresse suivante : http://www.apprendre-en-ligne.net/graphes/logiciel/
Extraire par exemple avec le logiciel Winzip le paquet téléchargé dans un dossier appelé Grin40.

TP1 : recherche d'une chaine eulérienne :

Question : le graphe suivant admet-il une chaine eulérienne ?

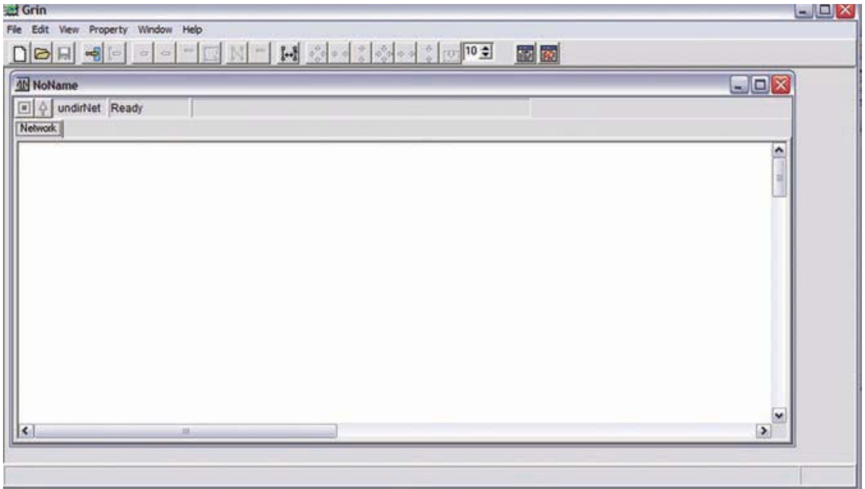


Ouvrir le dossier Grin40 et exécuter 
On obtient :



Ouvrir une nouvelle fenêtre en cliquant sur 

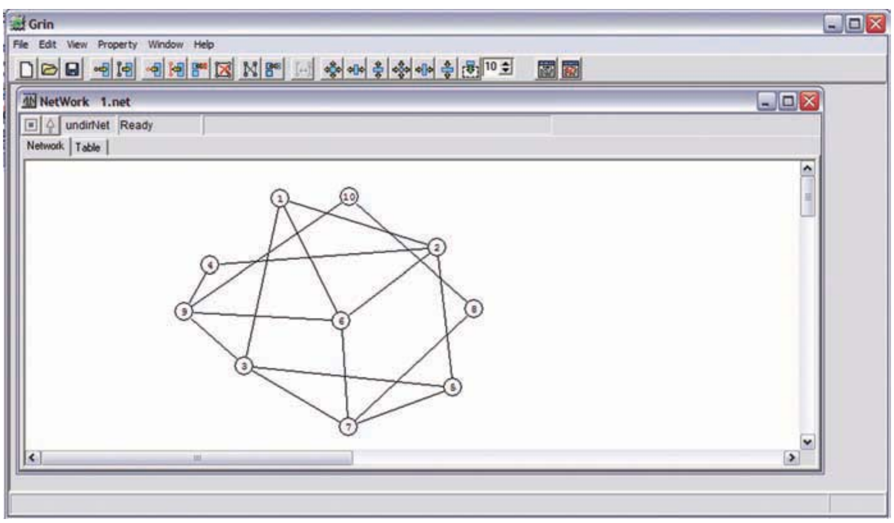
On obtient :



Pour représenter un graphe on commence par :

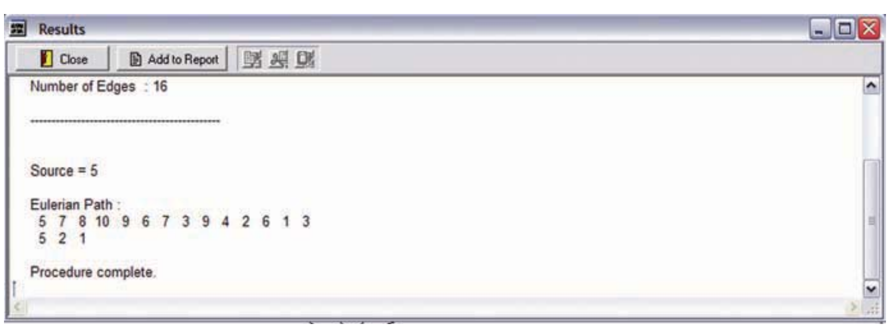
- dessiner ses sommets en cliquant sur (Les sommets sont notées par défaut 1, 2, 3, 4 …etc.)
- Dessiner ses arêtes en cliquant sur puis cliquer successivement sur les deux sommets à joindre.

On obtient :



Aller dans la barre de menu et choisir : **Property/ graph/ eulerian path**

On obtient :



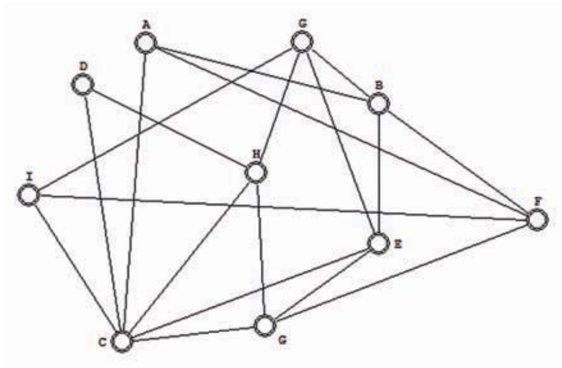
Et on lit le résultat : 5-7-8-10-9-6-7-3-9-4-2-6-1-3

Remarque :

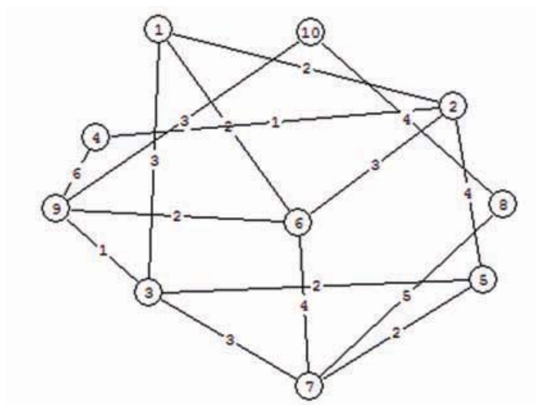
Si on veut changer les caractéristiques d'un sommet (forme-couleur-nom…)
On double clic sur le sommet et on suit les instructions.

Activité :

Trouver une chaine eulérienne dans le graphe suivant :

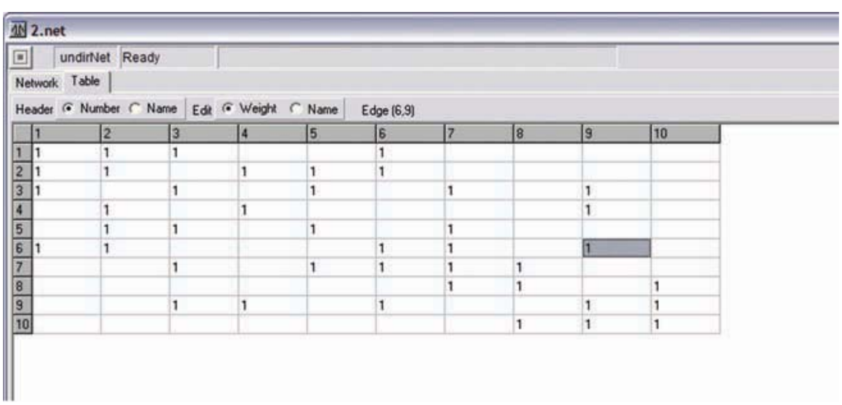


TP2 : recherche d'une plus courte chaine :



Question : Déterminer la plus courte chaine entre les sommets 4 et 7 ?

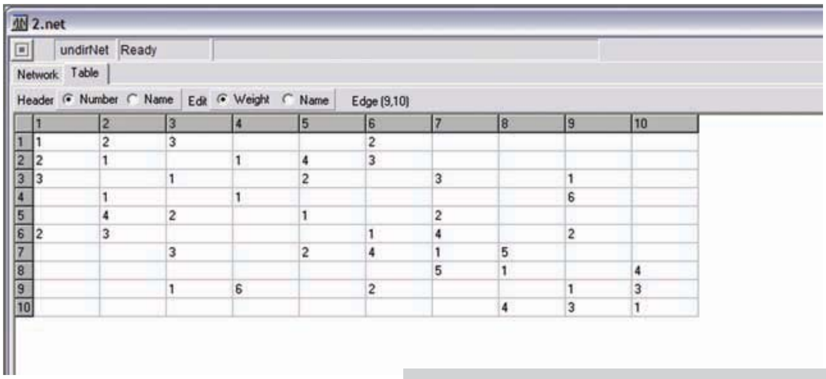
Pour pondérer le graphe aller dans la sous-fenêtre table et sélectionner Number et weight et changer les valeurs qui sont par défaut :



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1			1				
2	1	1		1	1	1				
3	1		1		1		1		1	
4		1		1					1	
5		1	1		1		1			
6	1	1				1	1		1	
7			1		1	1	1	1		
8							1	1		1
9			1	1		1			1	1
10								1	1	1

Chaque case du tableau représente le poids d'une arête. (la case sélectionnée et le poids de l'arête entre les sommets 6 et 9)

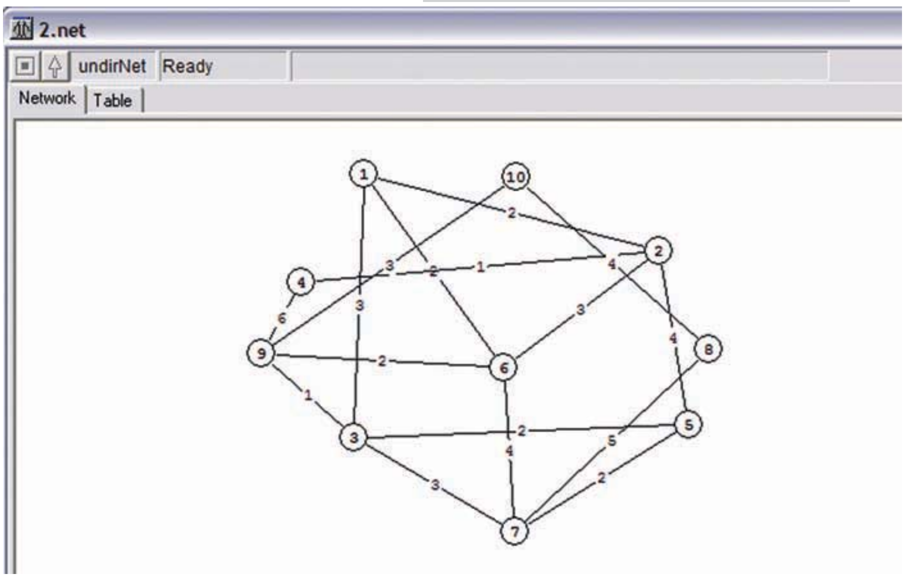
On obtient :



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3			2				
2	2	1		1	4	3				
3	3		1		2		3		1	
4		1		1					6	
5		4	2		1		2			
6	2	3				1	4		2	
7			3		2	4	1	5		
8							5	1		4
9			1	6		2			1	3
10								4	3	1

On revient à la fenêtre network. On exécute : **View/ Show edge weith**

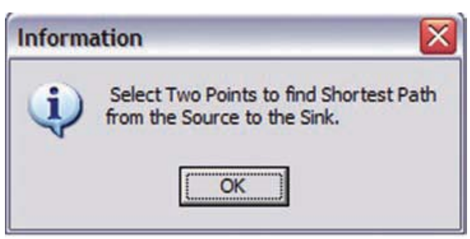
On obtient :



Pour donner la chaine la plus courte entre les sommets 4 et 7 ainsi que son poids on exécute :

Property/Network/shortest path

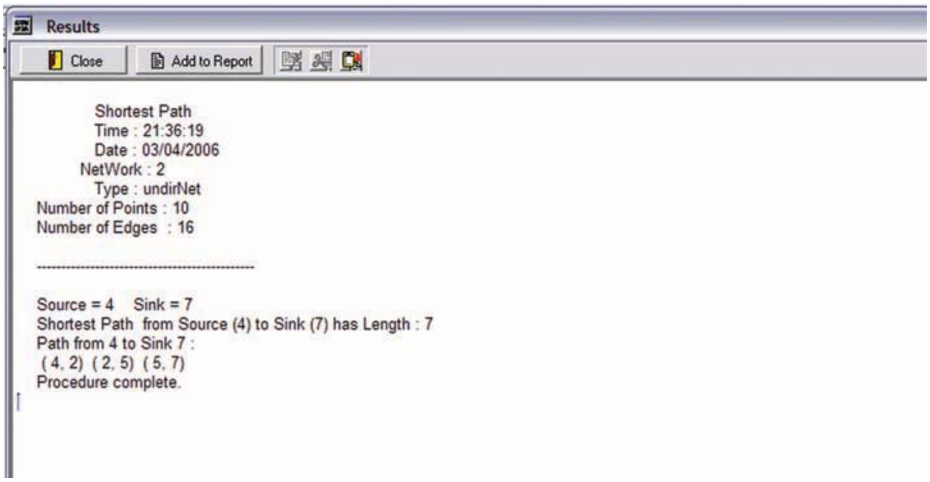
On obtient :



Cliquer sur OK puis sur le sommet 4

Cliquer sur OK puis sur le sommet 7

On obtient :



Donc la chaine la plus courte entre les sommets 4 et 7 est 4-2-5 et 7 a pour poids 7.

Activité :

Dans le graphe précédent trouver la plus courte chaine entre les sommets :

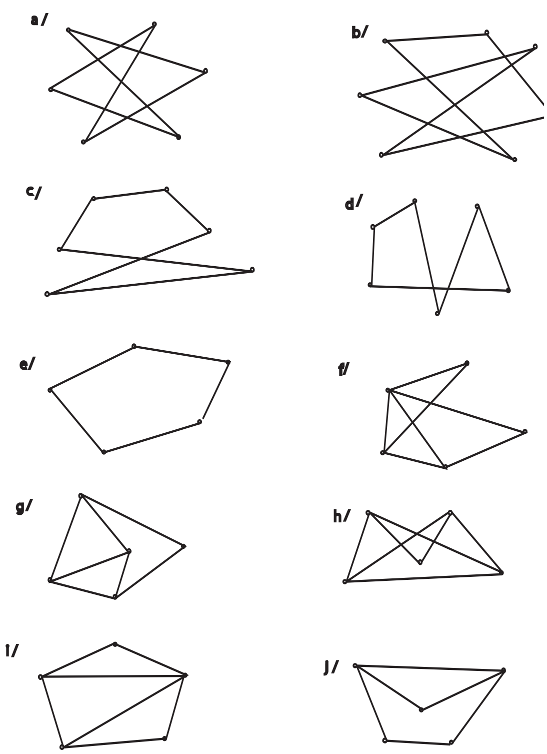
1°) 4 et 8.

2°) 5 et 10.

3°)1 et 10.

1

Parmi les graphes ci-dessous, déterminer ceux qui sont susceptibles de décrire une même situation.



2

Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions; chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays.

1°) Représentez cette situation par un graphe d'ordre 6 dans lequel chaque arête reliant i et j signifie que i espionne j, et j espionne i.

2°) Ce graphe est-il complet ? Est-il connexe ?

3°) **a/** Quel est le degré de chaque sommet ?

b/ En déduire le nombre d'arêtes du graphe.

3

1°) Existe-t-il un graphe d'ordre 5 dont les sommets ont pour degrés respectifs 1, 2, 2, 3, 4 ?

2°) **a/** Existe-t-il un graphe d'ordre 4 dont tous les sommets ont un degré égal à 3 ?

b/ Existe-t-il un graphe d'ordre 5 dont tous les sommets ont un degré égal à 3 ?

4

Dessiner les graphes complets G d'ordre n, pour n = 2, 3, 4, 5. Combien ont-ils d'arêtes ?

5

Dessiner les graphes d'ordre 3, 4, 5, 6 dont tous les sommets sont de degré 2.

6

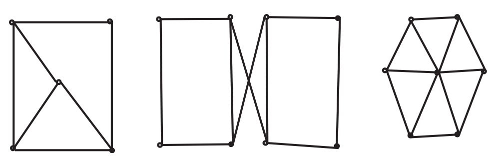
Trois maris et leurs épouses souhaitent traverser une rivière. Ils disposent d'une barque qui ne peut pas transporter plus de deux personnes à la fois. Comment doivent-ils procéder, sachant qu'aucune femme ne veut rester en compagnie d'un ou deux hommes sans que son mari soit présent ?
Montrez que ce problème n'a pas de solution si les couples sont au nombre de 4.

7

Le conseil municipal d'une ville comprend 7 commissions, qui obéissent aux règles suivantes :
Règle 1 : tout conseiller municipal fait partie de 2 commissions exactement.
Règle 2 : deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun ;
Combien y a-t-il de membres dans le conseil municipal ?

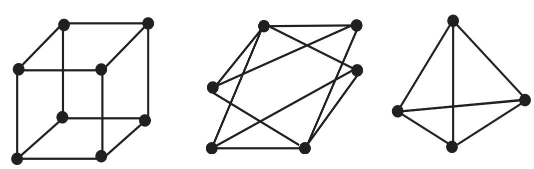
8

Déterminer le nombre chromatique des graphes suivants :



9

On considère les graphes ci-dessous :



Pour chacun d' eux déterminer son nombre chromatique.

10

Une école doit faire passer des tests écrits à quatre élèves : Ali, Fatma, Mohamed et Sarra. Sept disciplines sont concernées : les mathématiques, la physique, la biologie, le français, l'anglais, l'espagnol et l'histoire.

Ali doit passer les mathématiques, la physique et l'anglais, Fatma les mathématiques, la biologie et le français, Mohamed les mathématiques, l'anglais et l'espagnol et Sarra la physique, le français et l'histoire.

Quel est le nombre minimal de plages horaires à prévoir pour qu'aucun élève n'ait à passer deux tests simultanément.

11

On considère le graphe dont les sommets sont les entiers naturels compris au sens large entre 1 et 20 et tel que deux sommets distincts i et j sont reliés si et seulement si $i + j \leq 21$.

1°) Prouver que ce graphe est connexe.

2°) Déterminer le nombre chromatique de ce graphe.

12

On considère le système d'inéquations suivant : $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 \leq 1 \\ x_4 + x_5 \leq 1 \end{cases}$ ou les inconnues ne prennent que la valeur 0 ou la valeur 1. Déterminer une solution de ce système qui maximise la fonction :

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

13

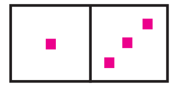
Sept élèves, désignés par A,B,C,D,E,F et G se sont rendus à la bibliothèque aujourd'hui. Le tableau suivant précise « qui a rencontré qui » (la bibliothèque étant petite, deux élèves présents au même moment se rencontrent nécessairement…).

élève	A	B	C	D	E	F	G
a rencontré	D,E	D,E,F,G	E,G	A,B,E	A,B,C,D,F,G	B,E,G	B,C,E,F

De combien de places assises doit disposer la bibliothèque pour que chacun ait pu travailler correctement au cours de cette journée ?

14

On considère un jeu de dominos utilisant les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, tels que, sur chaque domino, figurent deux chiffres distincts par exemple le 1 et le 3



On se propose de résoudre le problème suivant (P): Est-il possible d'aligner tous les dominons de sorte que, lorsque deux pions « se touchent », les chiffres « en contact » soient identiques ?

1°) Représentez cette situation à l'aide d'un graphe G dans lequel chaque arête est un domino et les deux extrémités sont les chiffres figurant sur ce domino.

2°) Expliquez pourquoi le problème (P) est équivalent au problème suivant :

« Le graphe G admet-il une chaîne eulérienne? »

3°) Résolvez le problème (P).

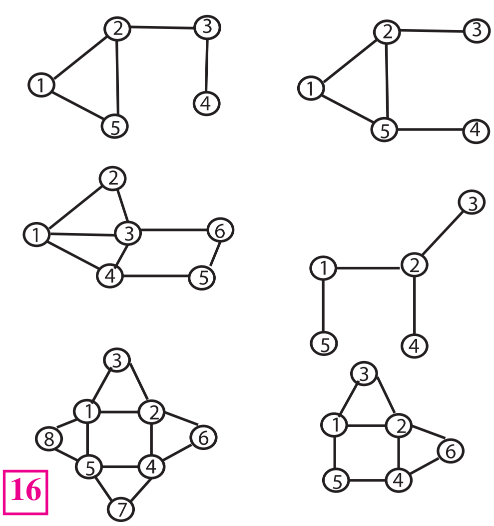
4°) Quelle serait la réponse au problème (P) dans chacun des cas suivants.

a/ Les dominos ne contiennent que les chiffres 0, 1, 2, 3.

b/ Les dominos contiennent les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5,6.

15

Pour les graphes suivants dites s'ils admettents au moins une chaine eulérienne et dans l'affirmative indiquez en une .



16

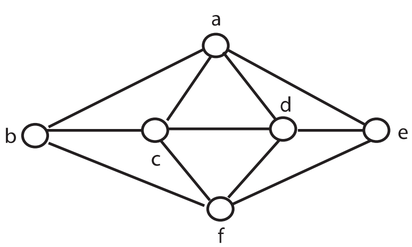
Un grand domaine est partagé entre dix-neuf barons. Est-il possible que chacun ait comme voisins un, cinq ou neuf barons.

17

On appelle N le nombre de personnes ayant vécu ou vivant sur terre qui ont donné un nombre impair de poignées de main. Etudier la parité de N.

18

On considère le graphe G suivant :

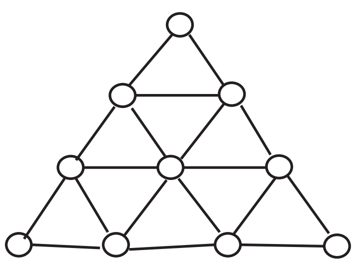


1°) Justifier le fait que G n'admet pas de cycle eulérien mais qu'il admet des chaînes eulériennes.

2°) Déterminer une chaîne eulérienne dans G.

19

1°) Le graphe suivant admet-il un cycle eulérien?



Dans l'affirmative, tracer un tel cycle.

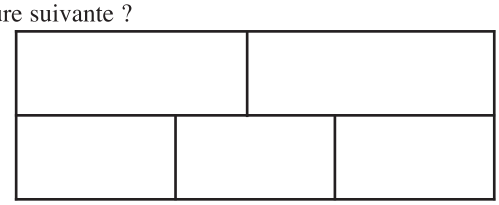
2°) On appelle T_n le graphe obtenu avec n rangées de triangles.

a/ Combien d'arêtes possède T_n ?

b/ T_n possède-t-il un cycle eulérien ?

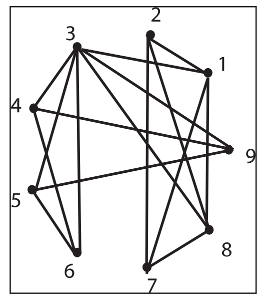
20

Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe une fois et une seule chacun des 16 segments de la figure suivante ?



21

(Village en quarantaine) 9 villages sont reliés par un réseau de routes. On peut les représenter par le graphe suivant :



Mais il y a un point sensible : si on met en quarantaine(on isole) un des villages, il ne sera plus possible d'aller de certains villages à d'autres. Donner le nom d'un tel village.

22

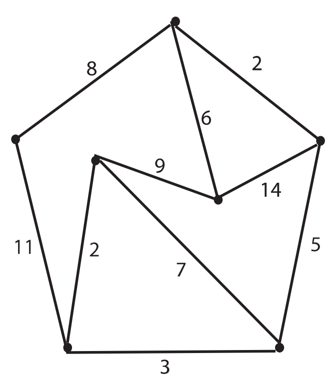
On dispose d'un fil de fer de 120 cm. Est-il possible de préparer une carcasse de cube de 10 cm d'arête sans couper le fil ?

23

Une compagnie aérienne dessert différentes villes. Le tableau ci-contre donne les durées de vol entre ces différentes villes.
Déterminer le trajet le plus rapide entre les deux villes B et D ?

	A	B	C	D	E
A		1h30	2h00		2h15
B					3h00
C				2h55	
D					1h05

24

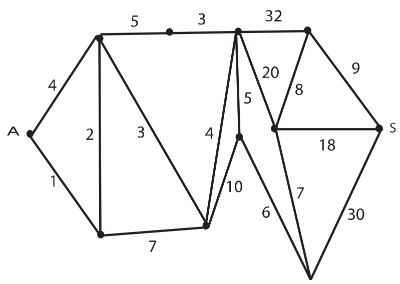


(Exécutez l'algorithme de Dijkstra sur le graphe précédent, à partir du sommet C, puis à partir du sommet F.

Exercices et problèmes

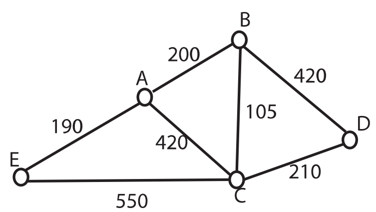
25

Chercher le plus court chemin de A à S dans le graphe suivant :



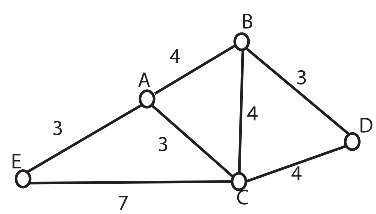
26

1°) Le graphe ci-dessous représente un circuit auto- routier.



Déterminer le chemin le plus court entre D et E.

2°) On note maintenant sur les arêtes les prix des péages en DT



Déterminer l'itinéraire le moins cher entre D et E

27

Mr et Mme X assiste à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance et plusieurs poignées de main sont échangées.
Personne ne serre sa propre main et les époux ne se serrent pas la main. Deux personnes quelconques de l'assemblée se serrent la main au plus une fois.
Mr X constate que les sept autres personnes ont échangé des poignées de main en nombre tous distincts.
Combien de poignées de main Mr et Mme X ont-ils échangés avec les autres membres de la réunion ?

MATH CULTURE

Née des recherches d'Euler au XVIIIe siècle, la théorie des graphes est devenue une branche des mathématiques au début du XXe siècle, grâce aux travaux de Winig, de Kuratowski, de Cayley et, plus récemment, de Berge, d'Erdos et de Harary. Les recherches récentes en informatique et surtout en algorithmique lui donnent un nouveau souffle. La théorie des graphes permet de résoudre efficacement une grande variété de problèmes pratiques ou récréatifs en les ramenant à des configurations qui se dessinent simplement à l'aide de points et de liaisons entre ces points.

On fait généralement remonter la théorie des graphes au problème dit «des ponts de Königsberg» (Kaliningrad). Résolu par Leonhard Euler en 1736, ce problème, à l'allure de casse-tête, s'énonce ainsi : est-il possible, en partant d'une zone de la ville, de retourner dans la même zone en traversant chacun de ses sept ponts une fois et une seule ?

La théorie des graphes sert avant tout à représenter et à organiser les tâches de façon optimale après avoir traduit un problème sous forme de graphe, on cherche des méthodes systématiques qui permettent de trouver la succession la plus rapide ou la moins coûteuse pour effectuer toutes les tâches.

De fait, ses applications pratiques sont très diverses

- Optimisation des réseaux de transport
- Transports routiers ou transports d'information
- Conception de réseaux électriques, de réseaux de communication,
- Mécanique statistique, formules chimiques, informatique théorique, sciences sociales, géographie, architecture...

Il n' y a pas des problèmes qu 'on se pose il ya des problèmes qui se posent
HENRI POINCARÉ

SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Chapitre 6

- **Pour commencer**
- **Cours**
  - I - Système de deux équations linéaires du premier degré à deux inconnues.
  - II - Système de trois équations linéaires du premier degré à trois inconnues
  - III - Système de quatre équations linéaires du premier degré à trois inconnues
- **Utilisation des T.I.C.**
- **Exercices et problèmes**
- **Math culture.**

Activité 1:

On donne l'équation du premier degré à deux inconnues (E) : $2x - 7y = 4$
a/ Exprimer x en fonction de y puis y en fonction de x.
b/ Trouver trois couples solutions de l'équation (E).
c/ Est ce que chacun des couples suivants est une solution de (E)
$(1, 0)$; $(2, -1)$; $(5, -2)$; $(0, 5)$.

Activité 2 :

La solution du système $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ -3x + 2y \end{cases}$ est

a/ le couple $(2, 5)$; **b/** $x = 2$ ou $y = 5$; **c/** $\{2,5\}$.

Activité 3 :

Déterminer mentalement la solution de chacun des systèmes suivants :

$\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 25 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x + 3y = 17 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases}$; $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ y = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

Activité 4 :

Soit le système suivant (S) : $\begin{cases} 5x - 3y = 5 \\ 2x + y = 26 \end{cases}$

a/ Le couple $(4, 5)$ est il solution du système ?
b/ Résoudre le système (S).

Activité 5 :

Dans le plan muni d'un repère on considère les droites D et Δ d'équations respectives
$2x - 8y + 8 = 0$ et $3x - y - 10 = 0$
a/ Déterminer la position relative de D et Δ.

b/ Le système suivant $\begin{cases} 2x - 8y = -8 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$ admet-il des solutions ?

c/ Résoudre le système et en déduire les coordonnées du point d'intersection éventuel de D et Δ.
d/ Ecrire un autre système de deux équations linéaires dont la solution est le couple des coordonnées du point d'intersection des droitesD et Δ

Activité 6 :

Reprendre les questions a) et b) de l'activité précédente où $D: 2x + 3y = 5$ et $\Delta : x + \frac{3}{2}y = 2.$

Activité 7 :

Soit le système suivant $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - 3y = -4 \end{cases}$

a/ Trouver un couple de nombres qui vérifie la première équation mais pas la deuxième.
b/ Donner un couple de nombres qui vérifie la deuxième équation mais pas la première.
c/ Déterminer le couple de nombres qui vérifie le système.

Activité 8 :

Résoudre les systèmes : $\begin{cases} 3x - y = y \\ 2x + y = 6 \end{cases}$; $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ y + 2x = -7 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 2x + 7 \\ y = 1 - x \end{cases}$

Activité 9 :

Dans l'énoncé suivant certaines données sont effacées. On sait que la mise en équation du problème conduit au système suivant $\begin{cases} x + y = 25 \\ 30x + 10y = 590 \end{cases}$

a/ Retrouver les données effacées.

Mohamed a … billets de monnaie, les unes de … dinars et les autres de … dinars. Le montant total de ces billets est de … dinars

b/ Combien de billets de chaque sorte a-t-il ?

Activité 10 :

Le triplet (4 , 1 , -1) est il une solution du système $\begin{cases} x - y = 3 \\ y - z = 2 \\ z + x = 3 \end{cases}$?

Activité 11 :

Est ce que le système $\begin{cases} 2x - 5y + z = -3 \\ x - y + 2z = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ a pour solution S ={0, 1, 2} ?

I- Systéme de deux équations linéaires du premier degré à deux inconnues

Activité 1 :

Cinquante livres placés l'un sur l'autre ont une hauteur de 2,1 mètres. Certains d'entre eux ont une épaisseur de 5 cm alors que les autres ont pour épaisseur 3 cm.
Déterminer le nombre de livres de chaque épaisseur.

Définition

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues est un système qui peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b' et c' sont des réels avec $(a,b) \neq (0,0)$ et $(a', b') \neq (0,0)$

- a, a', b, b' sont appelés les coefficients des inconnues.
- c et c' sont les coefficients du second membre.

Activité 2 :

Soit le système de deux équations suivant :

$$\begin{cases} x - 2y = 5 & (1) \\ 3x + y = 8 & (2) \end{cases}$$

a/ Exprimer dans la première équation x en fonction de y.
b/ Remplacer l'expression de x ainsi obtenue dans l'équation (2).
c/ Déterminer y et en déduire x.

Vocabulaire

La méthode décrite dans l'activité précédente est la résolution par substitution.

Définition

La substitution consiste à :

- Exprimer une des deux inconnues en fonction de l'autre en utilisant une des deux équations formant le système;
- Remplacer cette inconnue dans l'autre équation;
- Résoudre l'équation obtenue qui est à une seule inconnue;
- Calculer éventuellement l'autre inconnue;
- Conclure.

Activité 3 :

Résoudre par substitution chacun des systémes suivants :

$$\begin{cases} 3x - 3y = -4 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x - 3y = 4 \\ \dfrac{5}{3}x - 5y = \dfrac{20}{3} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 0{,}5\,y = 4 \end{cases}$$

Activité 4 :

On considère le système (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Deux systèmes sont équivalents si et seulement si ils ont le même ensemble de solutions

On suppose que a ≠ 0 (modulo l'échange de l'ordre des deux équations et des deux inconnes) .

1°) Montrer que le système (S) est équivalent au système (S') $\begin{cases} x + \dfrac{b}{a}y = \dfrac{c}{a} \\ y(ab' - a'b) = ac' - a'c \end{cases}$

2°) Discuter suivant $ab' - a'b$ et $ac' - a'c$ le nombre de solutions du système.

Vocabulaire et notation

Le réel $ab' - a'b$ s'appelle le déterminant du système et on le note $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$.

Théorème

Soit le système (s) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

- si $ab' - a'b \neq 0$, alors (S) admet une solution unique dans IR^2.
- si $ab' - a'b = 0$ et $ac' - a'c = 0$, alors le système (S) admet une infinité de solutions dans IR^2.
- si $ab' - a'b = 0$ et $ac' - a'c \neq 0$, alors le système (S) n' admet pas de solution .

Activité 5 :

Sans résoudre les systémes suivants indiquer si chacun d' eux a une seule slution on a une infinité de solutions ou n'en a pas .

(S_1) $\begin{cases} 4y + 3x = 5 \\ 2x - 5y = 11 \end{cases}$ (S_2) $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -6x + 9y = 1 \end{cases}$ (S_3) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$

Activité 6 :

Durant une saison, un magasin a vendu 100 pantalons et 80 chemises. Le chiffre total de ses ventes est de 6000 dinars.

Son bénéfice est de 30 % sur le prix de vente d'un pantalon et de 25 % sur celui d'une chemise; son bénéfice total est de 1750 dinars.

Quel est le prix de vente d'un pantalon et celui d'une chemise ?

Activité 7 :

Deux frères ont ensemble 1065 dinars.

Le premier place son argent dans un compte bloqué à un taux de 5 % par an alors que le deuxième le place dans un compte bloqué à un taux de 8 % par an.

Au bout d'un an les deux frères ont la même fortune (capital + intérêt).

Déterminer le capital initial de chacun d'eux.

Activité 1 :

A un gérant d'un magasin, on a proposé deux formules pour son salaire en fonction du chiffre d'affaires en milliers de dinars.

- La première formule : le gérant touche chaque mois 10 % du chiffre d'affaires.
- La deuxième formule : il touche chaque mois 200 dinars plus 8 % du chiffre d'affaires.

On note x le chiffre d'affaires en milliers de dinars et y le salaire du gérant en milliers de dinars.

1°) a/ Exprimer y en fonction de x pour chacune des deux formules.

b/ Quel est le chiffre d'affaires pour lequel les deux formules donnent le même salaire?

2°) Dans un même repère tracer les droites d'équations respectives $y = 0{,}1x$ et $y=0{,}08x+0{,}2$.

3°) Indiquer graphiquement, en fonction du chiffre d'affaires, quelle est la formule la plus intéressante pour le gérant.

4°) On suppose qu'on lui propose la troisième formule suivante : il touche 400 dinars plus 2 % du chiffre d'affaires.

Indiquer graphiquement, en fonction du chiffre d'affaires, la formule la plus intéressante pour ce gérant.

II- Système de trois équations linéaires du premier degré à trois inconnues

Activité 1 :

Trois garçons désirent connaître leurs poids à l'aide d'une vieille bascule dont l'aiguille ne descend plus au dessous de 50 kg ; ils montent deux à deux et notent :

- Mohamed et Ali : 75 kg
- Ali et Ahmed : 85 kg
- Ahmed et Mohamed : 80 kg.

On note x, y et z les poids, en kg, respectifs de Mohamed, Ali et Ahmed.

a/ Ecrire le système vérifié par x, y et z.

b/ Exprimer x en fonction de y.

c/ Remplacer l'expression de x ainsi obtenue dans les deux autres équations.

d/ Résoudre le système de deux équations d'inconnues y et z.

e/ Déduire alors la valeur de x.

Définition

Un système de trois équations linéaires à trois inconnues est un système qui peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

où a, b, c,d, a', b', c',d', a'', b'', c'' et d'' sont des réels avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$;$(a', b',c') \neq (0,0,0)$ et $(a'', b'', c'') \neq (0,0,0)$

❖ a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'', sont appelés les coefficients des inconnues.

❖ d, d', d'' et c' sont les coefficients du second membre.

Activité 2 :

On veut placer 42300 dinars en trois parties : l'une à 6% d'intérêt par an, la seconde à 8% d'intérêt par an et la troisième à 10% d'intérêt par an .

On appelle x le premier part, y le deuxième part et z le troisième part.

On veut déterminer la valeur de chaque part pour qu'ils produisent les mêmes intérêts annuels?

a/ Ecrire le système vérifié par x, y et z.

b/ Exprimer x en fonction de y et z.

c/ Remplacer l'expression de x ainsi obtenue dans les deux autres équations.

d/ Résoudre le système des deux équations d'inconnues y et z.

e/ Déduire alors la valeur de x.

Vocabulaire : Dans les activités 1 et 2 on a procédé par substitution .

Définition

La substitution consiste à :

- Exprimer une des trois inconnues en fonction des deux autres.
- Remplacer cette inconnue par son expression ainsi obtenue dans les deux autres équations qui formeront un système de deux équations à deux inconnues.
- Résoudre le système, des deux équations à deux inconnues ,obtenu.
- Retrouver éventuellement la troisième inconnue.

Activité 3 :

Résoudre par substitution les systèmes suivants :

$$(S_1)\ \begin{cases} 2x+5y-z=4 \\ -x+4y+2z=3 \\ 4x-3y+6z=-2 \end{cases} \qquad (S_2)\ \begin{cases} 2x-y+3z=5 \\ x+2y-z=-1 \\ -x-7y+6z=2 \end{cases} \qquad (S_3)\ \begin{cases} x-3y+z=2 \\ x-z=3 \\ -2x+6y-2z=-4 \end{cases}$$

Principes de transformation d'un système en un système qui lui est équivalent

Pour déterminer la ou les solutions éventuelles d'un système linéaire du premier degré à plusieurs inconnues réelles on va adopter les opérations élémentaires suivantes en admettant qu'elles permettent de transformer un système (S) en un système (T) qui lui est équivalent.

- On peut échanger l'ordre des équations linéaires. Cette opération est codée $L_i \longleftrightarrow L_j$.
- On peut échanger l'ordre des inconnues tout en conservant leurs coefficients respectifs.
- On peut remplacer une équation par son produit par un nombre réel α non nul qu'on code par $L_i \leftarrow \alpha L_i$.
- On peut remplacer une équation L_i par $L_i + \alpha L_j$ $(i \neq j)$ qu'on code par $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$
- On supprime l'équation L_i s'il existe un réel α tel que les équations L_i et αL_j $(i \neq j)$ soient les mêmes.

Activité 4 :

Soit le système suivant (S): $\begin{cases} x + y - z = 15 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ 5x - 2y - 7z = 0 \end{cases}$

1°) Transformer (S) en (S_1) en changeant l'équation L_2 par ($L_2 - 2L_1$) et l'équation L_3 par ($- L_3 + 5L_1$).

2°) Transformer (S_1) en (S_2) en changeant l'équation L_3 par ($5L_3 + 7L_2$). .

3°) a/ Déterminer z à partir de l'équation L_3de (S_2) puis remonter les calculs pour déterminer y d'abord et enfin x.

b/ Quel est alors l'ensemble des solutions de (S) ?

Activité 5 :

Soit le système suivant (S): $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = a \\ x - 2y + 3z = b \\ 4x - y + 4z = c \end{cases}$

1°) Transformer le système (S) en système (S_1) en échangeant les lignes L_1 et L_2.

2°) Transformer le système (S_1) en un système (S_2) en changeant L_2 par $L_2 - 2L_2$ et L_3 par $L_3 - 4L_1$.

3°) Transformer (S_2) en (S_3) en changeant L_3 par ($L_3 - L_2$).

4°) Discuter suivant les valeurs de a, b et c l'ensemble des solutions du système (S_3).

Vocabulaire : Dans les activités 4 et 5 on a procédé par élimination algorithmique dite **la méthode du pivot de Gauss .**

Cette mèthode consiste à suivre les étapes décrites ci - dessous :

Première étape

- avoir à la première ligne une équation où la première inconnue figure.
- éliminer des deux autres équations la première inconnue par les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 + \alpha L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + \beta L_1$

Deuxième étape

- avoir à la deuxième ligne une équation où la deuxième inconnue figure.
- éliminer de la troisième équation la deuxième inconnue par une opération élémentaire$L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_2$

Troisième étape

Déterminer à partir de L_3, éventuellement la troisième inconnue puis remonter pour déterminer la seconde et enfin la première inconnue.

Remarque

La méthode du pivot de Gauss peut s'appliquer à tout système de **n** équations linéaires du premier degré à **m** inconnues ($n \geq 2$; $m \geq 2$) .

Activité 6 :

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1)\quad \begin{cases} x + y + 3z = 4 \\ 2x - y + z = -3 \\ 3x + 2y - 5z = 33 \end{cases} \qquad (S_2)\quad \begin{cases} x + 8y - 3z = 2 \\ -x + 3y - z = 2 \\ 5x - 4y + z = 6 \end{cases}$$

$$(S_3)\quad \begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 4 \end{cases} \qquad (S_4)\quad x - y = y - z = z - x = 1$$

Théorème

L'ensemble des solutions d'un système de trois équations linéaires du premier degré à trois inconnues peut être :

- vide
- un singleton
- infini

Activité 7 :

La quantité demandée d'un bien de consommation sur un marché dépend du prix de ce bien, mais aussi d'autres biens. Il en est de même pour la quantité offerte.
Ainsi la quantité de viande sur le marché dépend du prix des ovins mais aussi de celui des aliments pour la nourriture des ovins et de celui de la volaille ou et du poisson.
Le marché est dit en équilibre général lorsque pour chaque bien donné, la quantité demandée est égale à la quantité offerte.
Pour trois biens A, B et C les quantités demandées sont respectivement
$20 - 3P_A + P_B + P_C$, $30 + P_A - 5P_B$ et $150 + P_A - 3P_C$;
(P_X :le prix du bien X en dinars)
Alors que leurs quantités offertes respectives sont 18,6 ; 11 et 12,1.
Déterminer les prix d'équilibre de ces trois biens.

Activité 8 :

Une personne possède 21 pièces : 10 de type 100 millimes, 7 pièces de type 500 millimes et 4 pièces de type 1 dinar.
La pile des 21 pièces a pour hauteur 39,4 mm.
Une pile constituée de 3 pièces de type 500 millimes et 4 pièces de type 1 dinar ou une pile de 5 pièces de types 100 millimes et de 3 pièces de type 500 millimes a pour hauteur 14,6 mm.
Quelle est l'épaisseur de chaque type de pièces ?

Activité 9 :

Dans une usine, le salaire mensuel des employés est de 352 dinars, celui des techniciens est le double de celui des employés alors que celui des cadres est de 1056 dinars.
La masse salariale mensuelle de cette usine s'élève à 19008 dinars pour un salaire moyen de 432 dinars. Pour des raisons économiques, la direction doit diminuer la masse salariale de 2%.
Cette diminution se répartit alors comme suit :

- une baisse de 1% sur le salaire des employés
- une baisse de 3% sur le salaire des techniciens
- une baisse de 6% sur le salaire des cadres

1°) Quel est le nombre total des salariés ?
2°) Déterminer l'effectif de chaque catégorie de salariés.

III– Système de quatre équations linéaires du premier degré à trois inconnues

Activité 1 :

1°) On considère le système (S) $\begin{cases} a - b + c = \alpha \\ 4a + 2b + c = \beta \\ 4a - 2b + c = \lambda \\ -2a + b = 0 \end{cases}$ où α, β et λ sont des réels donnés.

Montrer en appliquant la méthode du pivot de Gauss que le système (S) est équivalent

au système (T) $\begin{cases} c - b + a = \alpha \\ b - 2a = 0 \\ 9a = \beta - \alpha \\ 0 = 8\alpha + \beta - 9\lambda \end{cases}$

2°) Soit P la parobole d'équation $y = ax^2 + bx + c$

a/ Déterminer les réels a, b et c tels que

- P passe par A(-1 , 1) ; B(2 , 10) et C(-2 , 2)
- A soit le sommet de P

b/ Existe-t-ils des coefficients réels a, b et c tels que

- P passe par E(-1 , 0) ; F(2 , 1) et G(-2 , 7)
- E soit le sommet de P

Activité 2 :

On considère le système (S) $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x - y + 4z = b \\ 4x + 3y - 2z = c \\ 3x + y + z = d \end{cases}$ où a, b, c et d sont des réels donnés.

1°) Effectuer les transformations codées $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, et $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$ pour obtenir un système (S_1) équivalent à (S).

2°) On suppose que $a \neq c - d$ ou que $d \neq a + b$.
Quel est l'ensemble des solutions de (S) ?

3°) On suppose que $a = c - d$ et $d = a + b$

a/ Déduire que (S) est équivalent à (S_2) $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 3x + y + z = a + b \end{cases}$

b/ Exprimer alors x et y en fonction de z, a et b.

c/ Quel est alors l'ensemble des solutions de (S) ?

Théorème

L'ensemble des solutions d'un système de quatre équations linéaires du premier degré à trois inconnues peut être :

- vide
- un singleton
- infini

Activité 3 :

Résoudre les systèmes suivants

(S_1) $\begin{cases} x - 3y + 3z = -5 \\ y - z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = -6 \\ -x + 2y + z = -3 \end{cases}$;(S_2) $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 2y - 3z = -6 \\ -x - 2y + z = -1 \end{cases}$ (S_3) $\begin{cases} 2x - z = 3 \\ x + 6y + z = 0 \\ x - y + 2z = -1 \\ x + 3y - 4z = 4 \end{cases}$

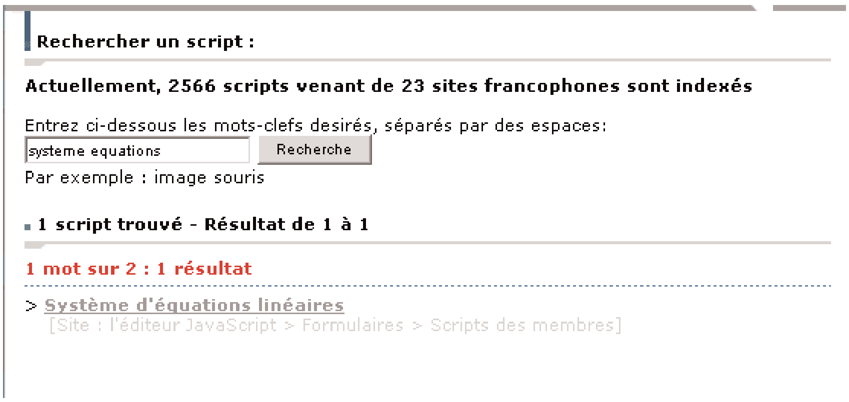
Pour résoudre un système d'équations linéaires à n équations à n inconnues télécharger gratuitement à l'adresse : http://www.editeurjavascript.com " le : script : Système d'équations linéaires " .

Le script vous donnera la réponse ou il signalera que l'ensemble des solutions est vide ou infini.

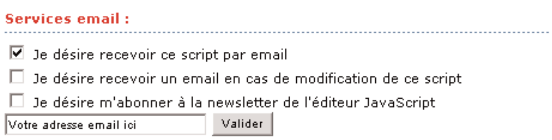
A - Pour télécharger ce script il suffit de suivre les étapes suivantes :

✔ Contacter l'adresse : http://www.editeurjavascript.com

on obtient



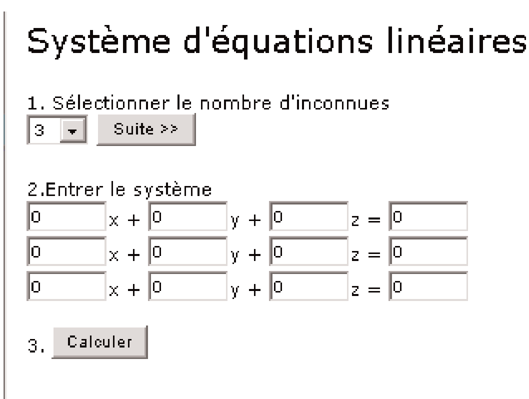
¸ Taper les mots-clefs : " système d'équations ", et cliquer sur " Recherche "on obtient :



✔ Taper votre adresse email et cliquer sur " valider ".

✔Enfin, contacter votre email et télécharger "Pièce jointe au format texte brut [Télécharger | "

✔Ouvrir le fichier, on obtient :



B – Utilisation du script

$$\begin{cases} -x + 2y - z = -1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -x + 3y + 2z = 14 \end{cases}$$

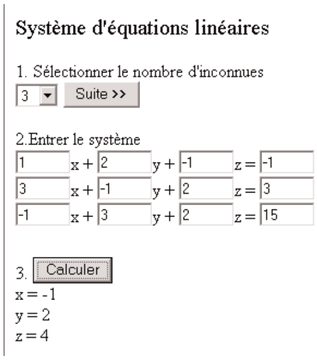
Système d'équations linéaires

1°) sélectionner le nombre d'inconnues : 3 et cliquer " Suite "

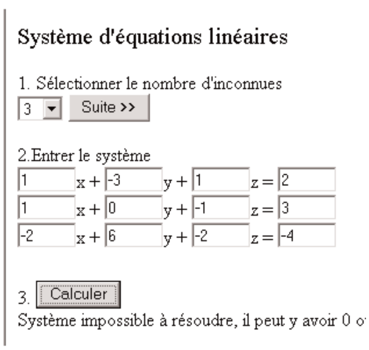
2°) entrer les coefficients des équations

3°) cliquer " Calculer "

On obtient



Exemple 2: résoudre le système suivant $\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ x - z = 3 \\ -2x + 6y - 2z = -4 \end{cases}$



Exercice et problèmes

1

Résoudre par substitution les systèmes suivants :

$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x - y = 9 \\ 2x - 3y = 11 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

2

Cocher la réponse correcte.

1°) le système $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 5y = 1 \end{cases}$

a/ n'a pas de solution ;
b/ a un seul couple solution ;
c/ a une infinité de couples solutions.

2°) le système $\begin{cases} x - \frac{2}{3}y = 1 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$

a/ n'a pas de solution ;
b/ a un seul couple solution ;
c/ a une infinité de couples solutions.

Pour les exercices 3 à 7, résoudre les systèmes proposés.

3

$\begin{cases} 5x - 4y = 45 \\ x + y = 18 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x - 4y = 45 \\ x + y = -18 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x - 4y = 45 \\ (x + y)^2 = 324 \end{cases}$

4

$\begin{cases} x + y = 35 \\ 3x - 4y = 112 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + y^2 = 35 \\ 3x^2 - 4y^2 = 112 \end{cases}$

5

$\begin{cases} 2x + y = 14 \\ 3x + 2y = 19 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 14 \\ 3x^2 + 2y^2 = 19 \end{cases}$

6

$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ 3x + 7y = 33 \end{cases}$; $\begin{cases} \sqrt{x} - 2\sqrt{y} = -2 \\ 3\sqrt{x} + 7\sqrt{y} = 33 \end{cases}$

7

$\begin{cases} x - y = \frac{1}{4} \\ 2x + 3y = \frac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{2} \end{cases}$

8

1°) Résoudre le système suivant :

$\begin{cases} x - 5y = -3{,}8 \\ 3x + 2y = 12{,}4 \end{cases}$

2°) Déduire l'ensemble des solutions de chacun des systèmes suivants :

$(S)\begin{cases} x - 5y = -3{,}8 \\ 3x + 2y = 12{,}4 \\ 5x + y = 17{,}4 \end{cases}$ $\qquad (T)\begin{cases} x - 5y = -3{,}8 \\ 3x + 2y = 12{,}4 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

9

On considère le système suivant :

$\begin{cases} \alpha x + 2y = 3 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$, α est un paramètre réel.

1°) On suppose que $\alpha = 7$. Combien le système a-t-il de solutions ?
2°) On suppose que $\alpha = 6$, le système a-t-il des solutions ?
3°) Déterminer α pour que le système admette une solution unique.

10

Soit le systéme $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 3x + 8y - 5z = 11 \end{cases}$

En combinant la première ligne de ce système avec chacune des lignes suivantes, vérifier que l'on obtient deux équations équivalentes :

Exprimer alors y en fonction de z, puis x en fonction de z.
En déduire que le système admet une infinité de triplets solutions dépendants du réel z.

Pour les exercices 11 et 12, résoudre les systèmes proposés.

11

$$\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ 2z + 3x = 7 \\ 5x = 2 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x - y = 5 \\ 3x + y + z = -1 \\ z + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ x + 2z = 3 \\ x - 2z = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x - 2y + 5z = -3 \\ 2x - 5y - z = -33 \\ x - 3y + 2z = -11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 3z = 4 \\ 2x - y + z = -3 \\ 3x + 2y - 5z = 33 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 3x + y + 2z = 1 \\ -x + 3y - 5z = 2 \\ 2x - y + 3z = -1 \end{cases}$$

12

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 3x - y + z = -2 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ -2x + y + 3z = 9 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x - 5y + 2z = -2 \\ 3x - 4y - 3z = 6 \\ 7x + 2y + 4z = 3 \\ 6x - 8y + 1 = 5 \end{cases}$$

13

Une usine fabriquant des torchons et des serviettes décide de les vendre par lots :
- lot " ménage " : 9 torchons et 6 serviettes;
- lot " repas " : 2 torchons et 12 serviettes.

Elle a en stock 3200 torchons et 4800 serviettes.
Combien de lots de chaque sorte doivent être vendus pour épuiser le stock ?

14

Dans un même magasin, trois amis achètent les mêmes types d'articles :
- Mohamed : 1 feutre, 1 stylo à bille et 1 marqueur pour 1,550 dinar
- Ali : 5 feutres, 4 stylos à bille et 2 marqueurs pour 5,400 dinars.
- Ahmed : 3 feutres, 4 stylos à bille et 1 marqueur pour 3,500 dinars.

Déterminer le prix de chaque article.

15

Un chef d'entreprise partage une prime exceptionnelle de 7000 dinars entre trois employés, proportionnellement à leur ancienneté : 15 ans, 8 ans et 5 ans.
Combien donne –t-il à chacun ?

16

On veut placer 94000 dinars en trois parties : l'une à 6 % l'an, la deuxième à 8 % l'an, et la troisième à 10 % l'an.
Trouver les trois parts qui produisent les mêmes intérêts annuels.

17

Dans un champ de forme triangulaire, trois chèvres sont attachées, par une corde, à chaque sommet d'un triangle ABC.
Calculer la longueur de chaque corde pour que les trois secteurs de champ à brouter soient tangents deux à deux.(On donne AB = 65 m, AC = 68 m et BC = 51 m)

18

a et b sont deux entiers pris parmi 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

On considère le système (S) $\begin{cases} ax + 5y = 2 \\ 2x + by = 3 \end{cases}$

1°)a/ Calculer le déterminant de ce système.
b/ Pour quels couples (a , b) ce déterminant est nul ?
c/Pour chacun de ces couples, résolvez (S).
2°) On jette simultanément deux dés, un dé rouge et un dé noir, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On note a le numéro porté par la face supérieure du dé rouge et b le numéro porté par la face supérieure du dé noir.
Quelle est la probabilité que le système (S) correspondant au lancer des deux dés ait une solution unique ?

19

Pour une classe le professeur souhaite relever la moyenne des notes d'un devoir en prenant en compte le travail sérieux fourni par 10 élèves.
S'il augmente de 1 point la note de ces dix élèves, la moyenne de la classe serait égale à 9,5.
S'il augmente de 2 points la note de ces dix élèves, la moyenne de la classe serait égale à 10.
Trouver le nombre d'élèves et la moyenne initiale.

EXERCICE ET PROBLÈMES

20

Une piscine est alimentée par deux robinets de débits (exprimés en litres par heure) différents.
Le premier robinet étant ouvert pendant 10 heures et le second pendant 4 heures, ils ont fourni 1490 litres d'eau.
Alors qu'en les ouvrant respectivement pendant 6 heures et 8 heures, ils ont fourni 1370 litres.
Quel est le débit de chaque robinet ?

21

Si on augmente de 5 m la largeur d'un rectangle et de 4 m sa longueur, son aire augmente de $116 m^2$.
Si on diminue sa largeur de 2 m et sa longueur de 3 m, l'aire diminue de $45\ m^2$ .Calculer les dimensions du rectangle.

22

Les économies de Mohamed sont le triple de celles de Ahmed. Chacun reçoit 60 dinars ;les économies de Mohamed sont alors le double de Ahmed. Calculer le nouveau montant de leurs économies respectives.

23

Une entreprise fabrique des jouets en bois qui nécessitent pour :
- un camion : 2 kg de bois et 3 heures de travail;
- un pantin : 500 g de bois et 4 heures travail;
- un chien à traîner : 800 g de bois et 3,5 heures de travail.

Déterminer le nombre de camions, de pantins et de chiens fabriqués pendant une journée si l'on utilise exactement 91 kg de bois, 313 heures de travail et que l'on fabrique 89 objets au total.

24

Considérons deux produits A et B de prix p et p'. Supposons que :

- 14,6 -2p + 3p' soit la quantité du produit A demandée, et 30 – 5p – 7p' soit la quantité du produit B demandée;
- 10 + 14p + p' soit la quantité de produit A offerte, et 2,4 + 3p + 12p' soit la quantité de produit B offerte.

Calculer p et p' lorsque le marché est en équilibre dans un régime de libre concurrence, c'est-à-dire lorsque la quantité demandée d'un bien est égale à la quantité offerte de ce bien.

25

Dans une entreprise, composée de 8 ouvriers, 5 agents techniques et 2 cadres, la masse salariale est de16000 dinars.
Les salaires des deux cadres correspondent à trois fois le salaire moyen d'un ouvrier et une fois le salaire moyen d'un agent.
Si on augmente le salaire moyen des ouvriers de 10 %, celui des agents de 8 % et celui des cadres de 5 %, la masse salariale augmente de 1300 dinars.
Calculer le salaire moyen de chaque catégorie.

26

Une firme multinationale fabrique des motos dans trois usines : l'une au Japan, l'autre en Grande-Bretagne et la dernière en France.
Les capacités de production journalière des trois unités de production sont données par le tableau ci-dessous:

Unité / Modèle	japonaise	britannique	française
A	140	20	5
B	110	260	2
C	400	80	280

Au premier janvier 2007, les commandes enregistrées s'élèvent à 38650 modèles A, 64240 modèles B, 158800 modèles C.

1°) Déterminer le temps de travail (en jours) qu'il faudra aux trois unités pour répondre à cette commande.

2°) Quelle sera la production totale de l'usine japonaise ?

3°) Quelle sera la production du modèle B par l'usine britannique ?

27

dans une entreprise, pour la fabrication de trois types d'appareils X, Y et Z, on a besoin de plaques de circuits intégrés, de transistors, de condensateurs et de résistances.
Les quantités nécessaires sont données par le tableau suivant :

composant / appareil	plaque	transistor	Condensateur	résistance
X	1	4	3	6
Y	1	1	2	3
Z	1	3	5	8

On appelle x, y et z le nombre d'appareils, respectivement de type X, Y et Z, que cette entreprise désire fabriquer à l'aide du stock disponible.

1°) **a/** Le stock est de 100 plaques, 238 transistors et 302 condensateurs. Calculer le nombre d'appareils x, y et z de chaque type utilisant le stock complet.

b/ Si l'entreprise a 501 résistances en stock, peut-elle lancer la fabrication de façon à épuiser ses stocks ?

2. Déterminer la fabrication utilisant les 100 plaques, les 238 transistors et les 501 résistances.
Le stock de 302 condensateurs est-il alors suffisant ?

28

Deux associés ont vendu leur société pour 1200000 dinars, cette somme représente le total des mises de fonds initiales de chacun et de leurs bénéfices. Leurs bénéfices sont proportionnels à leurs mises de fonds respectives.
Le premier a retiré 80000 dinars de bénéfices alors que le deuxième a retiré 120000dinars de bénéfices
Calculer la mise de fonds de chacun d'eux.

29

Dans un désert, il y a des serpents, des souris et des scorpions.
Chaque matin, chaque serpent mange une souris.
Chaque midi, chaque scorpion pique un serpent (et ça ne pardonne pas)
Chaque soir, chaque souris mange un scorpion.
Au bout d'une semaine, il ne reste plus qu'un animal : une souris.
Combien y avait il de serpents, de souris et de scorpions au début ?

Les chinois avaient découvert une méthode pour résoudre des systèmes d'équations depuis le IIe siècle avant J.C, dont voilà la description sur un exemple

Gabriel Cramer (1704 – 1752) présenta en 1750 la formule générale des solutions de n'importe quel système d'équations (dit linéaire), qui était lourde à appliquer .

Depuis, d'autres mathématiciens ont mis au point des méthodes pour réduire le nombre

d'opérations.

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \quad (1) \\ x - 3y = 6 \quad (2) \end{cases}$$

Première étape : placer les coefficients de x, de y et les coefficients du second membre (c'est à dire ici 5et 6) dans un tableau comme ci-dessous.
(Les chinois écrivent verticalement et de droite à gauche).

	équation(2)	équation (1)
coefficient de x	1	2
coefficient de y	–3	1
coefficient du second membre	6	5

Deuxième étape : annuler un coefficient de y (ou de x) en multipliant une colonne par un nombre et en additionnant les deux inconnues.

1	2
–3	1
6	5

x(- 2)

–2	2
6	1
–12	5

\+

0	2
7	1
–7	5

Donc 7 y = –7
donc y = –1

Troisième étape : calculer ensuite la valeur de x (ou de y) connaissant celle de y (ou de x).
x = 6 + 3y d'après la relation (2)
donc x = 6 + 3x (- 2) = 3.

Résoudre le système suivant en utilisant cette méthode

$$\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ -x + 3y = 11 \end{cases}$$

L’essence des Maths est dans leurs libertés
CANTOR

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Chapitre 7

Activité 1 :

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f_1(x) = x$ $\qquad f_2(x) = \frac{1}{x}$

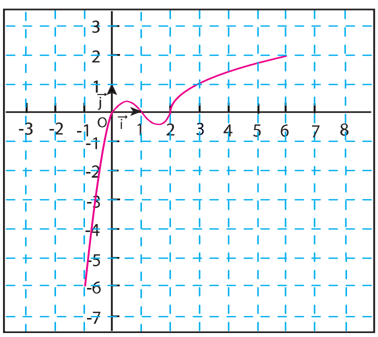
$f_3(x) = \sqrt{x}$ $\qquad f_6(x) = \sqrt{2x - 5}$

$f_5(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{5 - x}$ $\qquad f_6(x) = \sqrt{2x - 5}$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On appelle ensemble de définition de f l'ensemble des réels x pour lesquels f(x) existe.

Activité 2 :

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la courbe représentative d'une fonction f définie sur [-1,6].



$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan P
f est une fonction numérique à variable réelle définie sur un ensemble D
On appelle courbe représentative de f l'ensemble des points M(x, y) vérifiant $x \in D$ et $y = f(x)$

1°) Déterminer f(-1), f(1) et f(6).
2°) Pour quelle valeur de x a-t-on :
a/ $f(x) = 1$ **b/** $f(x) = 2$ **c/** $f(x) = -6$.
3°) Pour quelles valeurs de x a-t-on :
a/ $f(x) = 0$ **b/** $f(x) < 0$ **c/** $f(x) \geq 0$.

Si on note C_f la courbe réprésentative de f on a: $C_f = \{M(x,y) \in P,\ x \in D \text{ et } y = f(x)\}$

Activité 3 :

On considère une fonction g définie sur [0,6] et ayant le tableau de signe suivant :

x	0		2		4		6
g (x)	4	+	0	+	0	-	-2

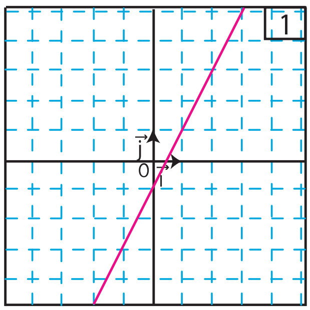
1°) Tracer une courbe représentative possible de g.
2°) Tracer une courbe représentative possible de g sachant, de plus, que g est strictement croissante sur [0, 1] et strictement décroissante sur [3, 4]

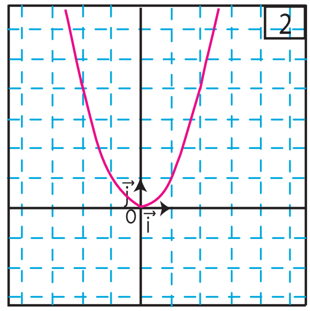
Activité 4 :

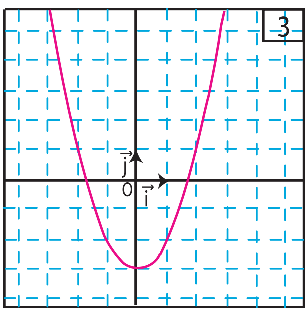
On considère les fonctions définies par:

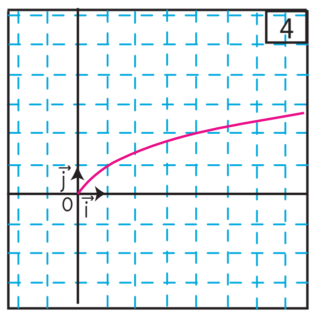
<table>
<tr><td>$f(x)=2x-1$</td><td>$g(x)=-3x+2$</td><td>$h(x)=x^2$</td><td rowspan="2">$W(x)=\sqrt{x}$</td></tr>
<tr><td>$k(x)=\dfrac{3}{x}$</td><td>$u(x)=x^2-3$</td><td>$v(x)=2x^3$</td></tr>
</table>

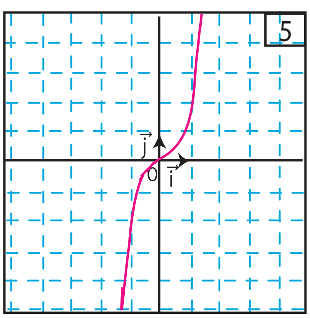
Identifier la courbe représentative de chacune d'elle parmi les courbes ci-dessous.

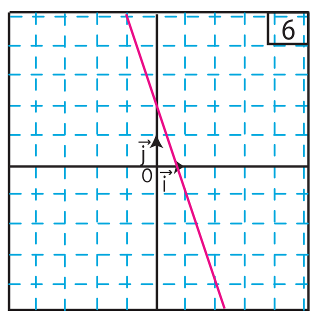


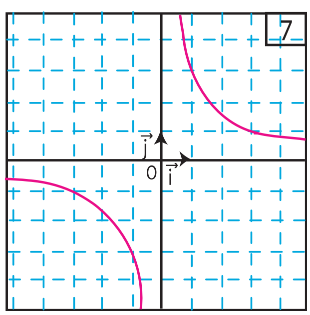




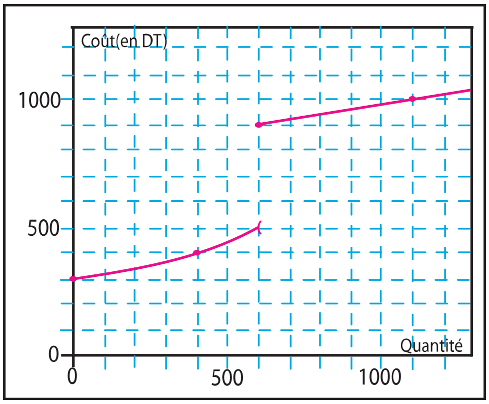








Activité 5 :



Le coût total de production de q objets est donné par le graphique ci-contre.

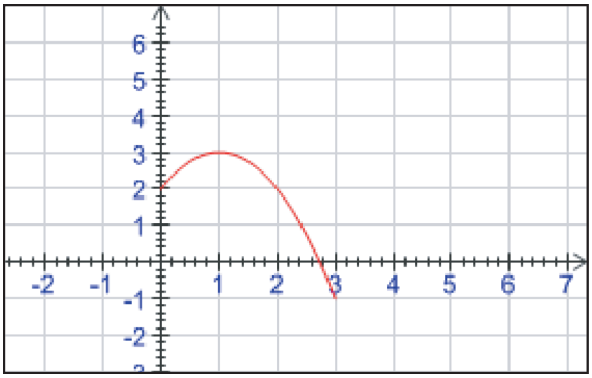
a/ Donner le coût fixe en DT

b/ Pour une production de 600 objets et plus, l'obligation de faire appel à un sous-traitant augmente les coûts fixes.

Quel est le montant de ce supplément de coût

c/ Déterminer l'expression C(q) donnant le coût total de fabrication de q objets au-dessus de 600.

Activité 6 :



1°)a/ Soit deux réels $x_1$et x_2 de l'intervalle [0, 1]tel que $x_1 < x_2$. Par une lecture graphique comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

b/ Déduire le sens de variation de f sur [0, 1]

2°)a/ Soit deux réels x_3 et x_4 de l'intervalle [1, 3] tel que $x_3 < x_4$. Par une lecture graphique comparer $f(x_3)$ et $f(x_4)$.

b/ Déduire le sens de variation de f sur [1, 3].

• Une fonction f est dite croissante sur un intervalle I si :
Pour touts réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$, on a $f(x_1) \leq f(x_2)$

• Une fonction f est dite strictement croissante sur un intervalle I si :
Pour touts réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$, on a : $f(x_1) < f(x_2)$

• Une fonction f est dite décroissante sur un intervalle I si :
Pour touts réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$, on a :$f(x_1) \geq f(x_2)$

• Une fonction f est dite strictement décroissante sur un intervalle I si :
Pour touts réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$, on a :$f(x_1) > f(x_2)$

•Une fonction f est dite constante sur un intervalle I si :
Pour touts réels x_1 et x_2 de I,
on a: $f(x_1) = f(x_2)$

Activité 7 :

Donner le sens de variation sur I de chacune des fonctions suivantes :

1°) $f : x \rightarrow 2x - 1$ $\quad I = \mathbb{R}$

2°) $g : x \rightarrow ax + b$ $(a \neq 0)$ $I = \mathbb{R}$

3°) $h : x \rightarrow -3x^2$ $\quad I = \mathbb{R}_+$

4°) $k : x \rightarrow -x^3$ $\quad I = \mathbb{R}_-$

5°) $l : x \rightarrow \sqrt{x - 1}$ $\quad I = [1, +\infty[$

I – Restriction d'une fonction :

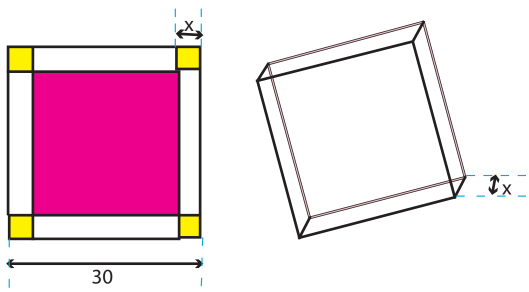
Activité 1 :

Soit $f(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x$

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2°) On enlève des coins carrés, de côté x, à une feuille de carton carrée de côté 30 cm.

On replie suivant les pointillés pour obtenir une boite, sans couvercle.



a/Justifier que l'on peut fabriquer une telle boite seulement lorsque $x \in]0, 15[$.

b/ V(x) modélise le volume de la boite en cm^3, exprimer V(x) en fonction de x.

3°) Vérifier que pour tout x de $]0, 15[$, $V(x) = f(x)$.

On dit que V est la restriction de f à l'intervalle $]0, 15[$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et I une partie non vide de D.
La fonction g définie sur I par $g(x) = f(x)$ est appelée la restriction de f à I.

Exercice :

1°) Soit $f(x) = \sqrt{(x-1)^2}$. Expliciter la restriction de f à $]-\infty ,1]$

2°) Soit $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 4}$

a/ Déterminer le domaine de définition de f.

b/ Expliciter la restriction g de f sur$]4,+\infty,]$

II – Courbes représentatives de fonctions associées à une fonction donnée :

1°) Courbe représentative de –f

Activité 1 :

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2-2x+2$

1°) Tracer la courbe représentative de f.

2°) On note –f la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto -x^2 + 2x - 2$

a/ Vérifier que si $M(x, y) \in C_f$ alors $M'(x, -y) \in C_{-f}$

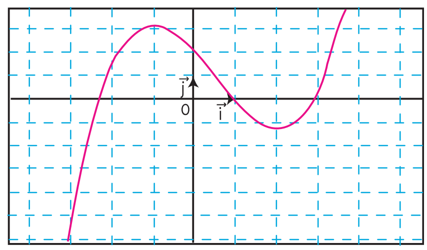
b/ Vérifier que si $M(x, y) \in C_{-f}$ alors $M'(x, -y) \in C_f$

3°) Tracer alors la courbe représentative de –f.

$(O,\vec{i},\vec{j})$ repère orthogonal du plan. f une fonction à variable réelle.
La courbe représentative de la fonction –f est la symétrique de celle de f par rapport à l'axe des abscisses. $C_{-f} = S_{(O,\vec{i})}(C_f)$

Exercice

La courbe ci-contre représente une fonction f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ orthogonal.



1°) Reproduire la courbe représentée ci-dessus sur votre cahier.

2°) Représenter la courbe représentative de –f.

3°) En déduire la courbe représentative de |f|.

4°) Dans le cas général, comment obtient-on la courbe représentative de |f| ?

2°)Courbe représentative de g : x $\mapsto$ f (x) + k

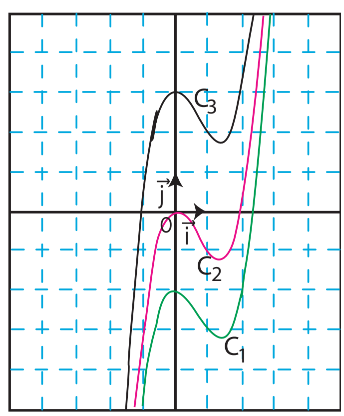
Activité 2 :

1°) Tracer la courbe représentative de $f(x) = x^2$

2°) Déduire les courbes représentatives de :

$g(x) = x^2 - 2$	$h(x) = -x^2$	$k(x) = -x^2 + 3$

Activité 3 :



La courbe C_2 est la représentation graphique d'une fonction f.
C_1 et C_3 sont les représentations graphiques de deux fonctions g et h.
Exprimer g(x) et h(x) en fonction de f(x).

Activité 4 :

Soient f et g deux fonctions définies sur un domaine D tel que $g(x) = f(x) + k$ où k un réel donné

1°) Soit $M'(x, y)$ un point quelconque de la courbe C_g.

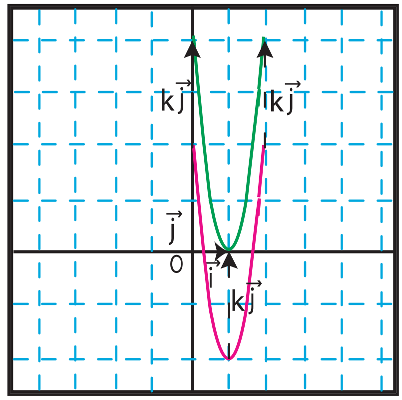
a/ Vérifier que $y = f(x) + k$

b/ En déduire que: $M(x, y - k) \in C_f$.

2°) a/ Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{MM'}$

b/ En déduire que: $\overrightarrow{MM'} = k\vec{j}$

c/ En déduire un procédé de construction de C_g à partir de C_f.



Théorème :

$(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère du plan. La courbe représentative de la fonction g définie par $g(x) = f(x) + k$ est la translatée de la courbe C_f par la translation de vecteur $k\vec{j}$,

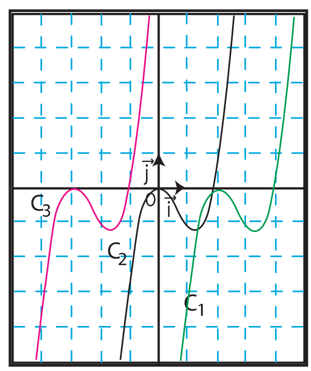
3. Courbe représentative de g : $x \longmapsto f(x + k)$

Activité 5 :

1°) Tracer la courbe représentative de $f(x) = x^2$

2°) En déduire les courbes représentatives de : $g(x) = (x - 3)^2$ et $h(x) = (x+1)^2$

Activité 6 :



La courbe C_2 est la représentation graphique d'une fonction f.

C_1 et C_3 sont les représentations graphiques de deux fonctions g et h.

Exprimer g(x) et h(x) en fonction de f(x).

Activité 7 :

Soient f et g deux fonctions a variable réelle définies sur un ensemble D tel que :
$g(x) = f(x + a)$ où a un réel donné

1°) Soit $N'(x, y)$ un point quelconque de la courbe C_g.

Vérifier que $N(x + a, y) \in C_f$

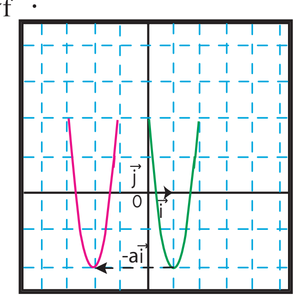
2°) a/ Déterminer les composantes de $\overrightarrow{NN'}$

b/ En déduire que $\overrightarrow{NN'} = -a\vec{i}$

c/ En déduire un procédé de construction de C_g à partir de C_f .

Théorème :

la courbe représentative de la fonction g définie par $g(x) = f(x + a)$ est la translatée de la courbe C_f par la translation de vecteur $-a\vec{i}$.



III – Opération sur les fonctions :

1°) Somme de deux fonctions :

Activité 1 :

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.

1°) Représenter f et g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
2°) On considère la fonction s définie sur $\mathbb{R}$ par $s(x) = f(x) + g(x)$.
3°) Représenter la fonction s.

Définition

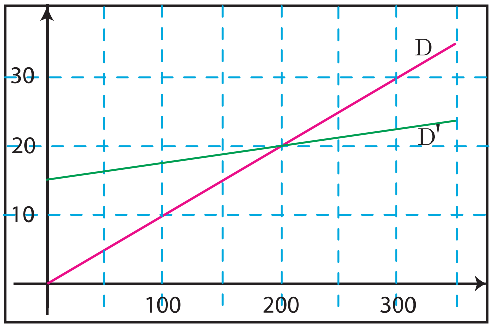
Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D, on appelle fonction somme de f et g, qu'on note f + g la fonction définie sur D par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

2°) Différence de deux fonctions :

Activité 2 :

Sur la figure ci-contre sont représentées deux fonction f et g. f(x) modélise le prix de vente de x articles et g(x) modélise le prix de revient de x articles.

1°) Identifier la courbe de f et celle de g.
2°) Expliciter f(x) et g(x) en fonction de x.
3°) Soit h la fonction qui modélise le déficit ou le bénéfice en fonction du nombre d'articles vendus.
a/ Expliciter h(x) en fonction de x.
b/ Tracer sur le même graphique les courbes représentatives des fonctions f, g et h.
c/ A partir de quel nombre d'articles vendus l'entreprise est-elle bénéficiaire ?



Définition

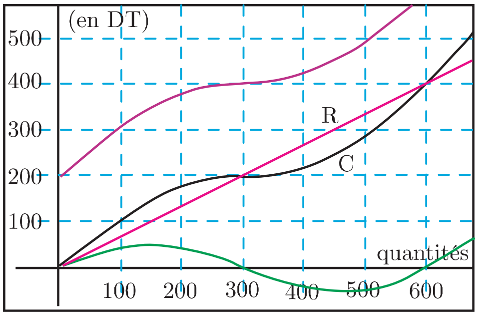
Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D, on appelle fonction différence de f et g, qu'on note f – g la fonction définie sur D par $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$.

Exercice :

Dans le repère ci-contre sont représentées la fonction coût total C et la fonction recette R d'une même entreprise et deux autres fonctions.

1°) Parmi les deux courbes colorées en violet et vert reconnaître la courbe de la fonction bénéfice.

2°) Sur quel intervalle l'entreprise est-elle déficitaire ?



3°) Autres opérations sur les fonctions :

Activité 3 :

Soient f et g deux fonctions numériques définies par :$f(x) = x$ et $g(x) = x + 1$.

1°) a/ Déterminer l'ensemble de définition de f et celui de g.

b/ Expliciter $f(x) \times g(x)$

2°) Soit h la fonction $x \mapsto x^2 + x$

Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) \times g(x)$

3°) Tracer les courbes représentatives de f, g et h.

Activité 4 :

En une année donnée, le coût de production d'un produit en fonction de la quantité est modolisé par la fonction f définie sur $[0,100]$ par $f(x) = x^2$

L'année suivante, le coût diminue de 20% pour chaque quantité.

1°) Tracer dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la représentation graphique C_f de f

2°) Si g est la fonction coût de la seconde année.

Exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$ pour $x \in [0 ; 100]$.

3°) a/ Soit $M(x,y) \in C_f$ vérifier que $M(x; 0{,}8y) \in C_g$

b/ déduire le tracé de la représentation graphique de g

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble D et λ un réel donné,

- On appelle fonction produit de f et g, qu'on note f x g la fonction définie sur D par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.
- On appelle produit de f par λ , qu'on note λf la fonction définie sur D par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

On appelle fonction quotient de f par g la fonction définie sur

$D / \{x \in D \,/\, g(x) = 0\}$ par $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Activité 5 :

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 5x + 7$ et $g(x) = x^3 + 5x$.

1°) Définir la fonction $(f + g)$.

2°) Définir la fonction $(f - g)$.

3°) Définir la fonction $\frac{f}{g}$

Définition

• a_0 , a_1, ... , a_{n-1} et a_n des réelles tel que $a_n \neq 0$.

La fonction $f : x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}\ x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ est appelée fonction polynôme

•Une fonction rationnelle est le quotient de deux polynômes.

Remarque

•Au lieu de dire “la fonction polynôme définie sur IR par :

$f(x)= a_n x^n + a_{n-1}\ x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$” on dit souvant “ le polynôme f défini par :

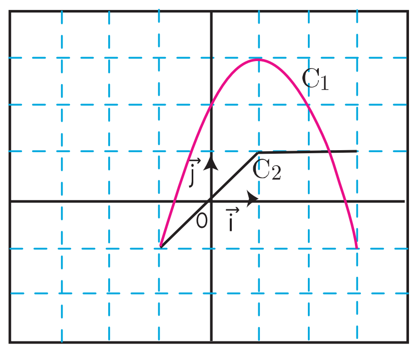
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}\ x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

•n est appelé le degré du polynôme f

Exercice :

On considère les fonctions f et g définies sur [-1, 3], dont les courbes représentatives sont respectivement (C1) et (C2).

Sachant que f est la restriction d'une fonction polynôme de second degré.



1°) Expliciter f(x) et g(x) pour tout $x \in [-1, 3]$

2°) On définit les fonctions h et k sur [-1, 3] par :

$h(x) = -2g(x)$ et $k(x) = (f + g)(x)$

a/ Expliciter h(x) et k(x) pour tout $x \in [-1, 3]$.

b/ Construire les courbes représentatives des fonctions h et k.

4°)Opérations sur les fonctions et sens de variation :

Activité 6 :

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et λ un réel.

1°) a/ Si f et g sont croissantes sur I, quel est le sens de variation de f + g sur I ?

b/ Si f et g sont décroissantes sur I, quel est le sens de variation de f + g sur I ?

c/ Si f est croissante sur I et $\lambda > 0$, quel est le sens de variation de λ f sur I ?

d/ Si f est croissante sur I et $\lambda < 0$, quel est le sens de variation de λ f sur I ?

2°) Donner des résultats analogues à c/ et d/ pour des fonctions décroissantes ?

Exercice 1 :

Donner le sens de variation de la fonction $f(x) = x^2 + 2\sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.

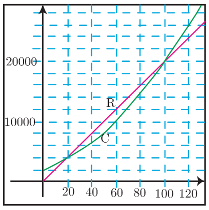
Exercice 2 :

La 1ère année, le coût de production dans une usine en fonction de la quantité est une fonction f croissante sur [0, 100] . La 2ème année, le coût diminue de 20%. On appelle g la fonction coût de cette 2ème année.

1°) pour tout $x \in [0, 100]$, exprimer g(x) en fonction de f(x).
2°) Quel est le sens de variation de g sur[0, 100] ?

IV – Comparaison de deux fonctions :

Activité 1 :



Pour une fabrication donnée, le coût total et la recette totale sont exprimés en DT en fonction de la quantité produite x par :
$C(x) = x^2 + 80x + 2000$ et $R(x) = 200x$
La figure ci-contre donne les représentations graphiques de C et R sur [0, 130]
1°) Indiquer sur quel ensemble on a $C(x) \leq R(x)$et sur quel ensemble on a $C(x) > R(x)$.
2°) En déduire les productions pour lesquelles la fabrication est rentable.

Définitions

• Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.
Si pour tout x de I on a $f(x) \geq g(x)$ on dit que f est supérieure ou égale à g sur I et on note $f \geq g$.
• Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.
Si pour tout x de I on a $f(x) \leq g(x)$ on dit que f est inferieure ou égale à g sur I et on note $f \leq g$

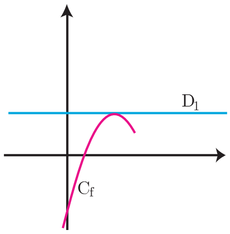
Exercice

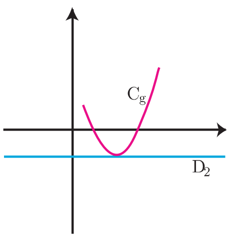
On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)= x^5 - 3x^3+2$ et $g(x)= x^3+2$
a/ Factoriser f(x) – g(x).
b/ A l'aide d'un tableau, étudier le signe de cette expression.
c/ Comparer alors les deux fonctions f et g.

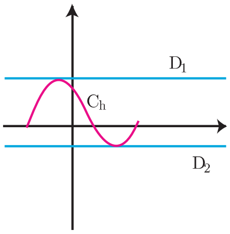
Fonction Majorée –Fonction Minorée

Activité 2 :

Soient f, g et h trois fonctions données chacune par sa courbe représentative ci-dessous et les droites D_1 d'équation y = M et D_2 d'équation y = m.







142

Par une lecture graphique comparer:
- $f(x)$ avec M.
- $g(x)$ avec m.
- $h(x)$ avec m et M.

Activité 3 :

Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$

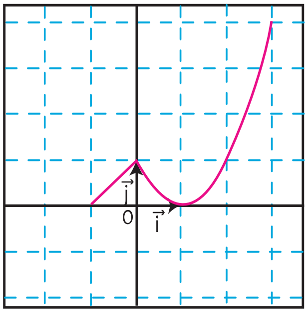
1°) Donner un encadrement de $\dfrac{1}{1+x}$ pour $x \in [0, 1]$.

2°) Donner un encadrement de x^2 pour $x \in [0, 1]$.
3°) En déduire un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [0, 1]$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que:
- f est majorée sur I s'il existe un réel M tel que, pour tout x de I on a: $f(x) \leq M$.
- f est minorée sur I s'il existe un réel m tel que, pour tout x de I on a : $m \leq f(x)$
- f est bornée sur I si elle est à la fois majorée et minorée sur I.

Exercice



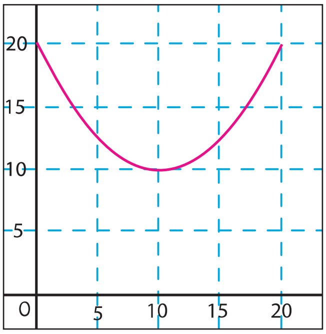
Une fonction f définie sur $[-1, 3]$ est représentée ci-contre.
Donner un encadrement de $f(x)$ dans chacun des deux cas suivants :
a/ $x \in [-1, 2]$
b/ $x \in [0, 3]$

V- Maximum –Minimum :

Activité 1 :

Une entreprise fabrique chaque jour une quantité q d'objets.
Le coût de production de la fabrication, exprimé en DT, est donné par $C(q) = 0{,}1q^2 - 2q + 20$
1°) Pour quelle valeur de q a-t-on $C(q) = 20$?
2°) Montrer que $C(q) = 0{,}1[(x-10)^2+100]$.
3°) Déduire la valeur de q qui minimise $C(q)$.

Activité 2 :

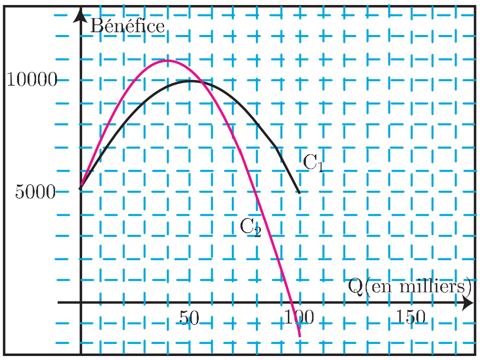


La courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0, 20]$ par $f(x) = \dfrac{1}{10}x^2 - 2x + 20$.

1°) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 20$.
2°) Pour quelle valeur de x, $f(x)$ est-elle minimale ?

Activité 3 :

Les courbes C_1 et C_2 sont les courbes représentatives des fonctions f_1 et f_2 donnant, sur deux années consécutives, les bénéfices d'une entreprise en fonction de la quantité Q de produit fabriqué.
Déterminer graphiquement, dans les deux cas, pour quelle valeur de Q l'entreprise obtient un bénéfice maximum et dites quel est le montant de ce bénéfice



Définitions

Soit f une fonction définie sur un ensemble D

- f admet un maximum relatif en x_0 s'il existe un intervalle I centré en x_0 tel que pour tout x de $I \cap D$: $f(x) \leq f(x_0)$ Ce maximum est $f(x_0)$.
- f admet un minimum relatif en x_0 s'il existe un intervalle I centré en x_0 tel que pour tout x de $I \cap D$:$f(x) \geq f(x_0)$. Ce minimum est $f(x_0)$.
- Si pour tout x de D, $f(x) \leq f(x_0)$ on dit $f(x_0)$ est maximum absolu.
- Si pour tout x de D, $f(x) \geq f(x_0)$ on dit $f(x_0)$ est minimum absolu.

Exemple :

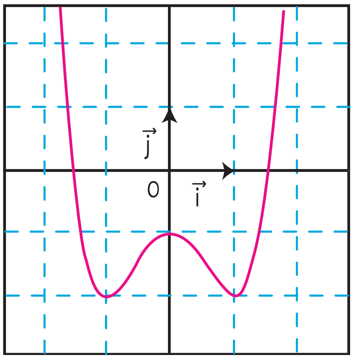
$f(x)= 2x^2+1$ admet un minimum absolu en 0 qui est égal à1.

$f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur]0, 1] n'admet pas de maximum et admet un minimum absolu en 1 qui est égal à 1.

Exercice :

La courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$

1°) f admet-elle un minimum absolu sur $\mathbb{R}$?
2°) f admet-elle un maximum absolu sur$\mathbb{R}$?
3°) f admet-elle un maximum relatif



Visualisation des courbes représentatives des fonctions associés sous GEOPLANW :

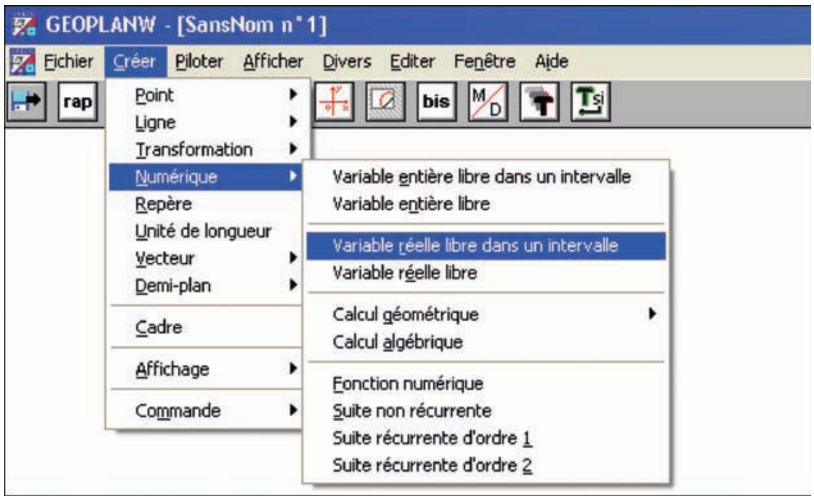
1°) Fonction g: x $\longrightarrow$ f(x + a)

Ouvrir le programme GeoplanW en exécutant

a/ Définir le réel a dans [-5, 5]

Aller dans la barre de menu et choisir

Créer/ Numérique/ Variable réel libre dans l'intervalle



Et valider l'écran ci-dessous comme suit

b/ Définir la fonction usuelle f, fonction carrée :

Aller dans la barre de menu et choisir

Créer/ Numérique/ Fonction numérique

Et valider l'écran ci-dessous comme suit :

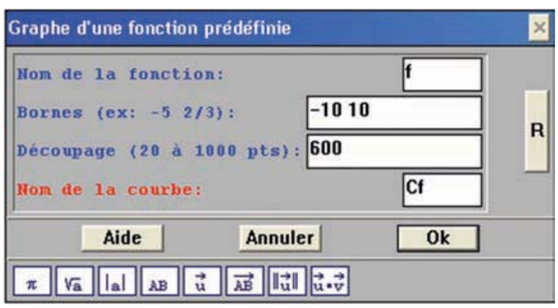
Attention : la variable est un X majuscule puisque x est utilisé pour le repère R_{oxy}
Définir la fonction g définie par g(X) = f(X + a) de la même façon comme on a défini la fonction f sauf que dans la case Expression de la fonction on choisit f(X + a).

c/ Tracer la courbe C_f de la fonction f

Aller dans la barre de menu et choisir

Créer/ Ligne/ Courbe/ Graphe d'une fonction prédéfinie

Et valider l'écran ci-dessous



Faire apparaître le repère par le bouton ,puis les graduations et le quadrillage en utilisant la barre de style Réduire ou agrandir le graphique, s'il y a lieu, par les boutons

d/ Tracer la courbe Cg de la fonction g (comme on a fait pour la courbe de f)

e/ Afficher le réel a avec un décimal :

Aller dans la barre de menu et choisir

Créer/ Affichage/ Scalaire déjà défini

Et valider l'écran ci-dessous

Piloter le réel a au clavier :
Aller dans la barre de menu et choisir

Piloter/ Piloter au clavier

Et sélectionner le réel a dans les objets construits.
f/ Faire varier le réel a à l'aide des flèches du clavier.
Comment se déplace la courbe Cg par rapport à la courbe C_f ?

g/ Pour visualiser la transformation, Créer le réel libre X_1 dans l'intervalle [-10, 10] et les points A(X1), f(X1)), M(X1, g(X1)) et N(X1 + a, f(X1 + a)) :
par exemple, pour créer le point N,
Aller dans la barre de menu et choisir

Créer/ Point/ Repéré dans le plan

Piloter le réel X1.
h/ On peut modifier la fonction f .
Aller dans la barre de menu et choisir

Divers/ Modifier

Et valider l'écran ci-dessous

2°) Fonction g: $x \mapsto f(x) + k$

a/ Créer la fonction g d'expression f(x)+ k avec $f(x) = x^2$ et la courbe Cg de cette fonction g.
b/ Piloter le réel k au clavier. Comment se déplace la courbe Cg par rapport à la courbe Cf ?
c/ Pour visualiser la transformation, Créer le réel libre X1 dans l'intervalle [-10, 10] et les points M(X1, f(X1)) et N(X1, g(X1))
d/ Vérifier en modifiant la fonction usuelle f.

3°)Fonction h: $x \mapsto \lambda f(x)$

a/Créer la fonction h d'expression $\lambda f(x)$ avec $f(x) = x^2$ et la courbe C_h de cette fonction h.
b/ Lorsque le réel varie, décrire la déformation de la courbe C_h par rapport à C_f .
Pour visualiser la déformation, créer les points H(X1, 0) et A(X1, f(X1)) et M(X1,h(X1))
Afficher l'abscisse du point M dans le repère (H, A)
Et valider l'écran ci-dessous :

Créer/ Numérique/ Calcul géométrique/ Abscisse d'un point sur une droite

Piloter le réel X1 ou le réel λ .

4°) Fonction h: x $\mapsto$ f (x) + g(x)

a/

- Définir les fonctions f et g :

Créer/ Numérique/ Fonction numérique

- Construire les courbes C_f et Cg sur l'intervalle [-10, 10].

Créer/ Ligne/ Courbe/ Graphe d'une fonction prédéfinie

- Définir le réel X dans l'intervalle [-10 ,10]

Créer/ Numérique/ Variable réel libre dans l'intervalle

Placer les points H(X, 0), A(X, f(X)) et B(X, g(X)) et M(X, f(X) + g(X))

Créer/ Point/ Repéré dans le plan

b/

- Piloter le réel X
- Sélectionner la trace de M :

Afficher/ Sélectionner trace

et sélectionner le point M dans les objets construits proposés.

- Cliquer sur le bouton et déplacer les points A, B et M à l'aide des flèches du clavier.

La courbe décrite par M apparaît point par point

1

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

a / $f(x) = 2x + 1$

b / $f(x) = 2x^2 + 2x + 7$

c / $f(x) = 3x^3 - 5x + 1$

d / $f(x) = \sqrt{5x - 3}$

e / $f(x) = \sqrt{|-2x - 1|}$

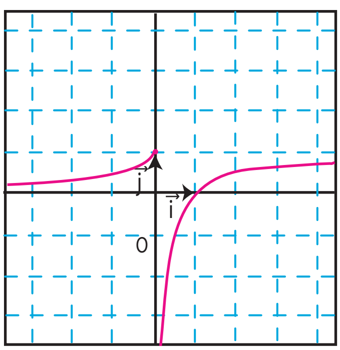
f / $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

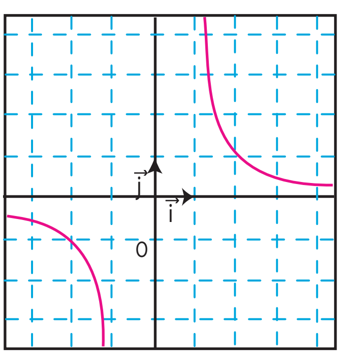
g / $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{2x - 3}$

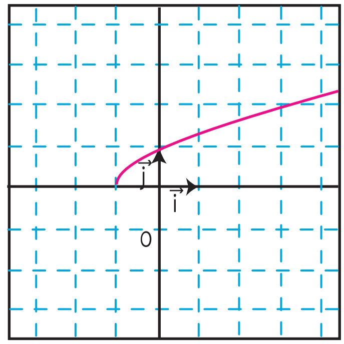
h / $f(x) = \dfrac{\frac{5}{2}x - 3}{|2x + 1|}$

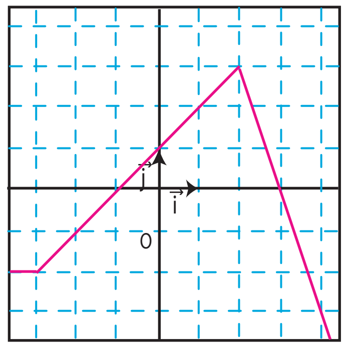
2

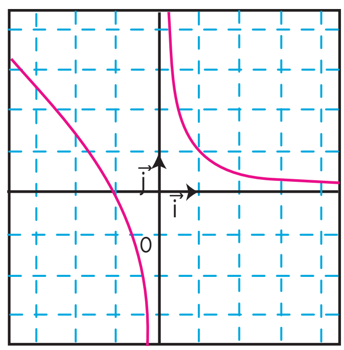
Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes données par leurs courbes représentatives :











3

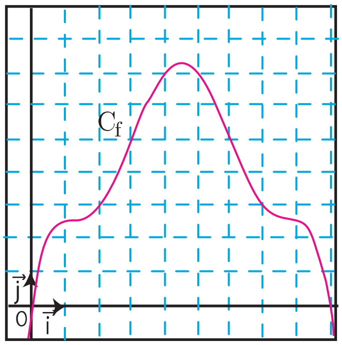
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \dfrac{1 - x}{2x + 3}$

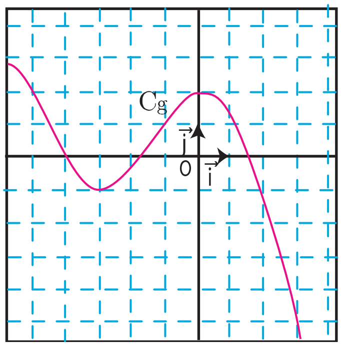
1°) Déterminer si possible l'image par f de chacun des réels $1 ; -1 ; -\frac{3}{2} ; 0$.

2°) Déterminer si possible, l'antécédent par f de chacun des réels $1 ; -1 ; -\frac{3}{2} ; 0$.

4

Les courbes C_f et C_g sont les représentations respectives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.





1°) Lire f(3), g(3), f(0), g(0), f(5) et g(−5).

2°) Résoudre graphiquement :

a/ $f(x) = 0$	**b/** $f(x) = 7$
c/ $f(x) = 5$	**d/** $g(x) = -1$
e/ $g(x) = 2$	

3°) Résoudre graphiquement :

a/ $f(x) \geq 0$	**b/** $g(x) \leq -1$
c/ $3 < f(x) \leq 5$	**d/** $x \leq 0$ et $g(x) \geq 0$

5

f est une fonction décroissante sur IR_+ vérifiant f(0) = 1.
Relever la propriété correcte.
Pour tout $x \in IR_+$ on a :

a/ $1 \leq f(x)$

b/ $f(x) \leq 0$

c/ $f(x) \leq 1$

d/ $0 \leq f(x) \leq 1$

6

Pour résoudre graphiquement l'équation f(x) = 0 :
On lit l'abscisse du point d'intersection de la courbe de f avec :

a/ L'axe des abscisses.

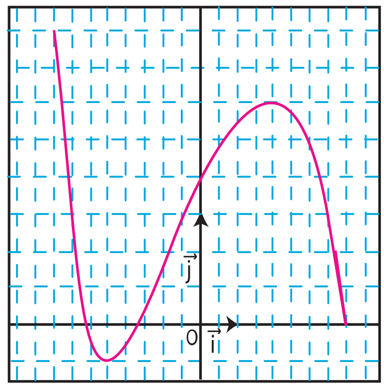
b/ L'axe des ordonnées

c/ La $1^{ère}$ bissectrice.

La quelle des assertions a/, b/ ou c/est correcte.

7

La courbe C ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur [-4,4]



1°) a/ Quel est le sens de variation de f sur [−4, −5/2] et sur [−5/2, 2] et sur [2, 4].

b/ Justifier que, pour tout x de[− 4, 4] on a $-\frac{1}{3} \leq f(x) \leq \frac{8}{3}$.

2°) On considère la droite D_1 d'équation y = x.

a/ Tracer les droite D_1.

b/ En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) - x \leq 0$

c/ Pour quelles valeurs positives de x a-t-on $f(x) \geq x$?

8

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x) = 2x + 1 & \text{si } x \geq -2 \\ f(x) = x & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

g est la fonction définie sur R

$$\begin{cases} g(x) = -x + 3 & \text{si } x \geq -2 \\ g(x) = 2x + 4 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

1°) Représenter graphiquement f et g sur un même graphique.

2°) Déterminer la fonction f + g et la représenter graphiquement.

9

Soient f et g les deux fonctions définies sur l'intervalle $I = [1, +\infty]$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

1°) Déterminer le sens de variation de f et de g sur I.
2°) Déterminer le sens de variation de f + g sur I.
3°) a/ Montrer que f et g sont bornées sur I.
b/ En déduire que f + g est bornée sur I.

10

Soit la fonction définie sur [0, 1] par :

$f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

Montrer que $0 \le f(x) \le 1$

11

Soient f et g deux fonctions définies par :

$f(x) = \frac{1+x}{1+2x}$ et $g(x) = \frac{1-2x}{1-x}$.

1°) Comparer les fonctions f et g.
2°) Déduire une comparaison des deux nombres

$A = \frac{1.0001}{1.0002}$ et $B = \frac{0.9998}{0.9999}$

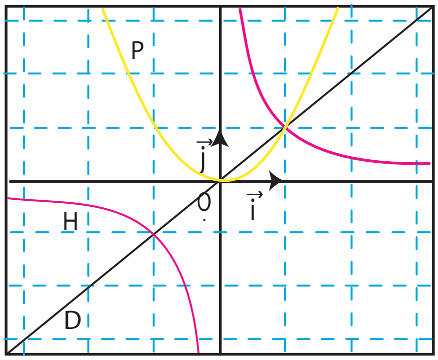
12

P est la parabole d'équation $y = x^2$

H est l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ et D la droite d'équation $y = x$.

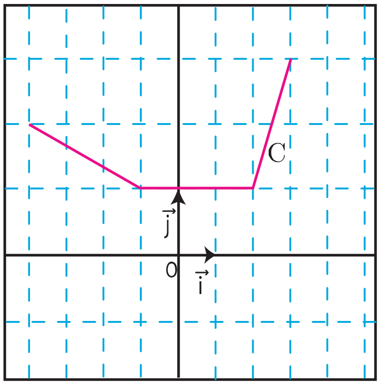
A l'aide du graphique ci-après, résoudre les équations et les inéquations suivantes :

a/ $x^2 = x$	**b/** $x^2 = \frac{1}{x}$
c/ $\frac{1}{x} = x$	**d/** $x^2 \le x$
e/ $\frac{1}{x} > x$	**f/** $x^2 < \frac{1}{x}$



13

La courbe C, ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction u définie sur [-4, 3].



Construire les courbes représentatives des fonctions f, g, h et l définies par

a/ $f(x) = u(x+2)$	**b/** $g(x) = u(x)+1$
c/ $h(x) = u(x-1) - 2$	**d/** $l(x) = u(x+2)$

14

La fonction Q_1de demande, d'un bien sur le marché est donnée par :
Q_1 (p) =500 – 40p, où p est le prix de vente unitaire du bien (en DT) et Q_1(p) la quantité mensuelle du bien demandée par les consommateurs.

1°) Représenter la fonction Q_1 dans un repère orthogonal.

2°) On suppose que le prix de vente augmente de 3DT,
la fonction de demande évolue. Soit Q_2 la nouvelle fonction de demande.

a/ Définir Q_2 à l'aide de Q_1.

b/ Par quelle transformation géométrique passe-t-on de la représentation graphique de Q_1 à celle de Q_2.

15

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x+1}{x-2}$.

1°) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{2\}; f(x) = a + \dfrac{b}{x-2}$.

2°) a/ Montrer alors que la courbe représentative de f se déduit de celle de la fonction $x \mapsto \dfrac{9}{x}$ par une transformation géométrique l'on déterminera.

b/ Représenter alors la courbe de f

16

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Dans chacun des cas suivants on demande de tracer la courbe représentative de f et d'en déduire les courbes représentatives de g et h.

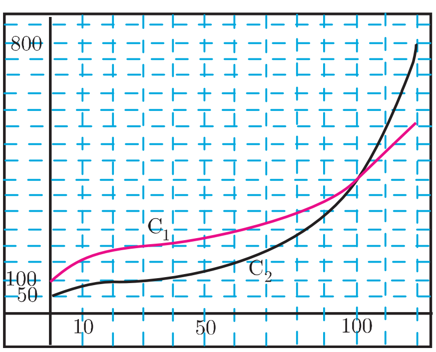
a / $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = \dfrac{1}{x} - 2$; $h(x) = \left|\dfrac{1-2x}{x}\right|$

b/ $f(x) = (x+1)^2$; $g(x) = (x+1)^2 - 3$; $h(x) = \left|(x+1)^2 - 3\right|$

c/ $f(x) = x^2 + x$; $g(x) = x^2 - x$; $h(x) = \left|x^2 + x\right|$.

17

La fabrication d'un produit nécessite deux phases :



Pour la 1ère phase, le coût de production en fonction de la quantité est représenté par lacourbe C_1 sur l'intervalle [0, 120].

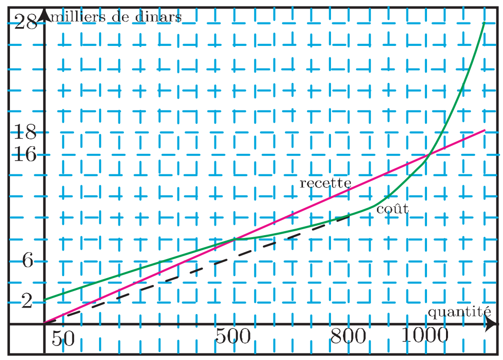
Pour la 2ème phase, le coût de production en fonction de la quantité est représenté par la courbe C_2 sur l'intervalle [0, 120].On note f le coût total de production en fonction de la quantité.

1°) Quel est le sens de variation de f sur[0, 120] ?

2°) Construire la courbe représentative de f dans le même repère .

18

Le graphe ci-dessous représente le coût total et la recette correspondante à la production et à la vente d'articles de confection.



1°) Lectures graphiques (à justifier)

a/ Montrer que le prix de vente unitaire est de 20 dinars.

b/ Quelles quantités faut-il produire pour que le profit soit positif ou nul?

c/ Pour quelle quantité le coût moyen est-il minimal? Calculer la valeur de ce coût moyen (unitaire).

2°) Étude de marché

a/ Du fait du marché, chaque article est vendu avec une remise de 20%.
Déterminer et représenter la nouvelle fonction de recette.
En déduire les quantités à produire permettant un bénéfice.

b/ Le marché oblige encore à une baisse du prix de vente.
Quel est le prix unitaire à ne pas dépasser, si cette société ne veut pas travailler à perte?
À quel taux de remise correspond ce prix?

19

une entreprise produit des ordinateurs. Lorsqu'elle produit x ordinateurs ($1 \le x \le 10$) on sait que:

- Le coût de fabrication (main d'oeuvre et matière première) est : 400x (en DT);

Le coût d'étude est $\dfrac{10000}{x}$ (en DT);

- Le coût total, noté C_1, est la somme des coûts de fabrication et d'étude.

1°) Soit g et h les fonctions définies sur [1; 10] par :

$g(x) = 400x$ et $h(x) = \dfrac{10000}{x}$

a/ Vérifier que pour $x = 5$ les différents coûts sont identiques.

b/ Construire les représentations graphiques de g et de h dans un repère orthogonal (1 cm pour 1 000 DT en ordonnée).

c/ A l'aide des deux courbes précédentes construire la courbe de la fonction coût total C_1.

d/ Pour quelle valeur de x le coût total semble-t-il être minimum?

e/ Démontrer que $C_1(x) - C_1(5) = \dfrac{400(x-5)^2}{x}$

En déduire que C_1 est minimal en 5.

2°) C_M le coût moyen de production d'un ordinateur est défini sur [1; 10] par :

$$C_M(x) = \frac{C_1(x)}{x}$$

a/ Déterminer $C_M(x)$.

b/ Quel est le sens de variation de C_M .

3°) A la suite d'un problème de gestion, pour une même quantité le coût total augmente de 20%.

a/ Exprimer le nouveau coût total C_2, en fonction de C_1

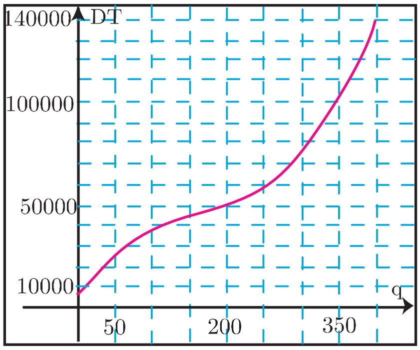
b/ Construire la courbe représentative de C_2 dans le repère précédent.

20

Le coût total exprimé en DT, pour une quantité q produite par une entreprise est donné par:

$C(q) = 0{,}005q^3 - 2{,}4q^2 + 500q + 6250$

pour $q \in [0 ; 400[$



1°) Quel est le montant des coûts fixes ?

2°) Calculer le coût total pour une fabrication de 200 unités. En déduire le coût moyen de fabrication de l'une de ces 200 unités.

3°) M étant un point d'abscisse q de lacourbe C_T du coût total et O l'origine du repère, quel est le lien entre le coût moyen Cm(q) et la droite (OM) ?

4°) En utilisant la droite (OM), trouver graphiquement sur la courbe de coût total la production qui minimise le coût moyen.

5°) On suppose que toute quantité produite est vendue au prix unitaire de 295 DT.

a/ Exprimer la recette R(q) enfonction de la quantité q, représenter la fonction R dans le même graphique.

b/ Graphiquement, quelles quantités faut-il produire pour que le profit soit positif ?

Les principales étapes historiques du développement du concept de fonction

1- L'Antiquité

Le concept de fonction apparaît lors de cette période sous la forme de tables numériques notamment chez les babyloniens pour exécuter des calculs (tables de carrés, de racines carrées, de cubes et de racines cubiques) ou pour compiler des éphémérides du soleil, de la lune ou d'autres planètes.

Le développement de la trigonométrie entraîna l'usage de tables de cordes, l'équivalent des tables de sinus qui seront développées par les hindous quelques siècles plus tard.

Aucune formule algébrique, aucune expression littérale n'a jamais été introduite. Il n'y avait pas d'idée de fonction, dans l'Antiquité, mais plutôt de relations fonctionnelles.

2- Le Moyen Age

Au cours du Moyen Age, l'idée que les lois quantitatives de la nature étaient de type fonctionnel a commencé à se dessiner. Une fonction est définie soit par une description verbale de sa propriété, soit par un graphe.

Les écoles d'Oxford et de Paris ont commencé à considérer les mathématiques comme un instrument privilégié pour étudier des phénomènes naturels. On cherche à quantifier certaines quantités ou phénomènes : chaleur, densité, vitesse etc.

3- La période moderne (à partir de la fin du XVIème siècle)

Avec les progrès de l'écriture symbolique en algèbre (Viète), se développe la notion de relation fonctionnelle exprimée de façon explicite par une formule. Les travaux de Galilée sur la mécanique (étude des trajectoires) mettent en relation des variables comme la vitesse et la distance parcourue par un solide.

Descartes expose l'idée qu'une équation entre x et y est une manière d'introduire une dépendance fonctionnelle : la connaissance de la valeur d'une variable permet de déterminer la valeur de l'autre. Cette méthode est appliquée avec succès à des résolutions graphiques d'équations, elle constitue une étape importante dans le développement des mathématiques. Descartes classe les courbes en " géométriques " et " mécaniques ", excluant ces dernières de la géométrie comme ne pouvant pas être étudiées par sa méthode.

VIETE

Leibniz se sert du mot " fonction " pour désigner des quantités qui dépendent d'une variable et introduit les termes de " constante ", de " variable ", de " coordonnées " et de " paramètre ". A cette même époque, Newton utilise le terme de " fluent ". Le terme de " fonction " est accepté par Bernouilli avec qui Leibniz correspondit pour échanger leurs opinions sur la notation la plus adaptée pour une fonction d'une ou plusieurs variables. Ils étaient favorables à la notation indiciaire x_1, x_2, x ; y_1, x etc … Plus tard, Bernouilli proposa la notation sans parenthèse jx. Contrairement à Descartes, Leibniz ne distingue pas les courbes " géométriques " des courbes " mécaniques " mais divise les fonctions et les courbes en deux classes : algébriques et transcendantes. Il démontra que la fonction sinus ne pouvait pas être une fonction algébrique.

DESCART

Euler définit la fonction d'une quantité variable comme une expression analytique constituée de cette quantité variable et de constantes. Il étudia systématiquement toutes les fonctions élémentaires. Il distinguait les fonctions explicites des fonctions implicites ainsi que les fonctions qui, à une valeur de la variable, donnent une seule image de celles qui peuvent en donner plusieurs. Il introduit, pour la première fois, la notation f(x).

LEIBNIZ

Le point de vue qui domine alors est l'aspect purement formel du concept de fonction. Par la suite, ce concept évoluera au rythme des difficultés rencontrées.

Il n'y a que la liberté d'agir et de penser qui soit
capable de produire de grandes choses
ALEMBERT

Chapitre 10

DERIVATION

Activité 1 :

Un musée établit les tarifs d'entrée suivants pour les groupes de visiteurs:
- 2D par personne si le nombre d'individus du groupe est de moins de 10.
- 1,5D par personne si le nombre d'individus du groupe est compris entre 10 et 50.
- 1D par personne si le nombre d'individus du groupe dépasse 50.

Représenter graphiquement la fonction qui modélise cette situation et indiquer les réels x pour lesquels la courbe présente des sauts.

Activité 2 :

Le tarif ci-contre définit la fonction " tarifs postaux économiques " qui, au poids x exprimé en grammes associe le tarif d'affranchissement exprimé en dinars.
Représenter graphiquement cette fonction et indiquer les réels x pour lesquels la courbe présente des sauts.

Masses en grammes Jusqu'à	Tarif en dinars Affranchissement
20	0,4
50	0,5
100	0,6
250	1,5

Activité 3 :

Un investisseur occasionnel a acquis des actions pour un montant de 6500 dinars. Le cours des actions ayant sensiblement augmenté pour atteindre 7500 dinars, l'investisseur décide de vendre ses actions, à un prix qu'il ignore bien sûr.
Si le montant des ventes n'excède pas 7622 dinars, le bénéfice réalisé n'est pas imposable.
Dans le cas contraire, ce bénéfice est taxé au taux de 26 %, c'est-à-dire que son gain net sera égal à 74 % du bénéfice réalisé.
La volatilité du marché, forte, peut faire varier le prix de vente escompté dans l'intervalle $I = [7000, 8500]$.

1°) Donner l'expression de la fonction f qui au prix de vente x, exprimé en dinars, associe le gain net y, également exprimé en dinars, pour $x \in I$ (envisagez 2 cas).
2°) Représenter graphiquement f.
3°) Résoudre dans I, l'équation $f(x) = 1122$.

Activité 4 :

Une fusée est réglée pour exploser 5 secondes après son lancement. La distance de la fusée par rapport au sol est mesurée à l'aide d'un radar pour $t \in [0, 5[$ et donnée par :
$d(t) = 98\,t - 14$
Pour $t = 5$, la détermination de la distance ne peut pas se faire car la fusée est en cours d'explosion.

Donner une évaluation de la distance à laquelle la fusée explose, sachant que la durée de t secondes avant l'explosion est déterminée à 10^{-2} près.

Activité 5 :

Une entreprise produit, par jour, entre 3 et 10 tonnes d'une marchandise. Le profit réalisé par la vente de x tonnes de marchandises est $P(x) = 3x - 4$ (en milliers de dinars). Lorsque la demande excède 10 tonnes, il faut mettre en service une équipe de nuit, ce qui augmente les frais fixes. Pour $x \in]10, 17]$, on a alors $P(x) = 3x - 7$.

1°) Représenter graphiquement la fonction P pour $x \in [3, 17]$.

2°) Que se passe-t-il pour $x_0 = 10$? Le profit réalisé par la commercialisation de 10,1 tonnes de marchandise est-il voisin du profit réalisé par la commercialisation de 10 tonnes de marchandise ?

3°) A partir de quelle demande est-il rentable d'activer une équipe de nuit?

I – Limite finie en un point

Activité 1 :

Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2 + 1$

1°) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2cm).

2°) **a/** Représenter sur l'axe des ordonnées l'ensemble des réels y tel que $|y - 2| < 0{,}2$.

b/ Représenter sur l'axe des abscisses les réels x vérifiant $|f(x) - 2| \leq 0{,}2$.

3°) Refaire le même travail de la question **2°)** en remplaçant 0,2 par 0,1.

4°) Peut-on refaire le même travail en remplaçant 0,2 par n'importe quel nombre strictement positif assez petit ?

Activité 2 :

$$f : x \mapsto \frac{4 - 4(1-x)^2}{x}$$

La fonction f n'est pas définie en 0, mais le réel f(x) existe pour tout réel x différent de 0.
Le tableau ci-dessous est obtenu à l'aide de la calculatrice :

x	-0,9	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1	0,5	0,9
f(x)	11,6	10	8,4	8,04	8,004	7,991	7,96	7,6	6	4,4

De quelle valeur se rapproche f(x) lorsque x se rapproche de 0 ?
On dit dans ce cas : la limite de f(x) est égale à 8 lorsque x tend vers 0

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0, sauf peut être en x_0,
Dire que f a pour limite le réel ℓ en x_0 c'est dire que le réel f(x) se rapproche de ℓ ,dès que le réel x se rapproche de x_0.
On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x_0} f = \ell$

Théorème admis :

si f admet une limite en x_0, alors cette limite est unique.

II – Limite à droite : limite à gauche

Activité 1 :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \geq 2 \\ x^2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

1°) Recopier le tableau suivant et compléter le.

x	1,5	1,9	1,99	2	2,001	2,01	2,1
f(x)							

2°) De quelle valeur se rapproche f(x) lorsque x se rapproche de 2, en restant supérieur à 2?
3°) De quelle valeur se rapproche f(x) lorsque x se rapproche de 2, en restant inférieur à 2 ?

On dit dans ce cas que
La limite de f(x) est égale à 3 quand x tend vers 2 à droite et on écrit $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$

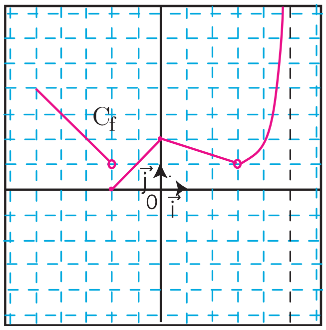
La limite de f(x) est égale à 4 quand x tend vers 2 à gauche, et on écrit $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 4$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[x_0, x_0 + h[$ ou de type $]x_0, x_0 + h[$.
Dire que f a pour limite le réel ℓ à droite en x_0 c'est dire que le réel f(x) se rapproche de ℓ, dès que le réel x se rapproche de x_0 à droite.
On note alors $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x_0^+} f = \ell$

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]x_0\text{-}h, x_0]$ ou de type $]x_0\text{-}h, x_0[$.
Dire que f a pour limite le réel ℓ à gauche en x_0 c'est dire que le réel f(x) se rapproche de ℓ dès que le réel x se rapproche de x_0 à gauche.
On note alors $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x_0^-} f = \ell$

Activité 2 :

La figure ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f : Déterminer les limites éventuelles suivantes :



a/ $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ b/ $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ c/ $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x)$

d/ $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x)$ e/ $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ f/ $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

Théorème :

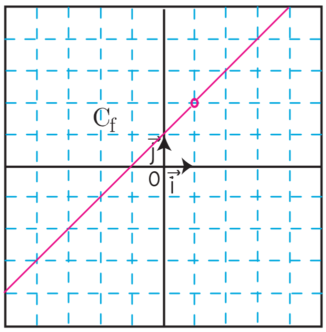
Soit I un intervalle ouvert contenant x_0 et f une fonction définie sur I, sauf peut être en x_0.
Alors

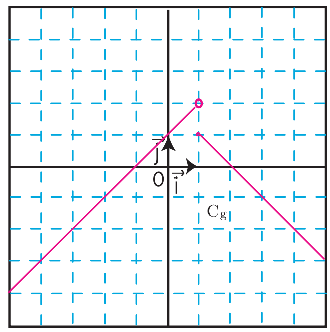
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \text{ si et seulement si } \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \\ \text{et} \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \end{cases}$$

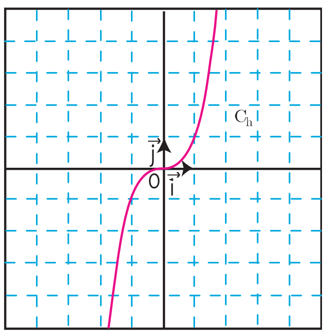
III – Continuité en un point

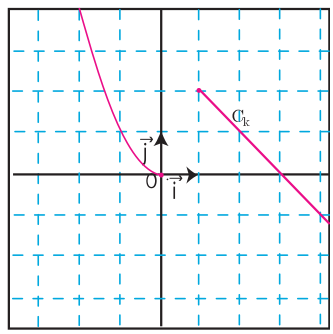
Activité 1 :

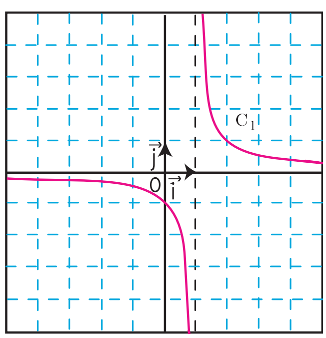
On donne les courbes suivantes :











Parmi les courbes ci-dessus, indiquer celles qu'on peut tracer sans lever la main.

Activité 2 :

Soit $f : x \mapsto x^2 + 2x + 4$

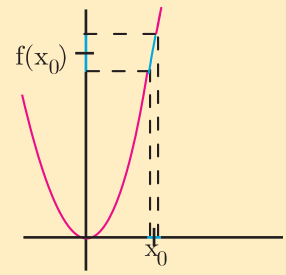
1°) Tracer la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2°) Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	2,1	2,01	2,001	-0,01	2	1,999	1,99	1,9
f(x)								

3°) Quel conjecture pouvez-vous faire sur la limite de f(x), lorsque x se rapproche de 2 ?

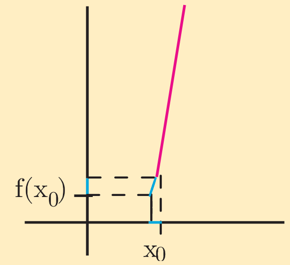
Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]x_0-h, x_0+h[$.
On dit que f est continue en x_0,si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$



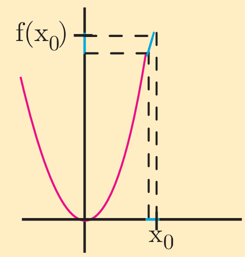
Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[x_0, x_0+h[$.
On dit que f est continue à droite en x_0 , si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$



Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]x_0-h, x_0]$.
On dit que f est continue à gauche en x_0 , si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$



Lorsque la fonction f est continue en a, la représentation graphique met en évidence un tracé continu de la courbe pour les points qui se trouvent de part et d'autre de A(a,f(a)) et qui sont voisins de A(a, f(a)).

Vocabulaire :

si f n'est pas continue en x_0, on dit que f est discontinue en x_0.

Activité 3 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel x_0.

Démontrer que f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0.

Théorème :

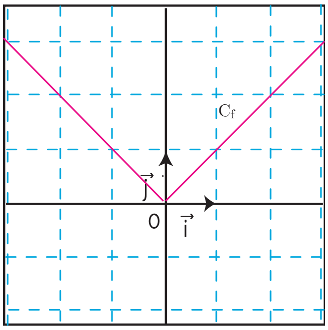
(Une fonction f est continue en x_0) si et seulement si $\left(\begin{array}{c}\text{f est continue à gauche en } x_0\\ \text{et}\\ \text{f est continue à droite en } x_0\end{array}\right)$

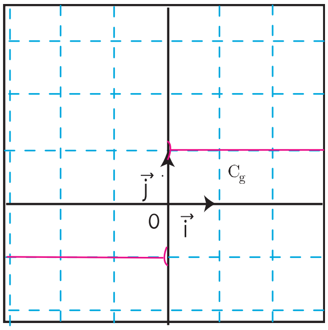
Activité 4 :

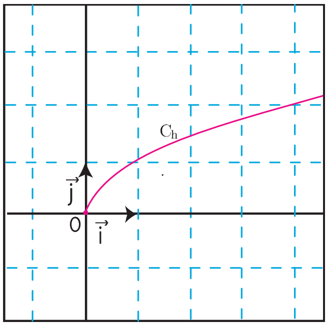
Soit f la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{si } x\in]-4,3[\\ 3 & \text{si } x=3\\ -4x+15 & \text{si } x\in]3,5[\end{cases}$

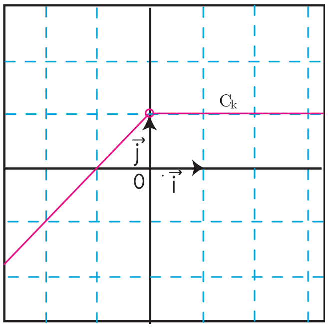
La fonction f est- elle continue en 3?

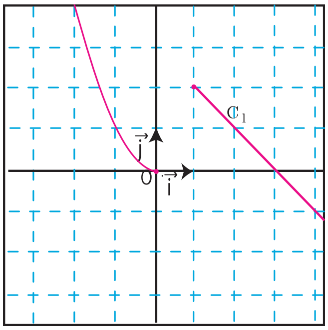
Activité 5 : On donne les graphiques ci- dessous











Utiliser les graphiques pour déterminer éventuellement les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$
$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$	$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$	$\lim\limits_{x\to 0} g(x)$
$\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$	$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$	$\lim\limits_{x\to 0} h(x)$
$\lim\limits_{x\to 0^-} i(x)$	$\lim\limits_{x\to 0^+} i(x)$	$\lim\limits_{x\to 0} i(x)$
$\lim\limits_{x\to 0^-} k(x)$	$\lim\limits_{x\to 0^+} k(x)$	$\lim\limits_{x\to 0} k(x)$

IV- Continuité des fonctions usuelles

Activité 1 :

1°) Tracer les courbes représentatives des fonctions :

$$x \mapsto 2\ ,\ x \mapsto 2x-1\ ,\ x \mapsto x^2 \text{ et } x \mapsto x^3$$

2°) Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la continuité de ces fonctions en tout point de $\mathbb{R}$

Théorème admis :

Les fonctions $x \mapsto k$ $(k \in \mathbb{R})$, $x \mapsto x$, $x \mapsto ax+b$ $(a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R})$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto |x|$ sont continues en tout point de $\mathbb{R}$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout point des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en tout point de l'intervalle $]0,+\infty[$

V-Opérations sur les fonctions continues :

Activité 1 :

Soient $f : x \mapsto 2x+1$ et $g : x \mapsto x-1$

1°) Donner l'expression de chacune des fonctions $f+g$, $f \times g$ et $\frac{f}{g}$

2°) Tracer les courbes représentatives de $(f+g)$ et de $f \times g$

3°) a/ Vérifier que pour $x \neq 1$, $\frac{f}{g}(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$

b/ Tracer la courbe représentative de $\frac{f}{g}$

Théorème admis :

Soient f et g deux fonctions continues en un point x_0 alors $f+g, f\times g$ et λf $(\lambda \in \mathbb{R})$ sont continues en x_0.

Si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.

Activité 2 :

1°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $x \mapsto x^n$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$
2°) En déduire que toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$
3°) Que peut-on dire de la continuité d'une fonction rationnelle ?

Théorème :

- Toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est continue en tout point où elle est définie.

Exemples de calcul de limites d'une fonction continue :

Activité 3 :

Calculer la limite de f en x_0 dans chacun des cas suivants :

1°) $f(x) = 3x+4$, $x_0=1$	2°) $f(x) = 1-2x$, $x_0 = 4$
3°) $f(x) = \frac{3x+4}{3-x}$, $x_0 = 2$	4°) $f(x) = 4$, $x_0 = 1$
5°) $f(x) = 3x+4$, $x_0 = 1$	6°) $f(x) = 2x^2-3x+4$, $x_0 = 0$
7°) $f(x) = x^3-2x^2-3x+4$, $x_0 = -1$	8°) $f(x) = \frac{2x^2-3x+4}{x+1}$, $x_0 = -3$

Continuité de $\sqrt{f}$ et de $|f|$

Activité 4 :

Soit $f : x \mapsto x^2 - 2x - 8$

1°) Etudier la continuité de f en tout point de $\mathbb{R}$

2°) Tracer la courbe représentative de f.

3°) En déduire la courbe représentative de $|f|$

4°) La fonction $|f|$ est elle continue en tout point de $\mathbb{R}$

Théorème admis :

Soit f une fonction continue en un réel x_0 alors $|f|$ est continue en x_0.
Si de plus f est positive alors $\sqrt{f}$ est continue en x_0.

Activité 5 :

Calculer les limites suivantes

a/ $\lim\limits_{x \to 2} |4 - 2x|$ b/ $\lim\limits_{x \to 2} \left|\dfrac{x^2 - x + 1}{x - 4}\right|$ c/ $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{2x + 3}$ d/ $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \sqrt{1 - x^2}$

Exemples de calcul de limites d'une fonction discontinue :

Activité 6 :

Soient deux fonctions f et g définies par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 3}$ et $g(x) = x + 2$

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2°) **a/** la fonction f est-elle continue en (-3) ?

b/ La fonction g est-elle continue en (-3)?

3°) Vérifier que pour tout $x \neq -3$; $f(x) = g(x)$

4°) En déduire que $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = g(-3) = -1$

Théorème admis :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I sauf en un réel x_0 et soit g une fonction définie sur l'intervalle I.
Si g est continue en x_0 et si pour tout $x \neq x_0$; $f(x) = g(x)$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g(x_0)$

Activité 7 :

Soient $f : x \mapsto \dfrac{1 - x^3}{1 - x}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2°) Vérifier que pour tout $x \neq 1$; $f(x) = x^2 + x + 1$

3°) Calculer alors $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Activité 8 :

Calculer la limite de f en x_0 dans chacun des cas suivants :

1°) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$, $x_0=-1$	2°) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x+1}$, $x_0=-1$
3°) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x}$, $x_0=0$	4°) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, $x_0=1$

Théorème

Soit f une fonction définie sur un ensemble contenant un intervalle de type $]x_0, x_0+h[$ et soit g une fonction définie sur $[x_0, x_0+h[$

Si g est continue à droite en x_0 et si pour tout $x \neq x_0$; $f(x) = g(x)$ alors $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=g(x_0)$

Théorème

Soit f une fonction définie sur un ensemble contenant un intervalle de type $]x_0-h, x_0[$ et soit g une fonction définie sur $]x_0-h, x_0]$

Si g est continue à gauche en x_0 et si pour tout $x \neq x_0$; $f(x) = g(x)$ alors $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=g(x_0)$

Activité 9 :

Soit $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{si } x<0 \\ 1-x & \text{si } 0\leq x<2 \\ x & \text{si } x>2 \end{cases}$

Calculer les limites éventuelles suivantes :

a/ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$	**b/** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$
c/ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$	**d/** $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$
e/ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$	**f/** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

VI– Continuité sur un intervelle

Définition 1

On dit qu'une fonction f est continue sur]a ,b[si f est continue en tout point de]a ,b[.

Définition

On dit qu'une fonction f est continue sur [a ,b] si f est continue en tout point de]a ,b[et elle est continue à droite en a et à gauche en b.

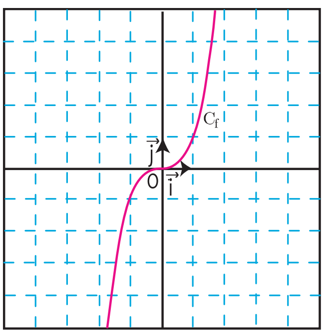
Activité 1 :

Par analogie, donner la définition de la continuité d'une fonction f sur :

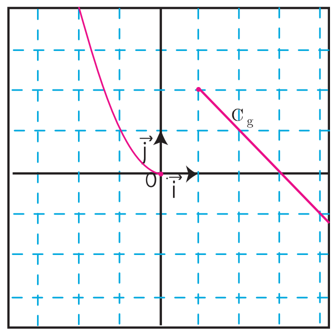
a/ [a, b[	**b/**]a, b]	**c/**]a, +∞ [	g/ ℝ
d/ [a, +∞[	**e/** [a, +∞[	**f/**]-∞, b]	

Activité 2 :

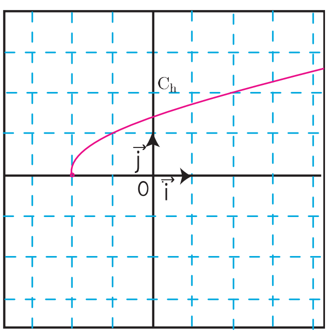
Indiquer si les fonctions associées aux graphiques ci-dessous sont continues sur les différents intervalles :



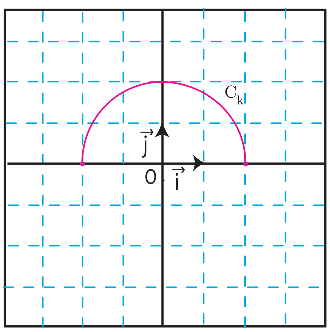
•I=[-1 , 1[
•I=[1, +∞[
•I= IR



•I=]-∞, 0]
•I=]-1, 1[
•I= [1 , +∞[



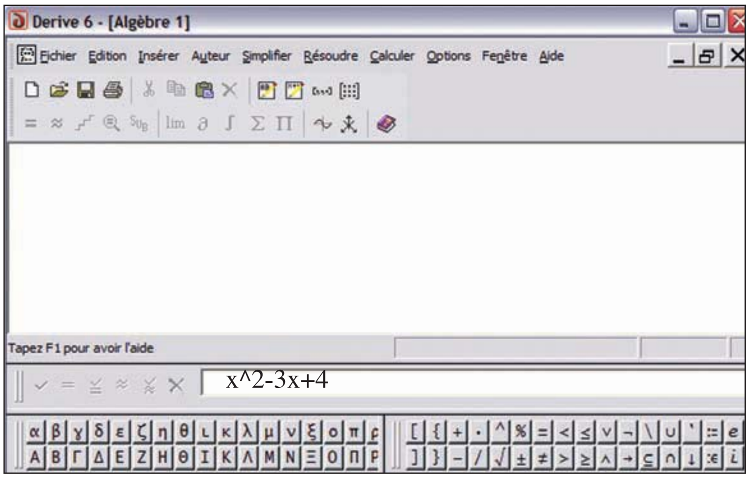
•I=[-2 ,+∞[
•I=]-2 ,+∞[
•I= IR



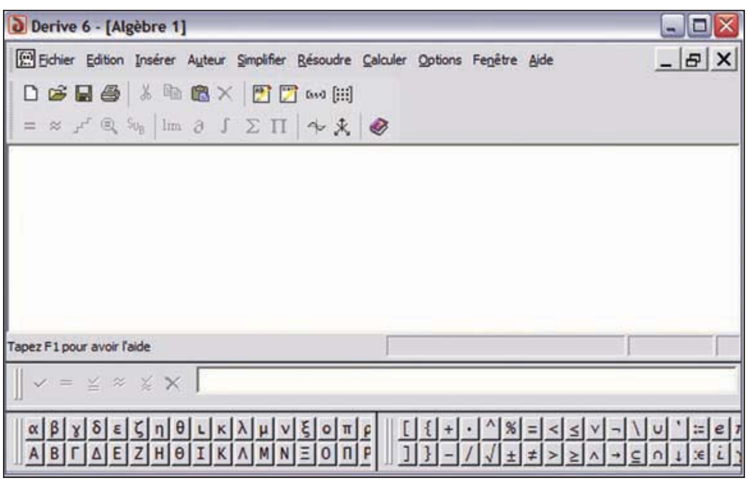
•I=]-2, 2]
•I=]-2, 2[
•I=[-2, 2[

Calcul de limite en un point en utilisant un logiciel de calcul formel (Derive, SWP, …)

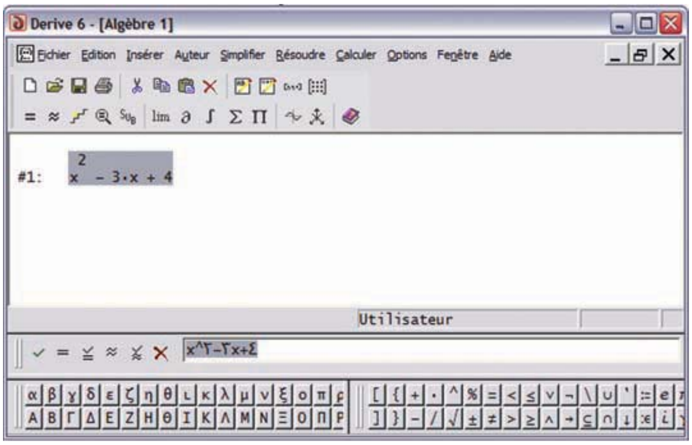
1°) Ouvrir le logiciel derive en cliquant sur



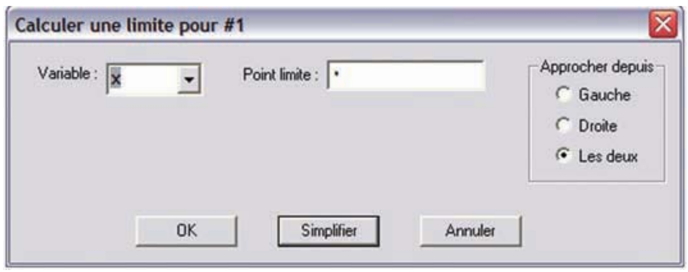
2°) Dans la barre d'expression taper l'expression suivante : x^2-3x+4 pour exprimer x^2-3x+4



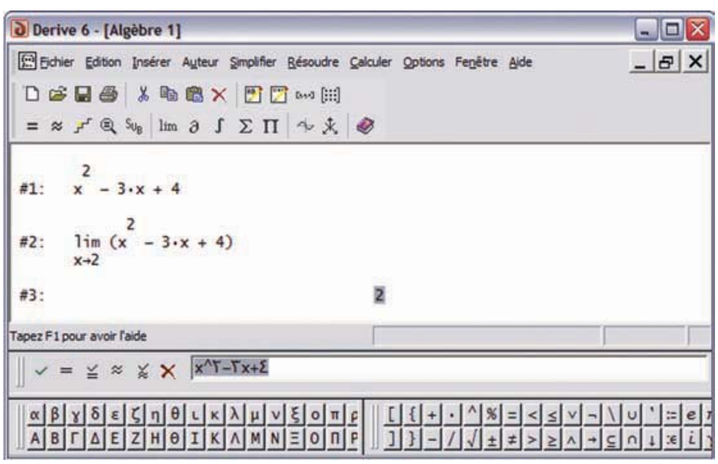
Puis valider par Entrer pour obtenir :



3°) Cliquer sur le raccourci $\boxed{\text{lim}}$ pour obtenir :



Pour point limite compléter par 2 et appuyer sur simplifier pour obtenir :



C'est-à-dire $\lim\limits_{x \to 2}\left(x^2 - 3x + 4\right) = 2$

4°) Faire de même pour calculer la limite de f en x_0 dans chacun des cas suivants :

• $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$, $x_0 = 5$	• $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 4}{x+1}$, $x_0 = -3$	• $f(x) = 3x + 4$, $x_0 = 0,5$
• $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x+1}$, $x_0 = -1$	• $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$, $x_0 = 1$	• $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x+1}$, $x_0 = -1$

EXERCICES ET PROBLÈMES

1

Calculer les limites éventuelles suivantes :

1°) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-5x+2)$

2°) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-3x^2+x-3)$

3°) $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x^3)$

4°) $\lim\limits_{x\to 0}(ax^2+bx+c)$

5°) $\lim\limits_{x\to 1}(mx+b)$

6°) $\lim\limits_{x\to 0}(2x^2-5b+3)$

7°) $\lim\limits_{x\to 3}(x-1)^2(x+1)$

8°) $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+1)(1-2x)$

9°) $\lim\limits_{x\to 5}(x+2)\sqrt{x-1}$

10°) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x+2}$

2

Soit $f(x)=\begin{cases}3x+2 & \text{si } x\le 1\\ 4x-3 & \text{si } x>1\end{cases}$

a/ Trouver $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

b/ Trouver $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

c/ f a-t-elle une limite en 1 ?

3

Etudier la continuité de f en x_0 dans chacun des cas suivants :

1°) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$, $x_0=1$ et $x_0=3$

2°) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2} & \text{si } x<1\\ 3x-1 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$, $x_0=1$

3°) $f(x)=\dfrac{3x+4}{3-x}$, $x_0=2$

4°) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x-4}{x+1} & \text{si } x\ne -1\\ -5 & \text{si } x=-1\end{cases}$, $x_0=-1$

4

Soit f et g deux fonctions définies par :

$f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = 2x^2 + x + 5$

1°) Déterminer les limites en 1 des fonctions f et g.

2°) En déduire les limites en 1 des fonctions :

$f+g, -5f, f\times g, \dfrac{1}{f}$ et $\dfrac{f}{g}$

5

Soit f et g deux fonctions définies par :

$f(x)=x^2+x+1$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$

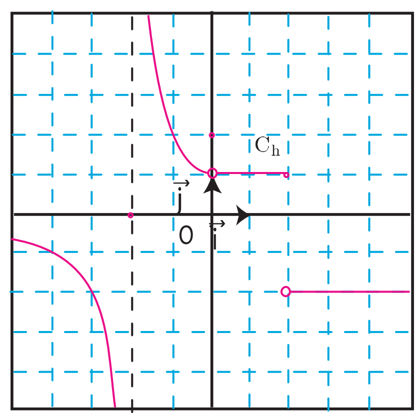
1°) Déterminer les limites en 1 des fonctions f et g.

2°) En déduire les limites en 1 des fonctions :

$f+g, 3g, f\times g, \dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$

6

Soit f la fonction définie sur]-5,5[représentée par le graphique suivant :



1°) Donner f(0), f (-2) et f (2)

2°) a/ Donner $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

b/ f est-elle continue à gauche de 2? À droite de 2?

3°) Donner les valeurs de x où f est discontinue.

4°) a/ f est-elle continue sur [0, 2]? Sur] 2, 5[?

b/ Donner les intervalles où f est continue.

7

Une fonction f est définie sur [0,1[de la façon suivante:

si $x \in [0;0,9[$, alors f(x)=1

si $x \in [0,9;0,99[$ alors f(x)=0

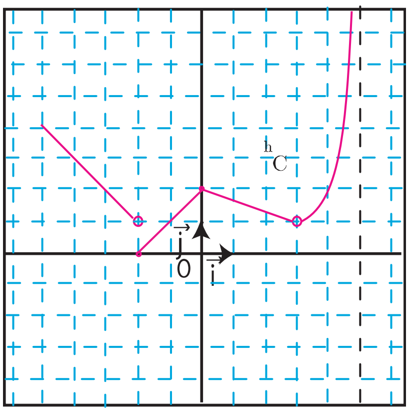
si $x \in [0,99;0,999[$ alors f(x)=1

....etc

1°) Trouver la valeur prise par f pour :
$x_1 = 0{,}518$; $x_2 = 0{,}9918$; $x_3 = 0{,}99999918$.
2°) f admet-elle une limite à gauche $x_0 = 1$.

8

La figure ci-dessous représente une fonction f.

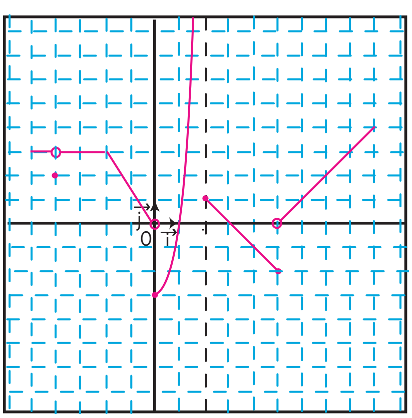


Trouver $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ si elle existe, pour :

a/ a = -2	**b/** a = 0	**c/** a = 3	**d/** a = 5

9

La figure ci-dessous représente une fonction f.



1°) Trouver $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ dans chaque cas.

Si la limite n'existe pas, dire pourquoi

a/ a = 0	b/ a = 3	c/ a = 2	d/ a = -4
e/ a = -2	f/ a = 5	g/ a = 4	h/ a = 6

2°) Dire si f est continue à l'endroit indiqué, si elle ne l'est pas dire pourquoi ?

a/ a = 0	b/ a = 3	c/ a = 2	d/ a = -4
e/ a = -2	f/ a = 5	g/ a = 4	h/ a = 6

3°) Dire si la fonction est continue sur l'intervalle indiqué et justifier la réponse dans chaque cas :

a/]-2,0[	b/]-4,3[	c/] -∞ ,– 2]	d/ [0,1]
e/ [0,2]	f/ [2,5]	g/ [-4,-2[	h/ [2,+∞ [

10

Soit $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x est un entier} \\ -1 & \text{si x n'est pas entier} \end{cases}$

1°) Tracer le graphique de la fonction f.
2°) Donner : $f(0)$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

3°) f est elle continue à gauche en 2 ? À droite en 2? En 2 ?
4°) f est elle continue à gauche en 1,5 ? Àdroite en 1,5? En 1,5 ?
5°) Donner tous les points où f est discontinue.

11

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x est un entier} \\ x & \text{si x n'est pas entier} \end{cases}$

1°) Tracer le graphique de la fonction f.
2°) Donner : $f(2)$ et $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

3°) f est elle continue à gauche en 2 ? À droite en 2 ? En 2 ?
4°) f est elle continue à gauche en 1 ? À droite en 1 ? En 1 ?
5°) Donner tous les endroits où f a une discontinuité.

12

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

13

Pour quelle valeur de α la fonction

$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ \alpha & \text{si } x = 1 \end{cases}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

14

Pour quelle valeur de β la fonction

$f : x \mapsto \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x \leq -1 \\ 3x+\beta & \text{si } x > -1 \end{cases}$ est-elle continue sur IR ?

15

Pour quelle valeur de γ la fonction

$f : x \mapsto \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x > 2 \\ \gamma x+2 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$ est-elle continue sur IR ?

16

Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$x \mapsto 8\sqrt{x}\,;\, x \mapsto \dfrac{1}{x-6}\,;\, x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$

$x \mapsto |x+2|\,;\, x \mapsto \dfrac{|x+1|}{x+1}\,;\, x \mapsto |x^2+x-6|$

$x \mapsto \sup(2x+1, -x^2)\,;\, x \mapsto x^{69}-1.$

17

Calculer les limites éventuelles des fonctions suivantes en x_0:

1°) $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x > 2 \\ 0 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$; $x_0 = 2$

2°) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ x^3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$; $x_0 = 1$

3°) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 4(x-1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$; $x_0 = 2$

18

Calculer les limites éventuelles suivantes :

1°) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

2°) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{9-x^2}{x+3}$

3°) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-3x-10}{x-5}$

4°) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-x-6}{x+2}$

19

Voici une partie de la table des impôts en Tunisie:

Si votre revenu imposable est supérieur a (en DT)	mais n'excède pas (en DT)	Votre impôt est de (en DT)
0	1500	0 %
1500	3500	10 %
3500	5000	15 %
5000	7500	20 %
7500	10000	25 %

1°) Quel impôt provincial devrait être payé par une personne dont le revenu était de 1500 DT?
De 1510 DT? De 1480 DT?
2°) Tracer le graphique de l'impôt provincial à payer(I)en fonction du revenu imposable (r) pour r compris entre 1400 DT et 8000 DT.
3°) Donner, si possible, I (5100) .
4°) Donner tous les endroits où cette fonction est discontinue.

Les mathématiciens inventent le calcul différentiel (dérivation) sans avoir de définitions explicites et précises des notions de fonction, de limite, d'infiniment petit.
La nécessaire remise en ordre de cette théorie conduit à en dégager les notions fondamentales. Euler, le premier, propose un nouvel ordre d'exposition, qui est à peu de choses près le même que celui d'aujourd'hui fonctions, limites, dérivation, calcul intégral. Au, XIXème siècle, un souci grandissant de rigueur conduit à l'élucidation de ces concepts de base. Cauchy symbolise en France ce mouvement. Voici comment il définit la continuité d'une fonction sur un intervalle [a, b]
" Si en partant d'une valeur de x, comprise entre a et b, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence f(x + a) - f(x). [...]

La fonction f(x) est continue si pour chaque valeur de x, la différence f(x +a) - f(x) décroît

indéfiniment avec celle de a ". Ceci est à comparer avec la définition moderne:
f est continue en x si $\boxed{\lim_{\alpha \to 0} f(x+\alpha) = f(x)}$.

Mais, pour arriver à cette définition, il a fallu auparavant donner une définition précise et opérationnelle d'une limite.

• Vers 1760
Publication de l'article Limites, par Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) dans l'Encyclopédie, où il est indiqué que la limite est une opération fondamentale des mathématiques.

• 1821
Publication du premier volume du Cours d'Analyse de l'École royale polytechnique où Cauchy fonde l'Analyse sur la notion de limite et de fonction continue. Cet exposé est celui désormais adopté.

• 1914
Felix Hausdorff (1868-1942) publie Les fondamentaux de la théorie des ensembles qui contient une définition topologique d'une fonction continue (à partir de la notion de voisinage). La continuité devient une notion clef de la topologie.

Augustin Louis Cauchy
(Paris, 1789 - Sceaux,1857)

Cauchy est devenu professeur à l'École polytechnique en 1814, après avoir débuté une carrière d'ingénieur des Ponts et Chaussées qui ne lui convenait pas. Il rédigea un cours d'Analyse, dans lequel il prit comme éléments fondateurs les notions de limite et de continuité :
l'Analyse moderne était née.Mathématicien tés productif, il construisit la théorie de l'élasticité.

Seul deux choses sont infinies : L'univers et la bêtise humaine.
Mais je ne suis pas sûr pour l'univers
ALBERT EINSTEIN

EXTENSION DE LA NOTION DE LIMITE & BRANCHES INFINIES

Chapitre 9

- **Pour commencer**
- **Cours**

- **Utilisation des T.I.C.**
- **Exercices et problèmes**
- **Math culture.**

Activité 1 :

1°) Donner l'écriture scientifique des nombres suivants :

0.00001 ; -10^{-6} ; 10^{6} ; -2×10^{7} ; $4\times10^{9}-8$; $2-9\times10^{8}$;

$\dfrac{-3}{5\times10^{8}-2}$; $10^{7}+\dfrac{1}{10^{7}}$; $10^{-9}+3\times10^{-6}$; $2\times10^{7}+5\times10^{9}$

2°) Indiquer ceux qui sont proches de 0, ceux qui sont de grands nombres en valeur absolu.

Activité 2 :

A laide d'une calculatrice, Indiquer pour chacune des fonctions suivantes, le comportement apparent de f(x) lorsque x prend des grandes valeurs positives.

a/ $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 10000$

b/ $f(x) = 0{,}005x^2 - 10x + 30000$

c/ $f(x) = \dfrac{3-5x}{2x+1}$

Activité 3 :

On estime que la population d'une certaine municipalité est modélisée par $P(t) = 20 - \dfrac{6}{t+1}$ milliers d'habitants dans t années

1°) Que deviendra cette population dans 2 ans, dans 5 ans et dans 10 ans ?

2°) Compléter le tableau suivant :

t	10	20	30	40	50
P(t)					

3°) A partir de quelle année, 20 est une valeur approchée de P(t) à 10^{-2} prés ?

Activité 4 : (Les populations urbaines)

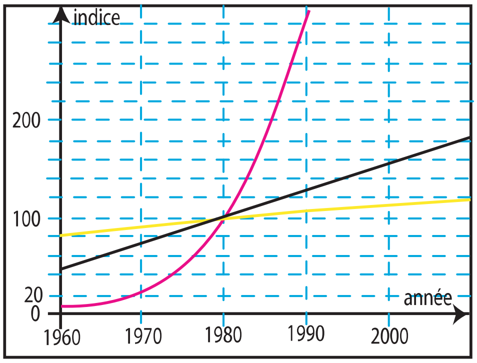
Les populations urbaines suivent des comportements très différents au cours du temps.
Le graphique ci-dessous présente l'évolution pour trois villes A, B et C.
Afin de faire une réelle comparaison, leur population est donnée en indice 100 en 1980.

1°) D'après le graphique, l'indice du nombre d'habitants pour chaque ville est-il majoré ?

2°) On suppose que le nombre d'habitants de la ville A est modélisé par $f(x) = \dfrac{120x+320}{x+4}$,

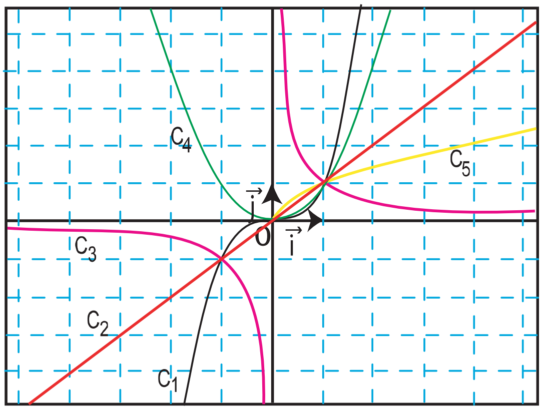
celui de la ville B est modélisé par $g(x) = 30x + 65$ et celui de la ville C est modélisé par $h(x) = 12x^2 + 4$.

Quel sera la population de chaque ville en 2020 et 2050 ?



Activité 5 :

Les fonctions $f : x \mapsto x$; $g : x \mapsto \frac{1}{x}$; $h : x \mapsto x^2$; $k : x \mapsto \sqrt{x}$ et $l : x \mapsto x^3$ sont représentées sur la figure ci-contre :



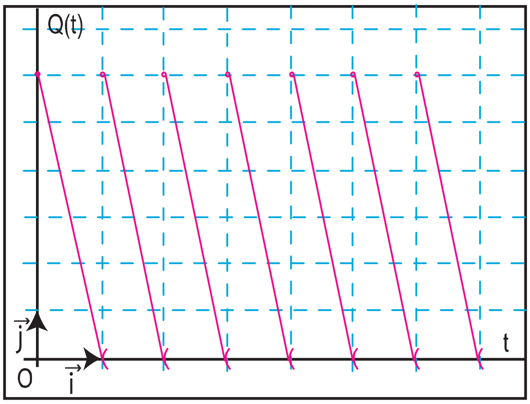
1°) Identifier leurs courbes représentatives parmi les courbes C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5.

2°) Ordonner suivant les valeurs de x les expressions f(x), g(x), h(x), k(x) et l(x).

3°) Déterminer graphiquement les limites éventuelles de f(x), g(x), h(x), k(x) et l(x) en $+\infty$ et $-\infty$

Activité 6 :

Une entreprise de fabrication s'approvisionne en pièces en passant des commandes tous les mois. En supposant que l'écoulement du stock se fasse de façon régulière, que chaque nouvelle commande arrive au moment où l'autre est épuisée et que toutes les commandes soient égales, on obtient le graphique suivant ci-contre pour la quantité Q(t) de pièces en stock.



1°) Quel sera le niveau du stock au début du 3$^{\text{ème}}$ mois?

2°) Quel sera le niveau du stock à la fin du 4$^{\text{ème}}$ mois?

3°) Quel sera le niveau du stock à long terme?

I– Limite finie à l'infini

Activité 1 :

La population d'un pays évolue selon une fonction f telle que : $f(x)=\dfrac{3x+200}{x+20}$

où x est le nombre d'années écoulées depuis la fin de l'année 1960, et f(x) est exprimée en millions d'habitants.

1°) Vérifier que : $f(x)=\dfrac{140}{x+20}+3$ pour $x\in[0,+\infty[$.

2°) Utiliser la machine à calculer pour donner une valeur approchée de $f(10^{10})$ et de $f(10^{20})$

3°) **a/** Comment choisir x pour que : $f(x)-3>0{,}001$?

b/ Quelle conjecture sur $f(x)$ pouvez vous faire lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes ?

Activité 2 :

Soit f la fonction définie sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$.

1°) a/ Vérifier que pour tout $x\in\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, $f(x)=2-\dfrac{1}{x}$

b/ Etudier les variations de la fonction f sur $\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$.

2°) Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ où l'unité de longueur est le centimètre.

a/ Tracer dans ce repère la courbe représentative de la fonction $x\to-\dfrac{1}{x}$

b/ En déduire la courbe représentative C de f.

3°) Tracer dans le même repère la droite D d'équation y = 2

Pour tout ,$x\in\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ on note M le point de C d'abscisse x et N le point de D de même abscisse x ; alors la différence des ordonnées y_M-y_N permet d'apprécier les positions relatives de M et N.

a/ Vérifier que $y_M-y_N=-\dfrac{1}{x}$.

b/ Pour tout $x\in\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ quelle est la position du point M par rapport au point N ?

c/ Déterminer l'ensemble des abscisses x des points M et N, telles que la distance MN soit inférieur à 10^{-3}

Remarque :

on constate que f(x) peut devenir aussi voisine de 2 que l'on veut à condition que x prenne des valeurs assez grandes.

Cette propriété s'exprime de la façon suivante :

La fonction f à pour limite 2 quand x tend vers +∞ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = 2$.

Activité 3 :

Soit $f :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{x} + 1$$

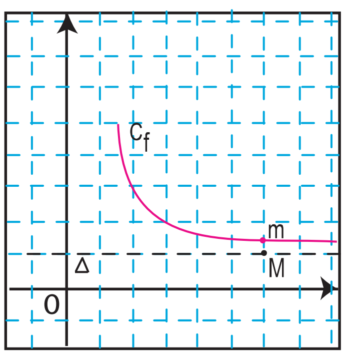
1°) Compléter le tableau suivant :

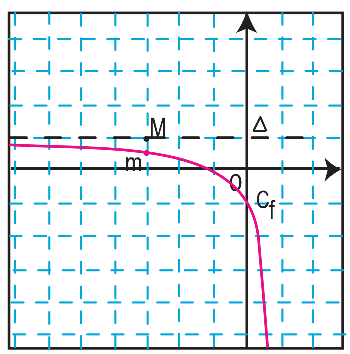
x	-10	-100	-10^3	-10^5
f(x)				

2°) Déterminer les réels x qui vérifient la condition suivante : 1 est une valeur approchée de f(x) à 0.001 près.

3°) Quelle conjecture pouvez vous faire quand x tend vers - ∞ ?

Interprétation graphique : NOTION D'ASYMPTOTE HORIZONTALE





Soit C_f la courbe représentative de f et Δ la droite d'équation y = 1 .
Le nombre $|f(x) - 1|$ est la distance mM, avec M(x, 1) et m(x, f(x)).
Dire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ c'est dire que la distance mM tend vers zéro quand x tend vers +∞.
On dit que la droite Δ d'équation y = 1 est une asymptote à C_f au voisinage de +∞.

Soit C_f la courbe représentative de f et Δ la droite d'équation y = 1.
Le nombre $|f(x) - 1|$ est la distance mM, avec M(x, 1) et m(x, f(x)).
Dire que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ c'est dire que la distance mM tend vers zéro quand x tend vers – ∞.
On dit que la droite Δ d'équation y = 1 est une asymptote à C_f au voisinage de – ∞.

Définition

On dit que $\Delta : y = a$ est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$

Définition

On dit que Δ: $y = a$ est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$

Exercice 1 : Tracer le graphique d'une fonction f vérifiant les conditions suivantes dans chacun des cas suivants :

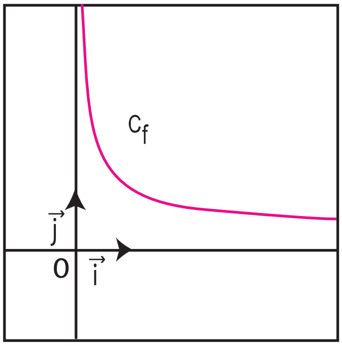
1°) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

2°) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

Exercice 2 :

La courbe ci-contre est la représentation graphique de la fonction $f : x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ définie sur $]0,+\infty[$

Quelle est la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$?



II – Limite infinie à infinie

Activité 1 :

On estime que le coût total de production en DT de x unités d'un article est modélisé par : $C(x) = x^2 + 6x + 19$.

1°) Quel est le coût moyen $C_m(x)$ de production si x = 100 ?

(Le coût moyen est obtenu en divisant le coût total par le nombre d'unités produites)

2°) Vérifier que pour $x \in]0,+\infty[$; $C_m(x) > x+5$

3°) Trouver une condition suffisante sur x pour que m(x) dépasse 100000

Activité 2 :

Soit f, g et h les fonctions définies sur $[0, +\infty[$par : $f(x)= x$,$g(x) = x^2$ et $h(x) = x^3$

1°) Completer le tableau suivant:

x	1	10	100	10^4	10^6	10^{12}
f(x)						
g(x)						
h(x)						

2°) Déterminez un nombre A positif tel que si x est supérieur ou égal à A, alors f(x) est supérieur à 10^{20}.

3°) Déterminez un nombre B positif tel que si x est supérieur ou égal à B, alors g(x) est supérieur à 10^{30}.

4°) Déterminez un nombre C positif tel que si x est supérieur ou égal à C, alors h (x) est supérieur à 10^{15}.

5°) Les nombres A, B et C sont-ils uniques?

6°) Que peut on dire du comportement de f(x), g(x) et h(x) quand x tend vers $+\infty$?

D'une façon générale si on peut rendre f(x) aussi grand que l'on veut à condition que x soit suffisamment grand, on dit que limite de f(x) égal à $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

Activité 3 :

Soit f, g et h les fonctions définies sur$]-\infty , 0]$ par :$f(x) = x$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = x^3$

1°) Compléter le tableau suivant:

x	-1	-10	-100	-10^4	-10^6	-10^{12}
f(x)						
g(x)						
h(x)						

2°)Déterminer un nombre A positif tel que si x est inférieur ou égal à $-A$, alors f(x) est inférieur à -10^{35}.

3°)Déterminer un nombre B positif tel que si x est inférieur ou égal à $-B$, alors g(x) est supérieur à 10^{16}.

4°)Déterminer un nombre C positif tel que si x est inférieur ou égal à $-C$, alors h (x) est inférieur à -10^8.

5°) Les nombres A, B et C sont-ils uniques?

6°) Que peut on dire du comportement de f(x), g(x) et h(x) quand x tend vers $-\infty$?

Activité 4 :

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x}$

1°) Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $f(x) > 100$.

2°) Soit $A > 0$. Déterminer les valeurs de x pour que $f(x) > A$.

3°) Compléter le tableau suivant :

x	10	100	10^4	10^6	10^8
f(x)					

4°) Quel conjecture peut on faire sur la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$?

Activité 5 :

Soit la fonction $x \mapsto |x|$

Quel est le comportement de f(x) quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers $-\infty$?

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE : NOTION DE BRANCHE PARABOLIQUE ET D'ASYMPTOTE OBLIQUE

Activité 6 :

1°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, tracer la courbe C de la fonction $f : x \mapsto x^2$ et la courbe C′ de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$.

2°) Soit M un point de C d'abscisse x.

a/ Quel est le coefficient directeur de la droite (OM) ?

b/Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c/Quelle est la position limite de la droite (OM) quand x tend vers $+\infty$ ou x tend vers $-\infty$

3°) Soit M un point de C d'abscisse x.

a/ Quel est le coefficient directeur de la droite (OM) ?

b/Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$.

c/ Quelle est la position limite de la droite (OM) quand x tend vers $+\infty$?

On dit que C admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de$-\infty$.
De même on dit que C'admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

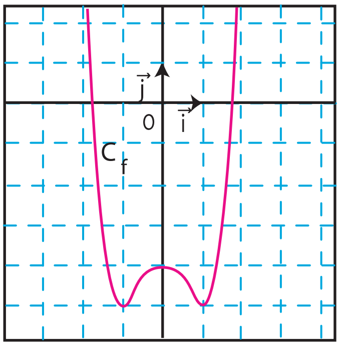
on dit que la courbe de f admet une branche parablique de direction l'axe des ordonnées.

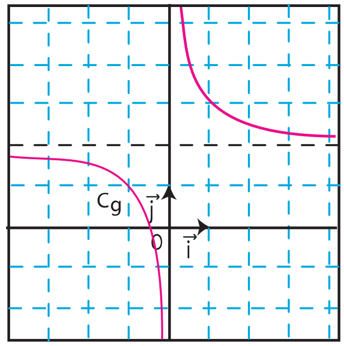
Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

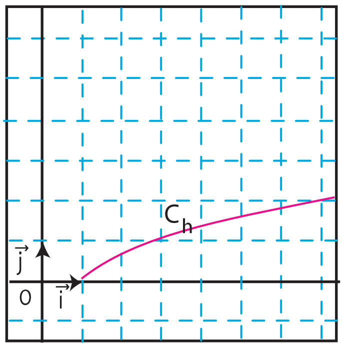
Si $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ on dit que la courbe de f admet une branche
branche parablique de direction l'axe des abscisses.

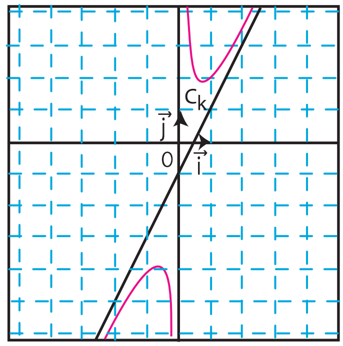
Activité 7 :

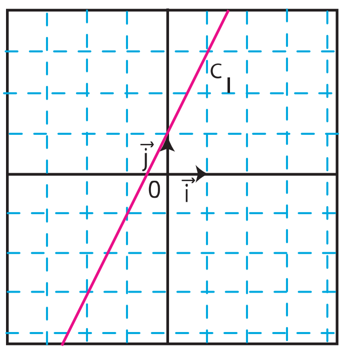
Par simple lecture graphique, citer parmi les courbes suivantes celle qui admet des branches paraboliques :

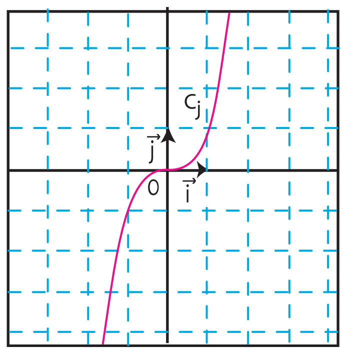












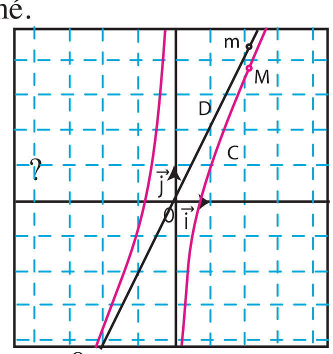
Activité 8 :

La figure ci-contre représente la courbe de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 - 1}{x}$

et la droite D d'équation $y = 2x$, dans un repère orthonormé.

Le point $M(x, f(x))$ est un point de C .

Le point m de D a pour abscisse le même réel x et pour ordonnée $y = 2x$.



1°) D'après le graphique, quelle est la limite de $f(x)$ en $+\infty$ et la limite de $f(x)$ en $-\infty$?

2°) vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}^*; f(x) = 2x - \dfrac{1}{x}$

3°) Evaluer en fonction de x la distance mM.

4°) En déduire que quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, mM tend vers 0.

Définition

Soit a un réel non nul et b un réel. On dit que la droite D d'équation y = ax + b est une asymptote oblique à C_f si $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (ax+b) = 0$

Remarque :

Soit a un réel non nul et b un réel.

Si f(x) = ax + b+g(x) avec $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ ou $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, alors la droite y = ax + b est une asymptote oblique à C_f.

Activité 9 :

Pour chacun des cas suivants, tracer dans un repère orthonormé la représentation graphique C_f d'une fonction f sachant que :

1°) C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$. et au voisinage de $-\infty$.

2°) C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$ et une asymptote oblique D d'équation y = –x au voisinage de $-\infty$.

3°) C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ et f(1) = –3.

4°) C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$ et une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

Limite des fonctions usuelles

Le théorème suivant nous donne les limites de quelques fonctions usuelles à l'infini :

Théorème admis:

$$\lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

III– Limite infinie en un point

Activité 1 :

soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$

1°) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2°) Compléter le tableau suivant :

x	0,5	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1	1,5
f(x)								

3°) Déterminer les réels x pour lesquels f(x) > 100.

4°) Soit A un réel strictement positif ; déterminer les réels x pour lesquels f(x) > A.

Activité 2:

soit $g : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$

La fonction g n'est pas définie en 2.

On se propose d'étudier le comportement de g pour des valeurs de x proche de 2.

1°) Compléter les tableaux suivants :

x	1	1,5	1,9	1,99	1,999
f(x)					

x	3	2,5	2,1	2,01	2,001
f(x)					

2°) Déterminer les réels x supérieurs à 2 pour lesquels f(x) > 100.

3°) Déterminer les réels x inférieurs à 2 pour lesquels f(x) < –100.

4°) Soit A un réel supérieur à 100 :

a/ Déterminer les réels x supérieurs à 2 pour lesquels f(x) > A.

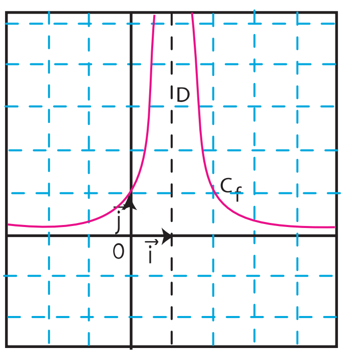
b/ Déterminer les réels x inférieurs à pour lesquels f(x) < –A.

Remarque et notation

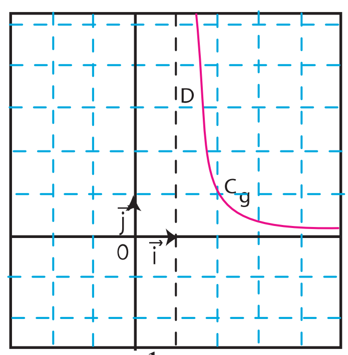
• On a remarqué que f(x) peut dépasser n'importe quel nombre positif, à condition que x soit assez voisin de 2 à droite. On dit que la limite de f(x) quand x tend vers 2 par valeur supérieure est égale à +∞ on note $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

• De même, on a remarqué que f(x) peut devenir inférieur à n'importe quel nombre négatif, a condition que x soit assez voisin de 2 à gauche.On dit que la limite de f(x) quand x tend vers 2 par valeur inférieure est égale à +∞ on note $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

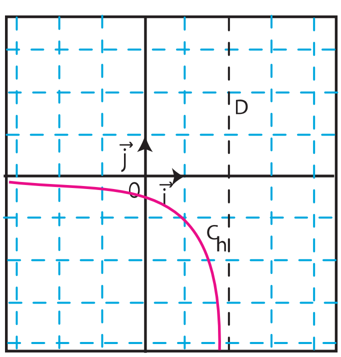
Interprétation graphique : NOTION D'ASYMPTOTE VERTICALE



$f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$



$g : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ avec x > 1



$h : x \mapsto \dfrac{1}{x-2}$ avec x < 2

D'après les représentations graphiques ci-dessus on remarque que :

- Plus x approche de 1, la courbe de f se rapproche de la droite verticale d'équation $x = 1$.
- Plus x approche de 1 à droite, la courbe de g se rapproche de la droite verticale d'équation $x = 1$.
- Plus x approche de 2 à gauche, la courbe de h se rapproche de la droite verticale d'équation $x = 2$.

Définition

la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe de f dans chacun des cas suivant :

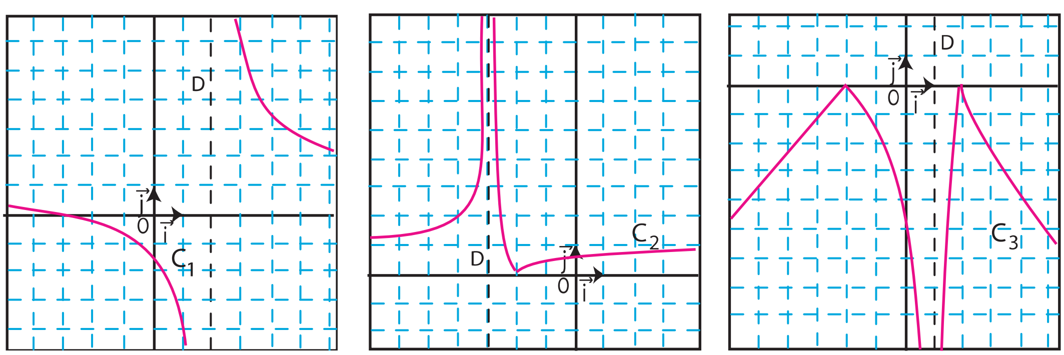
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Exemples :

- L'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe de la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
- La droite d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale à la courbe de la fonction $x \mapsto \dfrac{4}{x-3}$.

Activité 3 :

Les courbes C_1, C_2 et C_3 représentent respectivement trois fonctions f, g et h :



Déterminer les limites éventuelles suivantes :

a/ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

b/ $\lim\limits_{x \to (-3)^+} g(x)$, $\lim\limits_{x \to (-3)^-} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -3} g(x)$

c/ $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$

Exercice : Tracer dans chacun des cas suivants le graphique d'une fonction f remplissant certaines conditions :

1°) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

2°) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3°) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

Limite des fonctions usuelles

On admet les résultats suivants :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \ \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \ \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \ \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

IV–Opérations sur les limites

1°)Limite d'une somme :

Activité 1 :

Soit f et g deux fonctions définies sur IR par : $f(x) = x^2+1$ et $g(x) = 2x^2+3$.

1°) Tracer les courbes représentatives de f et de g.

2°) Quel est le comportement de f et de g en $+\infty$?

3°) Expliciter $(f+g)(x)$ pour tout réel x.

4°)a/ Tracer la courbe représentative de $(f + g)$.

b/ En déduire le comportement de $(f + g)$ en $+\infty$.

Théorème :

α désigne un réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$, et L et L' sont des réels. On admet :

$\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to \alpha} (f+g)(x) =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Exercices : Calculer les limites suivantes :

a/ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x - 2$

b/ $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \dfrac{1}{x^2}$

c/ $\lim\limits_{x \to -2} x^2 - \dfrac{1}{x+4}$

2°) Limite d'un produit :

Activité 2 :

Soit f et g deux fonctions définies sur IR par $f(x) = 2x+3$ et $g(x) = x-1$.

1°) Tracer les courbes représentatives de f et de g.

1°) Quel est le comportement de f et de g en $-\infty$?
2°) Définir la fonction (fxg).
3°) **a/** Tracer la courbe représentative de (f x g).
b/ En déduire le comportement de (fxg) en $-\infty$.

Théorème :

α désigne un réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$, et L et L' sont des réels. On admet :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	$L>0$	$L>0$	$L<0$	$L<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} (f \times g)(x) =$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Exercices :

Calculer les limites suivantes :

a/ $\lim\limits_{x\to 2}(x-4)(x^2+5x+3)$
b/ $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2(2+\frac{1}{x})$
c/ $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\sqrt{x}$

3°) Limite d'un quotient :

Activité 3 :

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x-1$ et $g(x) = x + 1$.
1°) Tracer les courbes représentatives de f et de g.
2°) Déterminer graphiquement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to-1} g(x)$

3°) Vérifier que pour tout réel $x \neq -1$, $(\frac{f}{g})(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$

4°) **a/** Tracer la courbe représentative de $(\frac{f}{g})$.

b/ En déduire graphiquement, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{f}{g})(x)$, $\lim\limits_{x\to(-1)^-}(\frac{f}{g})(x)$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(\frac{f}{g})(x)$.

Théorème :

α désigne un réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$, et L et L' sont des réels. On admet :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	$L \neq 0$	L	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	$L' \neq 0$	0	∞	L
$\lim\limits_{x\to\alpha} (\frac{f}{g})(x) =$	$\frac{L}{L'}$	∞ (régle de signe)	0	∞ (régle de signe)

Exercice :

Calculer les limites suivantes :

a / $\lim\limits_{x \to -5^+} \dfrac{2x+1}{\sqrt{x+5}}$ b / $\lim\limits_{x \to (-2)^+} \dfrac{x^2+1}{2+x}$

c / $\lim\limits_{x \to (-2)^-} \dfrac{x^2+1}{2+x}$ d / $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{x^2-x+1}$

e / $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\frac{3}{x-2}}{x^2+6x-4}$

4°) Limite de $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ et $x \mapsto |f(x)|$

Théorème1 admis :

Soit f une fonction définie positive sur un intervalle de la forme]a ; +∞[

a / Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$

b / Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$

Théorème 2 admis :

Soit f une fonction définie positive sur un intervalle de la forme]-∞; a [

a / Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$

b / Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$

Théorème 3 admis :

Soit I un intervalle ouvert contenant x_0 et f une fonction définie sur I sauf peut être en x_0.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$

Remarque : les théorèmes précedants restent valable si on remplace +∞ ou -∞ par x_0, x_0^+ ou x_0^- et inversement.

V- Exemples de calcul de limites :

1°) Limites à l'infini des fonctions polynômes :

Activité 1 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 5x^2 + x - 1$

a/ Vérifier que pour tout $x > 0$, $f(x) = x^3(1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3})$.

b/Quelle est la limite $x \mapsto (1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3})$ en $+\infty$

c/ En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Activité 2 :

Soit la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+....+a_1 x+a_0$

où n est un entier supérieur ou égal à 2 et a_n un réel non nul; a_{n-1},..., a_0 sont des réels donnés.

1°) Vérifier pour tout $x \neq 0, P(x) = a_n x^n(1+\frac{a_{n-1}}{a_n x}+\frac{a_{n-2}}{a_n x^2}+...+\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n x^n})$.

2°) Quelle est la $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{a_{n-1}}{a_n x}+\frac{a_{n-2}}{a_n x^2}+...+\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n x^n})$

et $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{a_{n-1}}{a_n x}+\frac{a_{n-2}}{a_n x^2}+...+\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n x^n})$

3°) En déduire que P(x) a la même limite que $a_n x^n$ en $+\infty$ et en $-\infty$

4°) Quel résultat pouvez-vous énoncer ?

Théorème :

Toute fonction polynôme se comporte à l'infini comme son monôme de plus haut degré.

Exercice : Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

a/ $f(x) = -3x^2 + 2x^2 - 4$

b/ $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 2x - 4$

c/$f(x) = -x^3+x^2- 4x+1$

d/$f(x)= x^{2006}-2x^{1969}+3x^{1962}+x^2 - x + 2006$

2°) Limites à l'infini des fonctions rationnelles :

Activité 3 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ par $f(x)=\frac{x^2-3x+7}{2x-1}$

1°) a/ Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3x+7$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-3x+7$

b/ Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-1$

c/ Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x-1}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2x-1}$

2°) a/ Vérifier que pour tout $x \neq 0, x^2-3x+7 = x^2(1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2})$ et $2x-1=2x(1-\frac{1}{2x})$.

b/ En déduire que pour $x \neq 0$ et $x \neq \frac{1}{2}, f(x) = \frac{x}{2}\left(\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}{1-\frac{1}{2x}}\right)$.

c/ En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Activité 4 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}$. où n et m sont deux entiers non nuls et a_n et $b_m$et sont deux réels non nuls et $a_{n-1}, ..., a_0$ et $b_{m-1},...,b_0$ sont des réels donnés.

1°) Vérifier que pour tout $x \neq 0$,

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = a_n x^n (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + ... + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n})$$

et $$b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0 = b_m x^m (1 + \frac{b_{m-1}}{b_m x} + \frac{b_{m-2}}{b_m x^2} + ... + \frac{b_1}{b_m x^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m x^m})$$

2°) a/ Quelle est $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + ... + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n})$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + ... + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n})$

b/ Quelle est $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{b_{m-1}}{b_m x} + \frac{b_{m-2}}{b_m x^2} + ... + \frac{b_1}{b_m x^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m x^m})$

3°) En déduire que f(x) a la même limite que $\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$ en $+\infty$ et en $-\infty$

4°) Quel résultat pouvez-vous énoncer ?

Théorème :

Toute fonction rationnelle se comporte à l'infini comme le rapport des monômes de plus haut degré du numérateur et de dénominateur.

Exercice : Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

a / $f(x) = \frac{-2x-4}{3x-1}$

b / $f(x) = \frac{2x^2-5x-4}{7-2x}$

c / $f(x) = \frac{-2,53x^3+x^2-4x+1}{-\frac{3}{2}x^2-2x-4}$

d/ $f(x)=\dfrac{0,1x+2}{x^2+x-1}$

3°) Autres types de calcul de limite de fonctions

Activité 5 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}$

1°) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} x^2-3x+2$ et $\lim\limits_{x\to 1} x^3-1$.

2°) Les théorèmes des opérations sur les limites vous permettent-ils de déterminer la limite de f(x) en 1 ?

3°) **a/** vérifier que $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$ et $x^3-1= (x-1)(x^2+x+1)$

b/ En déduire que pour $x \neq 1, f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+x+1}$.

4°) Quelle est alors la $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?

Exercice 1: Déterminer les limites suivantes :

a/ $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2+5x+2}{x+2}$

b/ $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x-10}{x^2+3x-40}$

c/ $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-3,2x+0,6}{x^2-3,1x+0,3}$

Exercice 2: Soit la fonction f définie sur$\mathbb{R}$- {5 ; 2} par $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2-6x+5}{x^2-7x+10}$

1°) **a/** Vérifier que $x^3-4x^2-6x+5=(x-5)(x^2+x-1)$

b/ Factoriser $x^2-7x + 10$.

2°) Calculer $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$.

Activité 6 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

1°) Les théorèmes sur les opérations sur les limites vous permettent ils de déterminer la limite de f(x) en $+\infty$?

2°) **a/** Vérifier que $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

b/ En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

Exercice 2: Déterminer les limites suivantes

a/ $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{x}$

b/ $\lim\limits_{x \to -\infty} x + \sqrt{-2x+1}$

c/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - x$

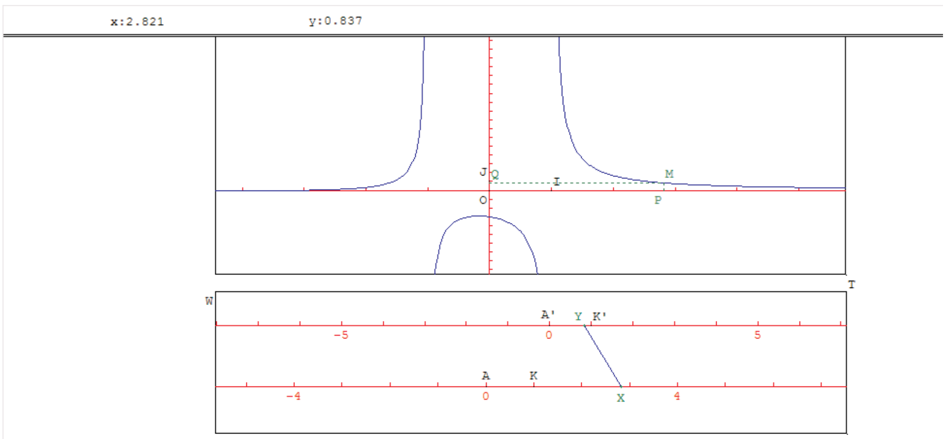
Activité 7 :

Soit la fonction f définie sur $]-4,+\infty[\setminus \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+4} - 2}$

a/ Vérifier que $f(x) = \sqrt{x+4} + 2$

b/ En déduire $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Illustrer de façon dynamique le comportement d'une fonction en un point ou à l'infini en agissant sur les valeurs de la variable x. A l'aide de deux types de représentation (deux axes parallèles), voir simultanément les effets sur la variable y = f(x) et sur le point M de coordonnées (x, y) de la courbe représentative de f. La possibilité d'agir avec la souris sur les origines et les unités des repères permet d'adapter le dessin aux cadres de la figure.



a/ Traiter le texte suivant sous un logiciel de traitement de texte (Notepad, WordPad, Microsoft Word)

```
Position de Roxy: Xmin: -12.754655276, Xmax: -2.7546552748, Ymax: 9.0395273043
Objet dessinable Roxy, particularités: rouge, non dessiné
f1 fonction: Xl->X^3-2X-1
f2 fonction: Xl->rac(2X+8)
f3 fonction: Xl->X^4-3X^2+5
f4 fonction: Xl->(2X+1)/(X-1)
f5 fonction: Xl->(X+3)/(X^2-1)
f6 fonction: Xl->abs(X)/X
f7 fonction: Xl->(X^2-3)/(X-1)
f fonction: xl->f5(x)
x réel libre
   Objet libre x, paramètre: -2.2478891051
   Pas de pilotage au clavier de x: 0.0512 (modifiable)
y = f(x)
V point libre
   Objet libre V, paramètres: -0.51876526003, -0.78359601326
W point libre
   Objet libre W, paramètres: -15.005017071, 2.5014980537
S point libre
   Objet libre S, paramètres: -15.00945597, 8.3660153125
```

T point libre
   Objet libre T, paramètres: -0.54770882006, 2.8632925543
K1 cadre de diagonale [VW]
L2 cadre de diagonale [ST]
O point libre
   Objet libre O, paramètres: -8.7242645374, 4.8169828586
   Objet dessinable O, particularités: nom au-dessous, nom à gauche
d' droite passant par O et de coefficient directeur 0 (repère Roxy)
   Objet dessinable d', particularités: non dessiné
I point libre sur la droite d'
   Objet libre I, paramètre: 1.4182344428
d" droite perpendiculaire à d' passant par O
   Objet dessinable d", particularités: non dessiné
J point libre sur la droite d"
   Objet libre J, paramètre: 0.2026049204
r repère (O,vec(O,I),vec(O,J)) (graduations: 1,1)
   Objet dessinable r, particularités: rouge
A point libre
   Objet libre A, paramètres: -8.8110952176, 0.31625926905
   Objet dessinable A, particularités: nom au-dessus
A' point libre
   Objet libre A', paramètres: -7.3494454345, 1.705550152
   Objet dessinable A', particularités: nom au-dessus
d1 droite passant par A et de coefficient directeur 0 (repère Roxy)
   Objet dessinable d1, particularités: non dessiné
d2 droite passant par A' et de coefficient directeur 0 (repère Roxy)
   Objet dessinable d2, particularités: non dessiné
K point libre sur la droite d1
   Objet libre K, paramètre: 1.0998552823
   Objet dessinable K, particularités: nom au-dessus
d'1 droite munie du repère (A,vec(A,K)) graduation 1
   Objet dessinable d'1, particularités: rouge, avec marques numériques
K' point libre sur la droite d2
   Objet libre K', paramètre: 0.95513748202
   Objet dessinable K', particularités: nom au-dessus, nom à droite
d'2 droite munie du repère (A',vec(A',K')) graduation 1
   Objet dessinable d'2, particularités: rouge, avec marques numériques
X point d'abscisse x dans le repère d'1
   Objet dessinable X, particularités: vert foncé, nom au-dessous, marque épaisse
Y point d'abscisse y dans le repère d'2

Objet dessinable Y, particularités: vert foncé, nom au-dessus, nom à gauche, marque épaisse
Segment [XY]
   Objet dessinable [XY], particularités: bleu
F courbe définie par Y=f(X), X décrivant [-30,30] (1000 points, repère r)
   Objet dessinable F, particularités: bleu, points liés
P point de coordonnées (x,0) dans le repère r
   Objet dessinable P, particularités: vert foncé, nom au-dessous, nom à gauche
a droite d'équation X=1 (repère r)
   Objet dessinable a, particularités: rose, tireté, non dessiné
b droite d'équation X=-1 (repère r)
   Objet dessinable b, particularités: rose, tireté, non dessiné
c droite d'équation Y=2 (repère r)
   Objet dessinable c, particularités: rose, tireté, non dessiné
M point de coordonnées (x,y) dans le repère r
   Objet dessinable M, particularités: vert foncé
Segment [PM]
   Objet dessinable [PM], particularités: vert foncé, tireté
Q point de coordonnées (0,f(x)) dans le repère r
   Objet dessinable Q, particularités: vert foncé, nom au-dessus, nom à droite
Segment [QM]
   Objet dessinable [QM], particularités: vert foncé, tireté

Hauteur de la zone des affichages: 30
Af0 affichage du scalaire x (3 décimales)
   Position de l'affichage Af0: (110,8)
Af1 affichage du scalaire y (3 décimales)
   Position de l'affichage Af1: (314,7)

Cm0 (touche A) dessin par étapes de a
Cm1 (touche B) dessin par étapes de b
Cm2 (touche C) dessin par étapes de c
Cm3 (touche K) dessin par étapes de K1, A, K, d'1, X, A', K', d'2, Y, [XY]
Cm4 (touche L) dessin par étapes de L2, r, O, I, J, F
Cm5 (touche M) dessin par étapes de M, P, [PM], Q, [QM]

Objet libre actif au clavier: x
Dessins limités au cadre K1: A, A', d1, d2, K, d'1, K', d'2, X, Y, [XY]
Dessins limités au cadre L2: O, d', I, d", J, r, F, P, a, b, c, M, [PM], Q, [QM]

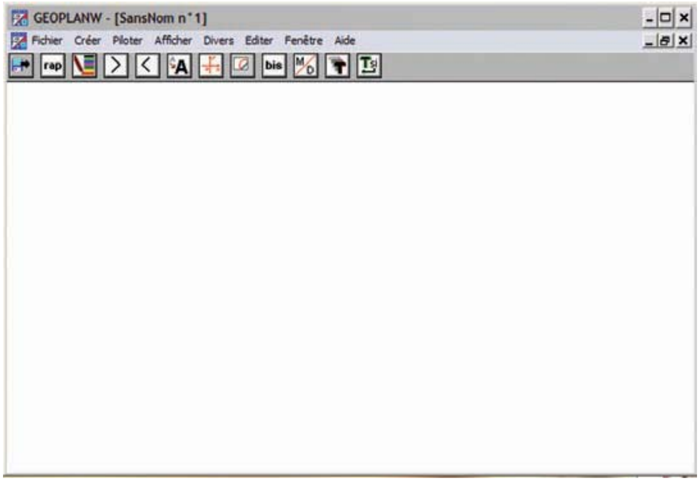
Commentaire

Fin de la figure

Sélectionner tout le texte et le copier. Aller dans la barre de menu et choisir

Edition/ Copier

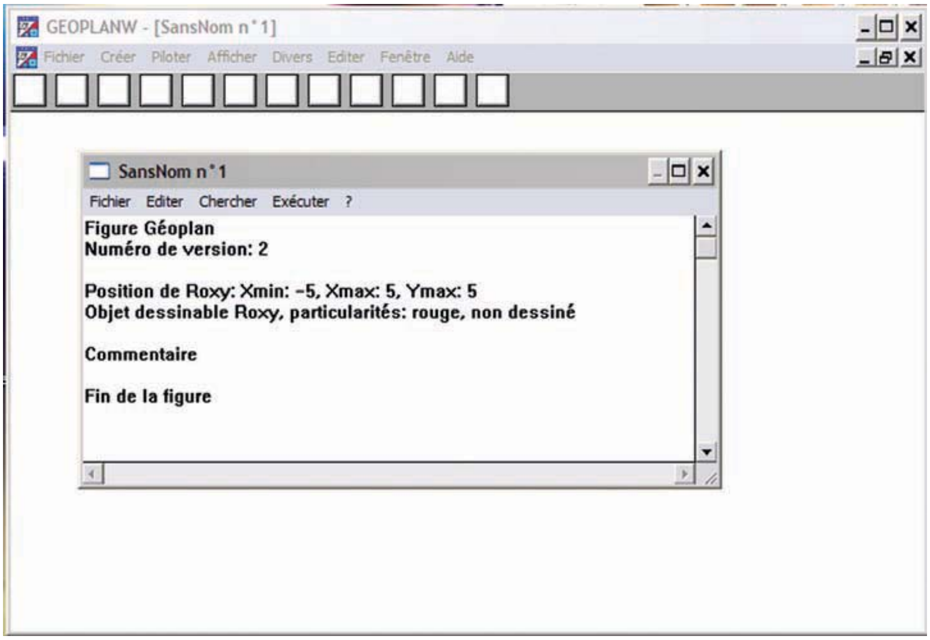
b/ Ouvrir le programme GeoplanW en exécutant



c/ Aller dans la barre de menu et choisir

Editer/ Editer Texte figure

On obtient :



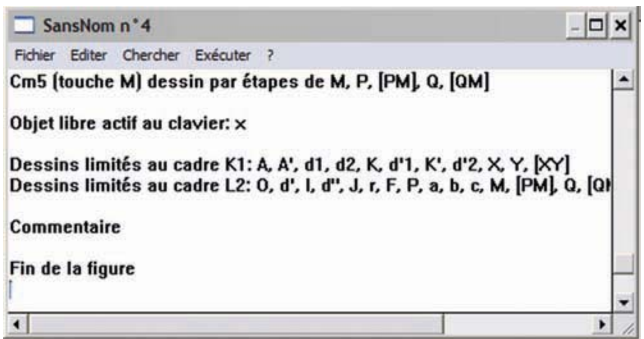
Effacer le texte suivant :

Position de Roxy: Xmin: –5, Xmax: 5, Ymax: 5 Objet dessinable Roxy, particularités: rouge, non dessiné Commentaire Fin de la figure

Et la remplacer par le texte traité au départ en procédant comme suit :

Edition/ Coller

On obtient :

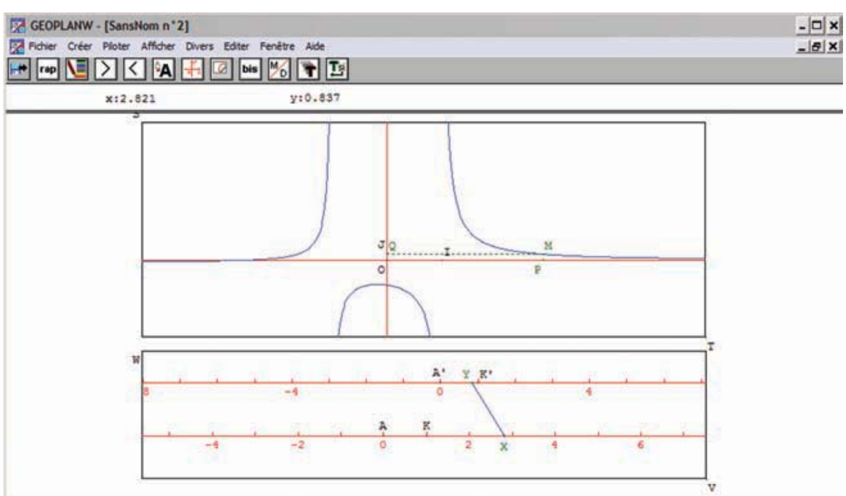


d/ Aller dans la barre de menu et choisir

Exécuter

à la commande appuyer sur **yes**

On obtient :



e/ Le choix de la fonction à étudier se fait en listant les fonctions prédéfinies avec le bouton de Geoplanw marquée rap. Après avoir noté le numéro de la fonction à étudier, il faut modifier la fonction f. Pour cela on utilise le bouton modifier (M/D). On précise l'objet à modifier : f. On change alors le numéro de la fonction dans " expression de la fonction ". de 1 à 7

Les touches flèches permettent de modifier les valeurs de la variable x. Les touches + ou – permettent de modifier le pas de variation.

f/ Déterminer graphiquement les limites éventuelles suivantes :

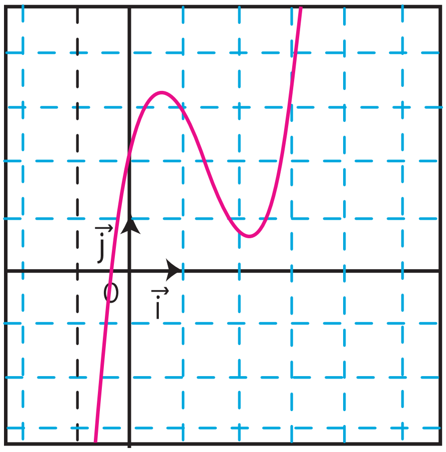
❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$	❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)$	❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$	❖ $\lim\limits_{x\to 4} f_2(x)$	❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x)$
❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x)$	❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x)$	❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_4(x)$	❖ $\lim\limits_{x\to 1^+} f_4(x)$	❖ $\lim\limits_{x\to 1^-} f_4(x)$
❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_5(x)$	❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_5(x)$	❖ $\lim\limits_{x\to 1^+} f_5(x)$	❖ $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f_5(x)$	❖ $\lim\limits_{x\to 0^+} f_6(x)$
❖ $\lim\limits_{x\to 0^-} f_6(x)$	❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_6(x)$	❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_6(x)$	❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_7(x)$	❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_7(x)$

g/ Déterminer l'équations des asymptote éventuelles au courbes des fonctions : f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 et f_7.

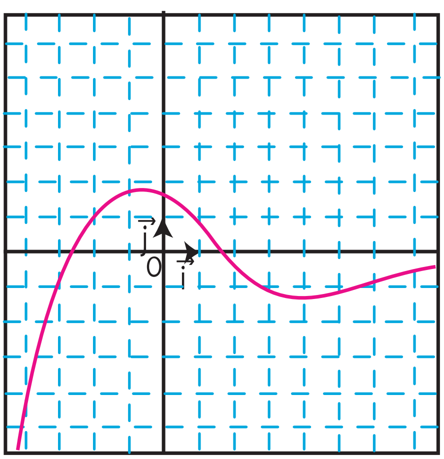
1

Déterminer les limites éventuelles aux bornes de l'ensemble de définition des fonctions représentées ci-dessous:

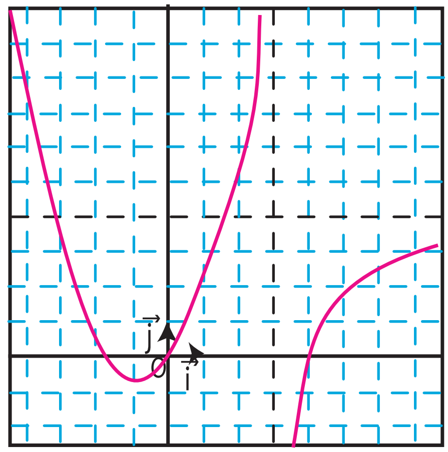
1°)



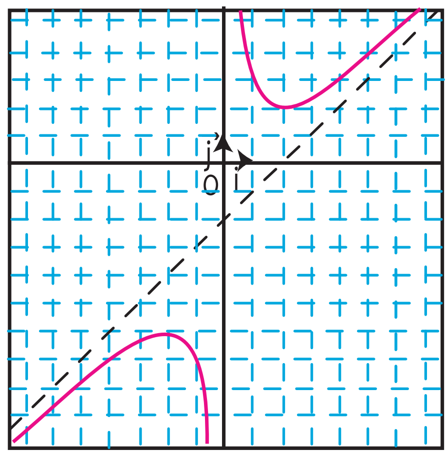
2°)



3°)

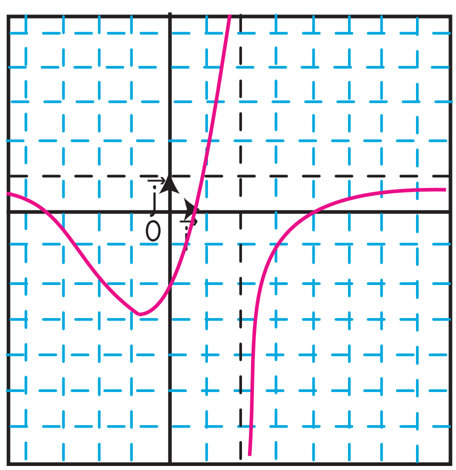


4°)



2

La représentation graphique ci-dessous est celle d'une fonction f :



Relever les phrases correctes parmi les phrases suivantes :

1°) en 2, la limite de f est $+\infty$.

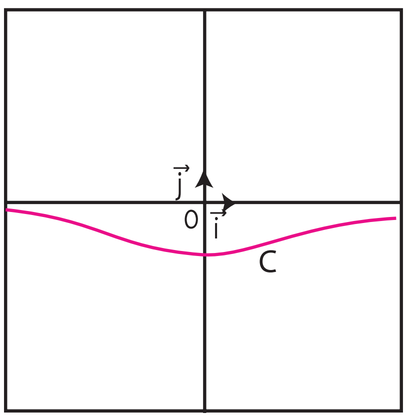
2°) -3 est un minimum de f.

3°) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

4°) une courbe ne traverse jamais son asymptote.

3

La courbe C ci-dessous est celle d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ L'axe des abscisses est asymptote à C



1°) Reproduire cette courbe dans un repère orthonormal (unité 1cm).

2°) Soit C' la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = g(x) + x$

a/ Donner les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

b/ La courbe C' admet-elle des asymptote?Justifier.

4

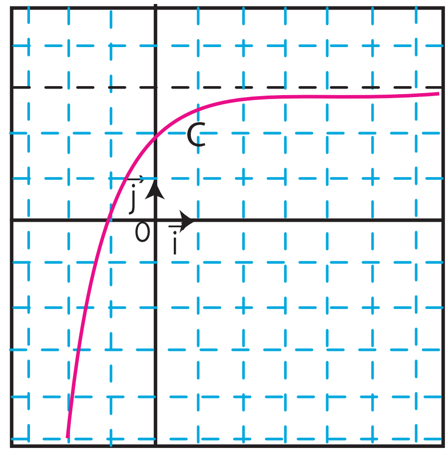
C est la représentation graphique d'une fonction f
Dans chacun des cas suivants, par lecture graphique, donner :

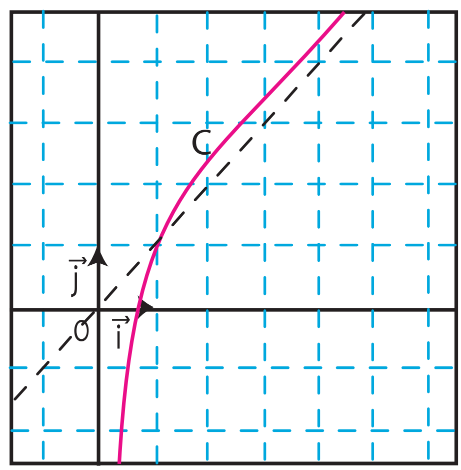
1°) L'ensemble de définition de f

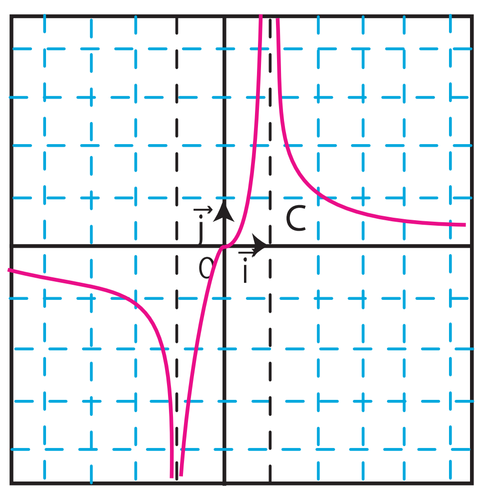
2°) Les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

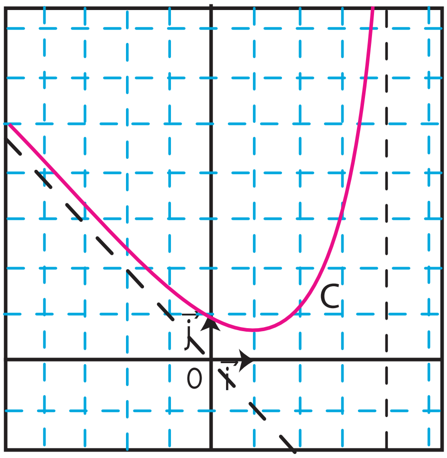
3°) Les asymptotes éventuelles à C.

4°) La position relative de l'asymptote et C suivant les valeurs de x.









5 (Q.C.M)

1°) La limite de $(x^2 - 4x + 5)$ quand x tend vers $-\infty$ est :

a/ 5 ; **b/** $+\infty$; **c/** $-\infty$

2°) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-3}{x-2} =$

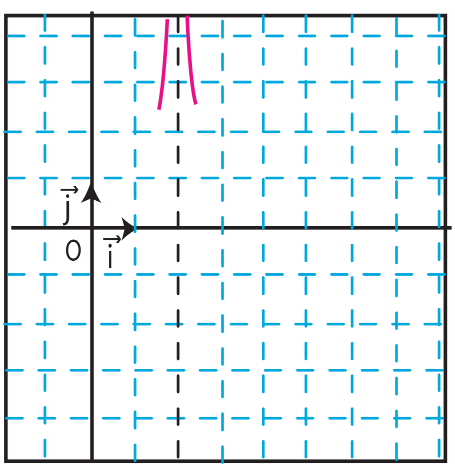
a/ $+\infty$; **b/** $-\infty$; **c/** -1 ; **d/** 0

3°) f est une fonction telle que :

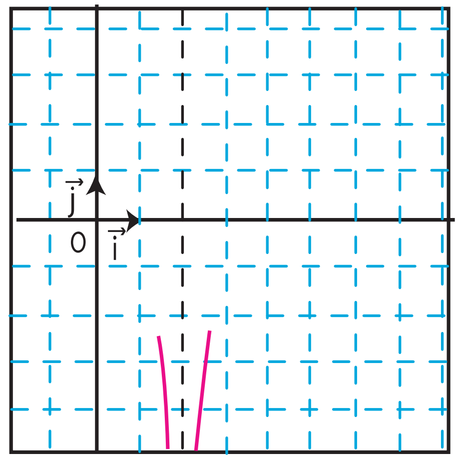
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \text{ et que } \lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty.$$

Au voisinage de la droite d'équation x = 2 la courbe (C) représenteative de f a pour allure :

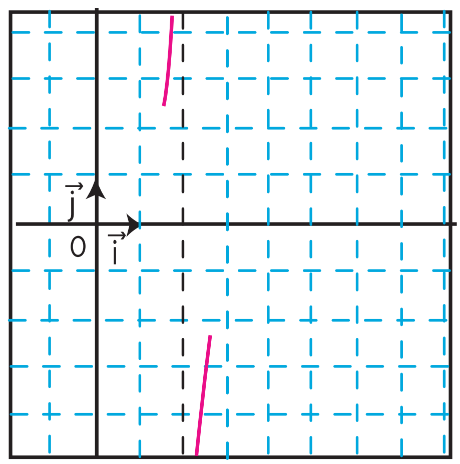
a/



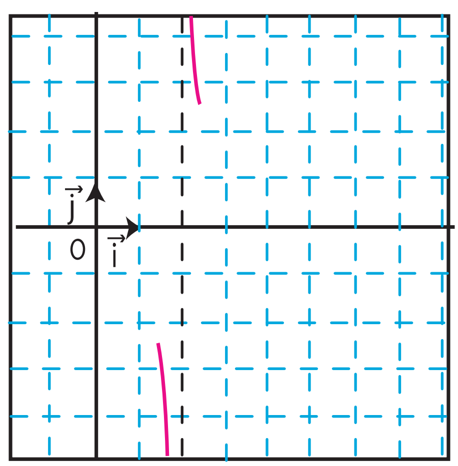
b/



c/



d/

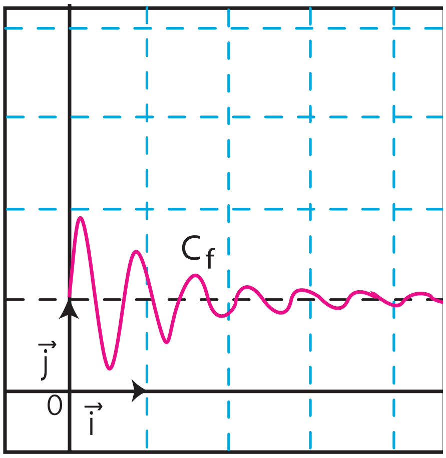


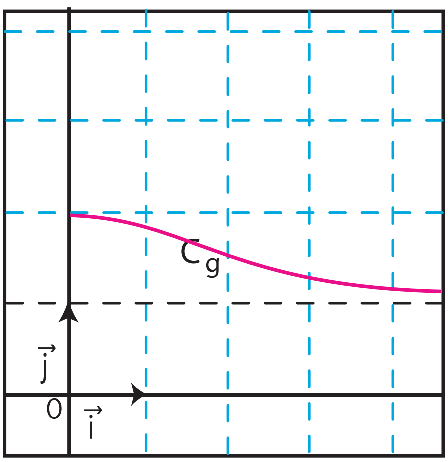
4°) La limite de la fonction f définie par

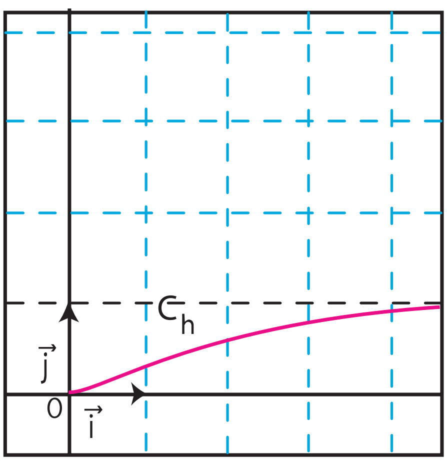
$f(x) = -\sqrt{x+1}$ quand x tend vers $-\infty$:

a/ est-∞ ; **b/** est + ∞ ; **c/** ne peut pas être étudiée.

5°) Les trois courbes ci-dessous représentent, respectivement des fonctions f, g, h, définie sur [0, +∞ [et ayant une asymptote parallèle à (Ox).







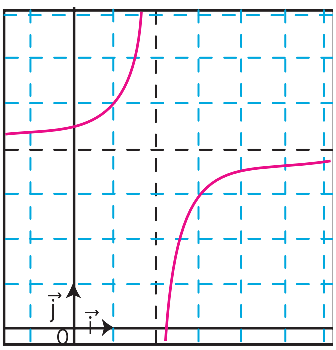
Alors on peut écrire :

a/ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$; b/ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$;

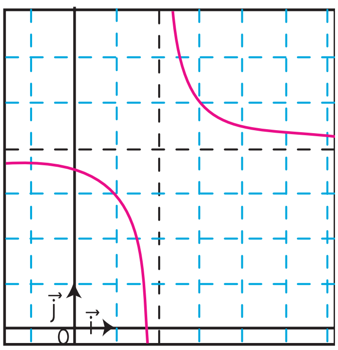
c/ $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$.

6°) La courbe représentative d'une fonction f admet pour asymptotes les droites d'équations:
x = 2 et y = 4
La représentation graphique de f peut être:

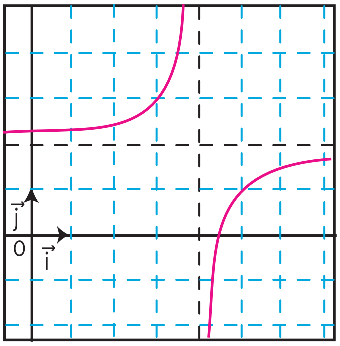
a/



b/



c/



7°) Soit f définie par $f(x) = 2x^2 + x + 1$ et (C)sa représentation graphique.

On peut dire que:

a/ la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C);

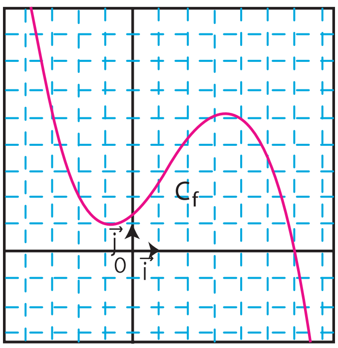
b/ (C) n'admet pas de droite asymptote;

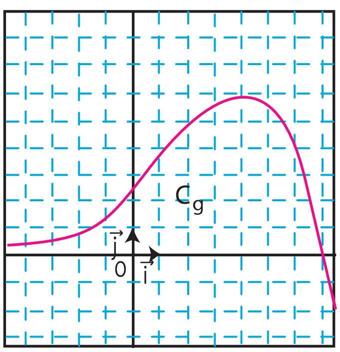
c/ la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à (C).

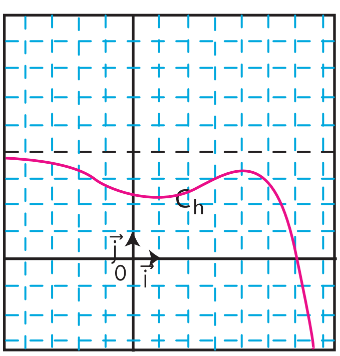
6

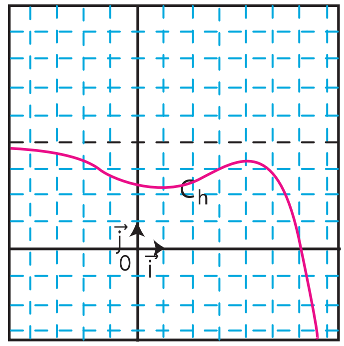
Chacune des fonctions suivantes est définie sur $\mathbb{R}$.

Donner les limites en $+\infty$ et $-\infty$









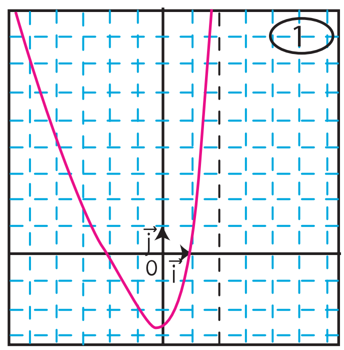
7

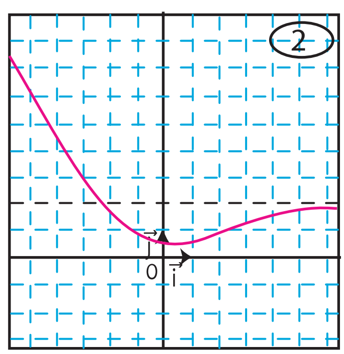
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est telle que :

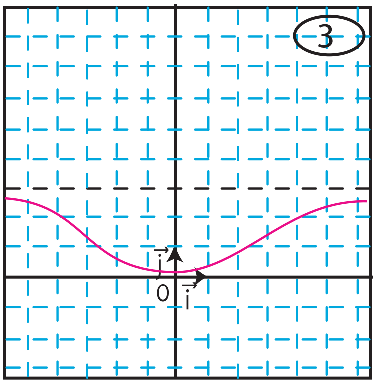
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

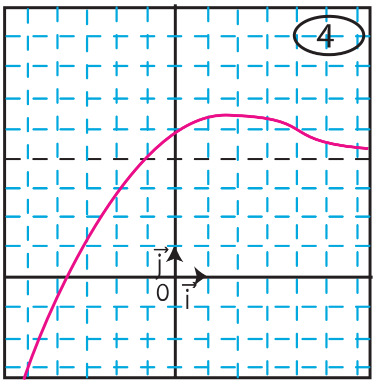
1°) Retrouver sa courbe représentative parmi les cinq courbes ci-après.

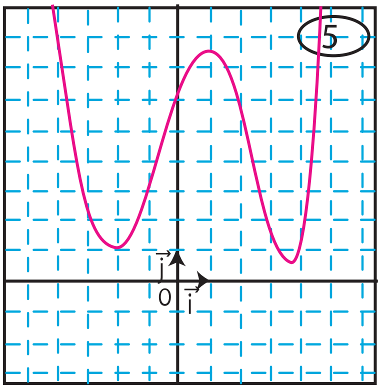
2°) Donner les limites en $+\infty$, $-\infty$ (si elles existent) pour les quatres autres fonctions représentées.





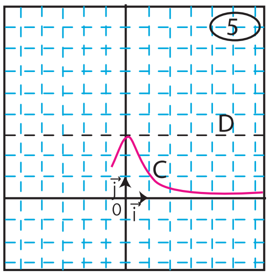






8 (Q.C.M)

1°) La courbe représentative d'une fonction f est donnée par la figure ci-dessous.



C admet pour asymptote :

a/ l'axe des abscisses ;
b/ l'axe des ordonnées ;
c/ la droite D.

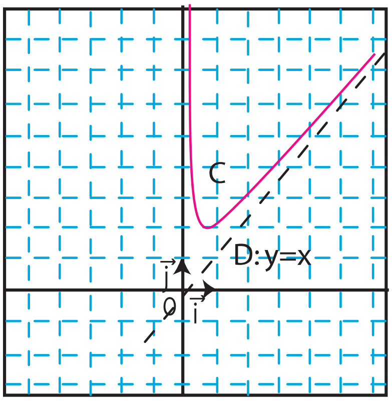
2°) Parmi les fonctions suivantes, celle dont la courbe a pour asymptote horizontale la droite d'équation y = 2 est définie par :

a/ $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

b/ $g(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$

c/ $h(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$

3°) La courbe C ci-jointe représente une fonction f définie sur IR^*_+



On peut écrire :

a/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

c/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

9

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{1}{(4-x)^3}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-2x+5\right)$
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4-2x+1\right)$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+3x^2-x^3\right)$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2x^2}{4x+1}}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}$
$\lim\limits_{x\to1^+}\left(x+\dfrac{2x}{x-1}\right)$	$\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}\right)$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-1}{x^2-3x}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-5}{x^2-6x+9}$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-1}{x^2-3x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}}$	$\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)$

10

Calculer les limites éventuelles suivantes :

☒ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+x^3}$	☒ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$
☒ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$	☒ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+4x+1}{5x^2-x+3}$
☒ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-x^2}{3x-x^2}$	☒ $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3+5x+1$
☒ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}}$	☒ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+7}-\sqrt{x}$

11

Calculer les limites éventuelles suivantes:

☒ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^4}$	☒ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}$
☒ $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{1}{(x-5)^2}$	☒ $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{1}{(x-5)^3}$
☒ $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x-4}{(x+3)^2}$	☒ $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\pi}{(x-\pi)^6}$
☒ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^4+x^8+x^{12}}$	☒ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+x}{x^2+x^3}$

12

Calculer les limites éventuelles suivantes:

☒ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^4}$	☒ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}$
☒ $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{1}{(x-5)^2}$	☒ $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{1}{(x-5)^3}$
☒ $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x-4}{(x+3)^2}$	☒ $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\pi}{(x-\pi)^6}$
☒ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^4+x^8+x^{12}}$	☒ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+x}{x^2+x^3}$

Exercices et problémes

13

Déterminer les limites éventuelles suivantes :

1°) a/ $\lim_{x\to+\infty} x^2+5x-7$

b/ $\lim_{x\to-\infty} x^3-2x$

c/ $\lim_{x\to-\infty} -x^2+x$

d/ $\lim_{x\to+\infty} -x^2+x+3$

2°) a/ $\lim_{x\to+\infty} 2x+1-\dfrac{1}{x}$

b/ $\lim_{x\to0^+} x^2-4+\dfrac{1}{x}$

c/ $\lim_{x\to-\infty} -x^2+x-3$

d/ $\lim_{x\to2^+} \dfrac{x^3-2x+1}{2-x}$

14

Déterminer les limites éventuelles suivantes :

a/ $\lim_{x\to+\infty} 2x^3+3x^2-12$

b/ $\lim_{x\to1} \dfrac{2x+3}{(x-1)^2}$

c/ $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{4}{5+x}$

d/ $\lim_{x\to(-2)^+} 2x+1-\dfrac{3}{x+2}$

15

Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition Df :

a/ $f(x)=x^2-x+2$ et $D_f=\mathbb{R}$

b/ $f(x)=\dfrac{1}{1-x}+2x$ et $D_f=]1,+\infty[$

c/ $f(x)=2x^2+3x-5$ et $D_f=\mathbb{R}$

d/ $f(x)=1-\dfrac{1}{3x-2}$ et $D_f=\left]-\infty,\dfrac{2}{3}\right[$

e/ $f(x)=(3x^2-2x+5)\sqrt{x}$ et $D_f=[0,+\infty[$

16

Soit f la fonction définie sur

$\mathbb{R}-\{2\}$ par : $f(x)=\dfrac{-x^2+2x+3}{x-2}$.

1°) Vérifier que pour tout réel x de $\mathbb{R}-\{2\}$, $f(x)=-x+\dfrac{3}{x-2}$

2°) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3°) a/ Préciser les asymptotes à la courbe représentative de f.

b/ Etudier la position relative de la courbe de f par rapport à son asymptote oblique.

17

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{4x-3}{-x^2+x}$

1°) Justifier que f(x) est définie pour tout réel x différent de 1 et de 0.

2°) a/ Etudier le signe de l'expression $-x^2+x$.

b/ Déduire $\lim_{x\to0^+} f(x)$, $\lim_{x\to0^-} f(x)$, $\lim_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim_{x\to1^-} f(x)$

3°) Déterminer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

18

Donner un exemple de représentation graphique d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont sa courbe :

- Admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y=0{,}2x+0{,}1$
- Soit située au dessous de son asymptote en $+\infty$.
- Admet comme asymptote verticale la droite d'équation $x=1$.

19

f est la fonction définie sur IR * par

$f(x)=x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x}$

1°) Vérifier que la droite Δ d'équation $y=x-\dfrac{1}{2}$ est asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$? au voisinage de $-\infty$.

2°) Précisez la position relative de C_f et de Δ .

20

f est la fonction définie sur IR – { – 2 } par

$f(x) = \dfrac{2x^2+3x+1}{x+2}$

1°) Étudier la limite de f en -2.

2°) Trouver trois nombres a, b, c tels que pour tout $x \neq -2$; $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+2}$

3°) Trouvez une équation d'une asymptote oblique Δ à C_f au voisinage de $+\infty$.

4°) Vérifiez que Δ est aussi asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$.

5°) Précisez la position relative de C_f et de Δ .

21

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$f(x) = \dfrac{-x^2+2x+1}{x+1}$

On appelle C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1°) Déterminer $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ Qu'en déduit-on pour la courbe Cf ?

2°) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

3°) Montrer que la courbe C_f admet une asymptote Δ d'équation y = – x + 3.

Étudier les positions relatives de la courbe C_f et de la droite Δ .

22

Un fabricant estime que si chaque commande de matières premières contient x Kg, le coût total de transport, d'entreposage et d'approvisionnement annuel sera de $C(x) = 2x + \dfrac{80000}{x}$ DT

Calculer la limite de ce coût total lorsque le poids de la commande devient très petit, interpréter ce résultat graphiquement..

23

La fonction de demande d'un certain produit est

$D(p) = \dfrac{5600}{p}$ où p est le prix unitaire du produit .

Déterminer la ou les asymptotes verticales au graphique de D et tracer la courbe.

24

Le service des loisirs d'une ville projette d'aménager un terrain de jeux rectangulaire d'une superficie de 3 600 m², et ce terrain devra être clôturé. Si la longueur du terrain mesure x mètres, alors la clôture mesurera $L(x) = 2x + \dfrac{7200}{x}$ mètres.

Déterminer la ou les asymptotes verticales au graphique de L et interpréter ce résultat dans le contexte.

25

Le ministère de la santé publique a estimé qu'au cours d'un programme visant à immuniser la population contre une forme virulente de la grippe, il faudrait verser environ $C(x) = \dfrac{50x}{200-x}$ millions de dinars pour faire vacciner x% de la population.

a/ Quel est le domaine de cette fonction dans le contexte? Et dans son ensemble?

b/ En considérant la fonction dans son ensemble, déterminer la ou les asymptotes verticales.

26

La population d'une certaine région est approximativement donnée par la fonction

$P(t) = 2 - \left(\dfrac{500}{t+500}\right)^2$ (Millions d'habitants)

où t représente le nombre d'années depuis 1980. Selon ce modèle:

1°) Quelle était sa population en 1980?

2°) Que sera-t-elle a long terme?

27

Le coût moyen de production d'un alliage est donné par $f(q) = \dfrac{q^2+2q+10}{q}$ où q est la quantité d'alliage, exprimé en kilogramme, $q \in]0;+\infty[$, et le coût moyen f(q) est exprimé en milliers de DT.

1°) Ecrire f(q) sous la forme $aq + b + \dfrac{c}{q}$

où a, b et c sont des nombres que l'on précisera.

2°) Pour de grandes quantités produites justifier que le coût moyen se comporte comme une fonction affine.

28

Dans un pays industrialisé (à fort PIB), le nombre de ménages équipés de téléviseurs en couleur peut être évalué par la fonction f définie sur [0 ;+∞ [par :

$f(x)=\dfrac{6x+10}{x+5}$, x est le nombre d'années écoulées depuis la fin 1970 et f(x) est exprimée en millions.

1°) Calculer le nombre de ménages équipés en fin 1970 et en fin 2005 d'après ce modèle.
Prévoir le nombre de ménages équipés en fin 2020.

2°) Ecrire f(x) sous la forme $f(x)=\beta+\dfrac{k}{x+5}$

En déduire le nombre de ménages équipés que l'on peut prévoir à long terme, c'est-à-dire lorsque x tend vers +∞ .

29

On note f(t) la population (en milliers) d'une ville nouvelle fondée en 1970, où t désigne la durée écoulée depuis 1970, exprimée en années.

On a $f(t)=\dfrac{t^2+11t+8}{2(t+1)}$ pour tout $t\in[0;+\infty[$

1°) Vérifier que $f(t)=\dfrac{1}{2}t+5-\dfrac{1}{t+1}$ pour tout t de [0: +∞ [.

2°) **a/** Résoudre f(t) ≥ 30.
b/ En déduire à partir de quelle année la population de la ville sera supérieure à 30000 habitants.

3°) **a/** Etudier la limite de f en +∞
b/ Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique.

30

Une coopérative agricole fabrique des confitures artisanales et les vend par lot de 5 pots.
Le coût mensuel de fabrication de q lots, en DT, s'élève à :$C(q) = 0{,}01q^2+1{,}5q+169$.
Une étude de marché a montré que la coopérative pouvait s'attendre à une demande mensuelle q égale à 600 – 50q, pour un prix unitaire p.

1°) Exprimer en fonction de q le coût d'un lot :

$f(q)=\dfrac{C(q)}{q}$. f est considérée comme une fonction définie sur]0:+∞[.

2°) Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphique 1cm pour 50 lots sur l'axe des abscisses et 1cm pour 1 DT sur l'axe des ordonnées

a/ Déterminer les limites de f si elles existent en 0 et en + ∞.
b/ Préciser les asymptotes éventuelles de C .

31

Soit f une fonction définie sur IR-{1} par :

$f(x)=\dfrac{P(x)}{x-1}$ avec $P(x)=x^2+x+1$.

1°) Calculer P(1).

2°) **a/** Vérifier que P(x) – P(1) s'annule en 1..
b/ En déduire que P(x) – P(1) = (x–1)Q(x), où Q(x) = ax + b que l'on déterminera.

3°) **a/** Vérifier que : $f(x)=Q(x)+\dfrac{P(1)}{x-1}$.

b/ En déduire que D : y = Q(x) est une asymptote à la courbe de f au voisinage de et en +∞ et – ∞ .

Cas général :
Soit f une fonction définie sur IR-{a} par :
$f(x)=\dfrac{P(x)}{x-a}$ avec $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$
tel que p (a) ≠ 0

1°) Calculer P(a).

2°) **a/** Vérifier que P(x) – P(a) s'annule en a.
b/ En déduire que P(x) – P(a) = (x–a)Q(x), où Q(x) = cx + d que l'on déterminera.

3°) **a/** Vérifier que $f(x)=Q(x)+\dfrac{P(a)}{x-a}$

b/ En déduire que D :y = Q(x) est une asymptote à la courbe de f au voisinage de +∞ et en – ∞ .

L'INFINI

Si on poursuit la suite des nombres naturels 1, 2, 3, ..., on peut atteindre des nombres aussi grands que l'on le souhaite, des nombres dépassant ce que le commun des mortels ne peut pas même imaginer. Un million, puis un milliard, un billion, un trillion ... quel est le nombre le plus grand qui existe ? Fait-il partie des précédents ? Non, bien sûr, car pour tout nombre, on peut en trouver un de plus grand : il suffit de prendre ce nombre augmenté d'une unité. On peut donc donner une première définition de l'Infini, certes hâtive : l'infini pour les nombres est ce qui est plus grand que tout nombre donné.

Aristote et Archimède.

Pour Aristote, l'Infini est présent de multiples manières différentes. Par exemple, on peut avoir un Infini par addition : à force d'ajouter des nombres, quels qu'ils soient, on peut dépasser n'importe quel autre nombre. Il n'y a pas de limitation concevable. On peut aussi concevoir un Infini en division : on peut considérer une corde comme composé de deux segments de longueur égale à sa moitié, mais également comme constituée de multiples petits tronçons de corde !

Anticipons légèrement sur la partie suivante en introduisant le dénombrement dans la notion d'infini. On peut, à chaque entier naturel, faire correspondre un entier naturel pair : il suffit de le multiplier par deux. Cette association est unique : à chaque entier on lie un et un seul entier pair, et réciproquement. On dit que l'ensemble des entiers pairs est en bijection avec l'ensemble des entiers. Et on a également une égalité des cardinaux : il y a autant d'entiers que d'entiers pairs !

Pourtant, quand on regarde les 10000 premiers entiers, on ne compte que 5000 entiers pairs !! Quel paradoxe ! Et pourtant, on peut accentuer encore plus ce paradoxe : dans les 10000 premiers entiers, on ne compte qu'un seul entier divisible par 10000, et pourtant l'ensemble des entiers et l'ensemble des entiers divisibles par 10000 sont en bijection, et ont donc le même cardinal... Intriguant, non ? Mais l'Infini est encore plus intriguant que cela.

Archimède a une approche totalement différente de l'Infini, et pour cause : pour lui, seuls les raisonnements en un nombre fini d'étapes sont valides ! Par conséquent, pas d'Infini pour Archimède.

Thabit Ibn Qurra et les mathématiciens arabes.

Thabit Ibn Qurra est un des plus grands mathématiciens arabes du monde antique, et la cours de Bagdad où il exerçait sa science à longtemps été considérée comme le lieu par excellence des mathématiques dans le monde.

Ibn Qurra avait déjà, comme Aristote, émis des considérations sur le dénombrement des ensembles infinis. Ainsi, il avait écrit que l'Infini pouvait être égal au double de l'Infini (bijection entre les entiers et les entiers pairs), au triple de l'Infini... Il avait en plus essayé de développer un système mathématique où il pourrait considérer l'infini comme un nombre, auquel on pourrait appliquer les opérations classiques de multiplication, d'addition ou d'exponentiation, sans grand succès cependant.

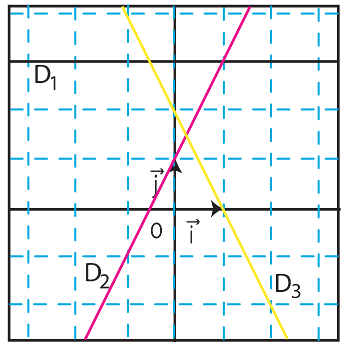
Il n'y a que la liberté d'agir et de penser qui soit
capable de produire de grandes choses
ALEMBERT

Chapitre 10

DERIVATION

Activité 1 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère les droites D_1, D_2, D_3.



Pour chacune d'elles:

1°) Déterminer le coefficient directeur.

2°) Déterminer l'équation reduite.

Activité 2 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm. On considère le point A de coordonnées (-2 ; -1) et les droites D_1, D_2, D_3 passant par A et de coefficients directeurs respectifs: 0, -2, $\frac{2}{3}$.

1°) Construire les droites D_1, D_2, D_3

2°) Déterminer une équation de chacune des droites D_1, D_2, D_3.

Activité 3 :

Le 20 Mars dernier, on a re1evé la température T de l'air entre t = 11h et t =15h.
On a obtenu les températures suivantes:

11h	21°C
12h	25°C
13h	27°C
14h	26°C
15h	23°C

Calculer le taux de variation moyen de la température sur les intervalles indiqués

a/ Entre 11h et 13h

b/ Entre 11h et 14h

c/. Entre 12h 14h

Activité 4 :

Le plan est rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

1°) Tracer la parabole P d'équation :$y=1+x^2$

2°) Placer les points de P :$A(\frac{1}{2},\frac{5}{4})$ et B(2,5)

3°) Calculer le taux de variation T de $f(x) = 1+x^2$ entre $\frac{1}{2}$ et 2.

4°) Que représente T pour la droite (AB)?

Activité 5 :

Sur la période de 1990 à 2000, la population de trois villes a évolué suivant le graphique ci-contre.

1°) a/ Pour chaque ville, lire la population en 1990, 1995 et 2000 (fin d'année).

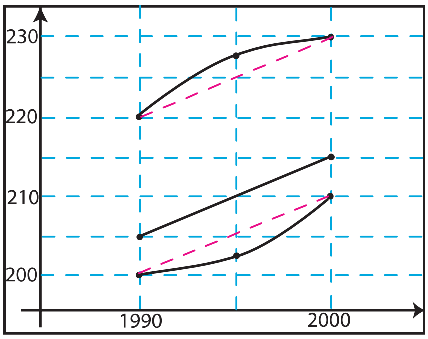
b/ Pour chaque ville, calculer l'accroissement moyen annuel de sa population de fin 1990 à fin 2000.

Quelle remarque peut-on faire?

En donner une interprétation graphique.

2°) a/ Calculer de même l'accroissement moyen annuel pour chaque ville sur la période de 1990 à 1995, puis de 1995 à 2000.

b/ Classer les accroissements moyens obtenus du plus faible au plus fort. En donner une interprétation graphique.



L'accroissement moyen de la population est la variation de la population sur la période écoulée

I– Dérivabilité en un point et nombre dérivé

Activité :

Dans une usine de produit chimique le coût total de fabrication d'une quantité de solvant est donné par :$C(q)=0{,}01q^2+2q+500$ où la quantité q varie de 0 à 600kg. Les coûts sont exprimés en milliers de dinars.
Le tableau suivant donne les valeurs de $C(q)$ pour des valeurs de q voisine de 300.

Quantité q	299,5	299,95	299,995	300,005	300,05	300,5
Coût total C(q)	1996	1999	999,960	2000,040	2000,40	2004

1°) Calculer les taux de variations suivants :

$$\frac{C(300,5)-C(300)}{300,5-300} \;;\quad \frac{C(300,005)-C(300)}{300,005-300}\;;$$

$$\frac{C(299,5)-C(300)}{299,5-300} \;;\quad \frac{C(299,995)-C(300)}{299,995-300}\;;$$

2°) **a/**Vérifier que $\dfrac{C(q)-C(300)}{q-300}=0,01q+5$

b/ En déduire $\lim\limits_{q\to 300}\dfrac{C(q)-C(300)}{q-300}=8$

8 est appelé nombre dérivé de C au point 300.On le note C '(300).

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, soit $x_0 \in I$

On dit que f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$ où ℓ est un nombre réel.

ℓ est appelé le nombre dérivé de f en x_0 et on note $\ell= f'(x_0)$

Exercice :

Déterminer le nombre dérivé des fonctions suivantes en x_0 :

1°) $f(x)=2x-1$ $\quad x_0=-2$

2°) $f(x)=x^2+x+1$ $\quad x_0=1$

3°) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ $\quad x_0=0$

II – Notion de tangente

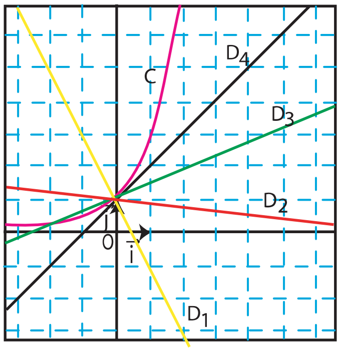
Activité 1 :

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

1°) Tracer la courbe de la restriction g de f à l'intervalle $]0,+\infty[$.
2°) Vérifier que g est dérivable en 1 et donner $g'(1)$.
3°) Tracer sur le même graphique la droite passant par $A(1,1)$ et de coefficient directeur $g'(1)$.
4°) **a/** Placer un point M de C_g distinct de A et tracer la droite (AM)
b/ Soit M_1 un point de l'arc $\overset{\frown}{AM}$, tracer la droite (AM_1).
c/ Soit M_2 un point de l'arc $(\overset{\frown}{AM_1})$, tracer la droite (AM_2).
d/ Placer les points M_3, M_4, M_5 et M_6 de la même façon.
5°) Quelle est la position limite des droites (AM_n) quand M_n se rapproche du point A?

Activité 2 :

1°) Soit C le cercle de centre O et de rayon 3 et soit A un point de C.
Tracer C et la tangente à C au point A.
2°) Sur la figure ci-dessous sont représentées la courbe représentative d'une fonction f noté ζ et quatre droites D_1, D_2, D_3 et D_4.
Parmi ces droites citer celle qui correspond à l'idée intuitive que l'on a de la tangente à une courbe.

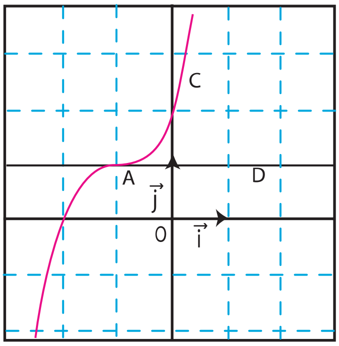


Définition

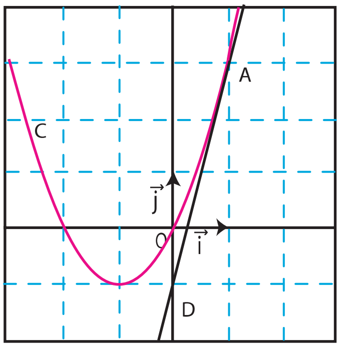
Soit f une fonction dérivable en x_0 et C sa courbe représentative.
La droite passant par $A(x_0,f(x_0))$ et de coefficient directeur $f'(x_0)$ est appelée droite tangente à C au point A.

Activité 3 :

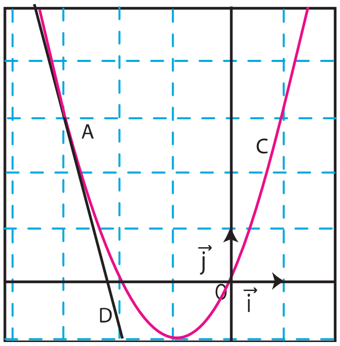
Dans chacun des cas suivants, la courbe (C) est la représentation graphique d'une fonction f et D est la tangente à C au point A(a, f(a)).
Déterminer le nombre dérivé de f au point d'abscisse a.



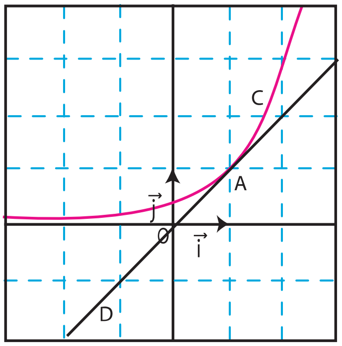
a=−1



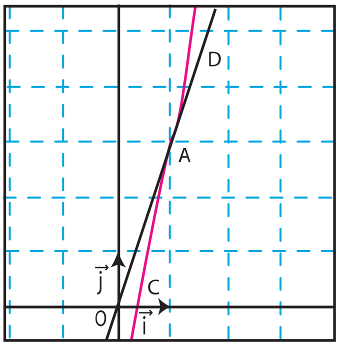
a=1



a=−3



a =1



a =1

Activité 4 :

Soit f une fonction dérivable en x_0 et C sa courbe représentative dans le plan muni d' un repére $(O,\vec{i},\vec{j})$

Donner l'équation de la tangente à C au point $A(x_0 , f(x_0))$.

Théorème:

f une fonction dérivable en x_0 l'équation de la tangente à C_f au point $A(x_0, f(x_0))$ est

$y= f'(x_0)(x-x_0) +f (x_0)$

Traçage pratique de la tangente

Soit $f : x \longmapsto x^3$

1°) Calculer le nombre dérivé de f en 1.

2°) Soit le point A(1, 1) de C_f .

a/ Placer le point M tel que $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}1\\ f'(1)\end{pmatrix}$

b/ Que représente la droite (AM) pour la courbe de f.

3°) Soit g une fonction dérivable en x_0

Donner une méthode simple de construction de la tangente à la courbe de g au point B d'abscisse x_0.

III – Approximation affine

Activité 1 :

1°) a/ Tracer dans le plan muni d'un repère , la courbe C représentant la fonction f définie par $f(x) = x^2+5x+2$ (unité graphique: 1 cm).

b/ Tracer la droite D d'équation $y = 5x + 2$.

2°) Vérifier que D est tangente à C au point A(0, 2).

3°) a/ Si l'on remplace f (x) par 5x + 2, quelle erreur commet-on?

b/ En utilisant une calculatrice calculer cette erreur pour
$x = -0{,}9$; $x = -0{,}99$; $x = 0{,}1$; $x = 0{,}01$ et $x = 0{,}001$.

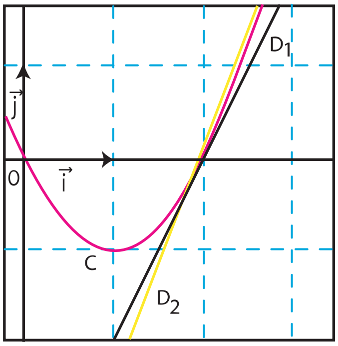
c/ Pour quelles valeurs de x cette erreur est-elle inférieure à 0,01 ? à 0,001?

Activité 2 :

La figure ci-contre représente dans un repère orthonormal la courbe C de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-2x$ et les droites D_1 et D_2 d'équations respectives:

$D_1 : y = 2x - 4$

$D_2 : y = 2{,}5x - 5$.



1°) Vérifier, par le calcul, que les droites D_1 et D_2 passent par le point A de C de coordonnées (2; 0).

2°) Vérifier que la droite D_1 est tangente à la courbe C en A

3°) a/ Reproduire et compléter le tableau suivant:

x	1,9	1,95	1,99	2	2,01	2,05	2,1
x - 2							
f (x) – (2x – 4)							
f(x) – (2,5x– 5)							

b/ Dire laquelle des deux fonctions g et h définie respectivement par $g(x) = 2x - 4$ et $h(x) = 2{,}5\,x - 5$ réalise la meilleure "approximation affine" de f au voisinage de 2.

Théorème:

C est la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a. A est le point de C d'abscisse a.
La tangente en A à la courbe C est la représentation d'une fonction affine g. On admet que la fonction g est la meilleure approximation affine de f en a.
Autrement dit, pour x proche de a, $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$.

Activité 3 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{1-x}$.

1°) **a/** Vérifier que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=-\frac{1}{2}$

b/ Déterminer la meilleure approximation affine de la fonction f en 0.

2°) Utiliser l'approximation affine pour donner une valeur approchée de $a=\sqrt{0{,}998}$, $b=\sqrt{0{,}992}$ et $c=\sqrt{0{,}9992}$.

Activité 4 :

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=(1+x)^{10}$.
On admet que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=10$.

1°) Donner la meilleure approximation affine de la fonction f en 0.

2°) Une personne place 20000DT en banque avec un intérêt composé de 4% par an sur dix ans.

a/ Vérifier que son compte après dix ans sera $20000\left(1+\frac{4}{100}\right)^{10}$ DT.

b/ Le banquier lui annonce que dans dix ans son compte sera de l'ordre de 28000DT. Expliquer le calcul du banquier.

IV– Dérivabilité à droite – Dérivabilité à gauche :

Activité 1 :

$$\text{Soit}\begin{cases} f(x)=5x-6 & \text{si } x<1 \\ f(x)=x^2+3x-5 & \text{si } 1\le x\le 2 \\ f(x)=x^3-3 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

1°) Vérifier que f est continue en 1 et en 2.

2°) f est elle dérivable en 1 ? en 2 ?

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un ensemble D contenant un intervalle de la forme $[x_0\,,\,x_0+h[$.

On dit que f est dérivable à droite en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$ où ℓ est un nombre réel.

ℓ est appelé nombre dérivé de f à droite en x_0 et on note $\ell=f'_d(x_0)$.

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un ensemble D contenant un intervalle de la forme $]x_0 - h , x_0]$.

On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$ où ℓ est un nombre réel.

ℓ est appelé le nombre dérivé de f à gauche en x_0 et on note $\ell = f_g'(x_0)$.

Théorème:

f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite en x_0 et f est dérivable à gauche en x_0 et $f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$.

Théorème:

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

Remarques :

- Si f une fonction dérivable à droite en x_0 alors sa courbe représentative C admet une demi-tangente au point $A(x_0, f(x_0))$ d'équation $y = f_d'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ et $x \geq x_0$
- Si f une fonction dérivable à gauche en x_0 alors sa courbe représentative admet une demi-tangente au point $A(x_0, f(x_0))$ d'équation $y = f_g'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ et $x \leq x_0$

Demi-tangente verticale

Activité 2 :

1°) Tracer C_f la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$. dans un repére $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2°) Soit M (x, y)) $\in C_f$ avec $M \neq O$

Construire (OM) et déterminer son coefficient directeur.

3°) **a/** Quelle est la limite du coefficient directeur lorsque x tend vers 0?

b/ f est elle dérivable à droite en 0 ?

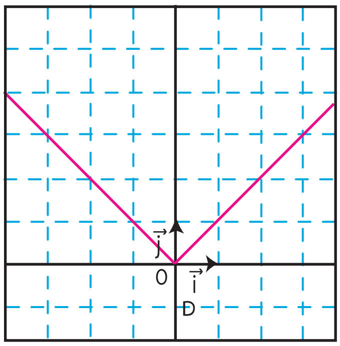
c/ Quelle est la position limite de (OM) quand M se rapproche de O?

Si $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$

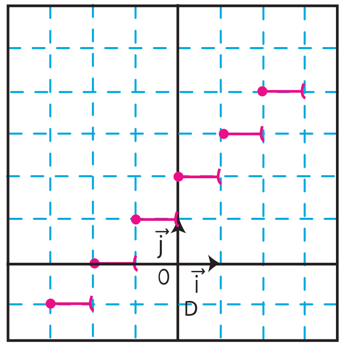
Alors C_f admet au point $A(a, f(a))$ une demi tangente verticale.

Exercice :

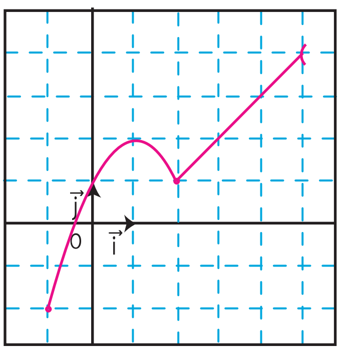
On donne la représentation graphique d'une fonction f.
Dites, dans chacun des cas suivants, si f est dérivable au point d'abscisse a.



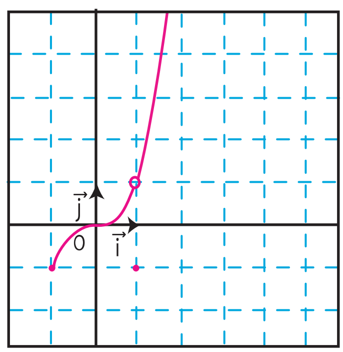
a=0



a=3



a = 2 , a = 0



a = 1 , a = 0

V - Dérivabilité sur un intervalle :

Définition 1

Soit f une fonction à variable réelle.
On dit que f est dérivable sur un intervalle ouvert]a, b[si f est dérivable en tout point de]a, b[.

Définition 2

Soit f une fonction à variable réelle.
On dit que f est dérivable sur]a,b] si f est dérivable en tout point de]a,b[et f est dérivable à gauche en b.

Définition 3

Soit f une fonction à variable réelle.
On dit que f est dérivable sur $[a,b[$ si f est dérivable en tout point de $]a,b[$ et f est dérivable à droite en a.

Définition 4

Soit f une fonction à variable réelle.
On dit que f est dérivable sur $[a,b]$ si f est dérivable en tout point de $]a,b[$ et f dérivable à droite en a et à gauche en b .

Définition 5

Soit f une fonction à variable réelle.
On dit que f est dérivable sur $]a,+\infty[$ si f est dérivable en tout point de $]a,+\infty[$.

Définition 6

Soit f une fonction à variable réelle.
On dit que f est dérivable $[a,+\infty[$ si f est dérivable en tout point de $]a,+\infty[$ et f est dérivable à droite en a.

Définition 7

Soit f une fonction à variable réelle.
On dit que f est dérivable sur $]-\infty,b[$ si f est dérivable en tout point de $]-\infty,b[$.

Définition 8

Soit f une fonction à variable réelle.
On dit que f est dérivable sur $]-\infty,b]$ si f est dérivable en tout point de $]-\infty,b[$ et f est dérivable à gauche en b.

Définition 9

Soit f une fonction à variable réelle.
On dit que f est dérivable sur IR si f est dérivable en tout point de IR .

VI– Fonction dérivée:

Activité 1 :

Soit $f : x \mapsto x^2 + 1$

1°) Vérifier que $f'(0)=0$, $f'(1)=2$, $f'(-1)=-2$ et $f'(2)=4$

2°) Placer dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ les points :
$A(0, f'(0))$, $B(1,f'(1))$, $C(-1, f'(-1))$ et $D(2, f'(2))$.

3°) Que peut on dire des points A, B, C et D ?

4°) Soit Δ la droite d'équation $y= 2x$.
Vérifier que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$; $M_0(x_0 ,f'(x_0)) \in \Delta$

Activité 2 :

Soit $f : x \mapsto x^3$

1°) Calculer :$f'(0)$, $f'(1)$,$f'(-1)$,$f'(2)$ et $f'(-2)$

2°) **a/**Placer dans le plan muni d'un repère orthonormé les points :
$A(0, f'(0))$, $B(1,f'(1))$, $C(-1, f'(-1))$.

b/ Donner l'équation de la parabole P passant par A, B, C.

c/ Tracer P.

3°)Vérifier que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$,$M_0(x_0,f'(x_0)) \in P$.

L'équation d'une parabole est de la forme $y = ax^2 + bx+c$ avec $a \neq 0$

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction qui à chaque réel x de I associe $f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f, elle est notée f'.

$$f' : I \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

Remarque : Cette définition s'étend à une réunion d'intervalles disjoints.

VII– Dérivées des fonctions usuelles :

Activité 1 :

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto k$ $(k \in \mathbb{R})$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$; $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$

1°) Tracer les courbes représentatives de f, g et h.

2°) Soit $M(x_0, f(x_0)) \in C_f$, quelle est la tangente à C_f en M. Déterminer son coefficient directeur.

3°) Faire le même travail pour $M(x_0,g(x_0)) \in C_g$ et $M(x_0,f(x_0)) \in C_h$

4°) En déduire f', g' et h' les dérivées respectives des fonctions f, g et h.

Activité 2 :

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$; $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n \quad (n \geq 2)$

1°) Soit $x_0 \in IR$, calculer : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}$

2°) Déterminer les fonctions dérivées f', g' et h'.

Activité 3 :

Faire le même travail avec les fonctions : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$; $x_0 \in IR^*$

Activité 4 :

1°) Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$

Déterminer la fonction dérivée de f.

2°) Soit $g : \left]-\dfrac{b}{a},+\infty\right[\to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{ax+b}$

Vérifier que pour tout x de $\left]-\dfrac{b}{a},+\infty\right[$, $g'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

Théorème:

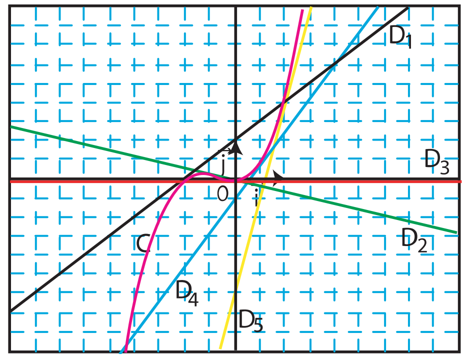
Dans le tableau suivant f désigne une fonction et I l'ensemble où f est dérivable

I	f(x)	f '(x)
$\mathbb{R}$	k ; k nombre réel	0
$\mathbb{R}$	x	1
$\mathbb{R}$	x^2	$2x$
$\mathbb{R}$	x^n ; entier tel que $n \geq 2$	nx^{n-1}
$]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$	$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{2}{x^3}$
$]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$	$\dfrac{1}{x^n}$; n est un entier non nul	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$]0,+\infty[$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\left]-\dfrac{b}{a},+\infty\right[$ si $a>0$ ou $\left]-\infty,-\dfrac{b}{a}\right[$ si $a<0$	$\sqrt{ax+b}$	$\dfrac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

VIII– Opérations sur les fonctions dérivables :

Activité 1 :

La figure ci-contre représente la courbe représentative de la fonction $h : x \mapsto x^3 + x^2$ et les tangentes D_1, D_2, D_3, D_4 et D_5 à C_h au points d'abscisses respectives -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$ et 1



1°) Déterminer le coefficient directeur de chacune des droites D_1, D_2, D_3, D_4 et D_5.

2°) Soient $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x^3$

Déterminer les fonctions dérivées f' et g'

3°) Reproduire le tableau suivant et le compléter :

x	$f'(x)$	$g'(x)$	$h'(x)$
-1			
$\frac{1}{2}$			
0			
$-\frac{1}{2}$			
1			

4°) Que remarque-t-on ?

Activité 2 :

On considère les fonctions affines u et v définies sur IR par $u(x) = x + 2$ et $v(x) = x - 2$ et représentées par les droites respectives D_1 et D_2 . Soit P la parabole d'équation $y = x^2 - 4$

1°) Vérifier que : $u(x) \times v(x) = x^2 - 4$.

2°) Le coefficient directeur de la tangente T à la parabole P en A d'abscisse 1 est-il égal au produit des coefficients directeurs des droites D_1 et D_2 ?

Théorème:(admis)

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel fixé. On admet les résultats suivants :

- La fonction u + v est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$
- La fonction ku est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$
- La fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + v'u$

Si de plus v ne s'annule pas sur I Alors :

- La fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
- La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Activité 3 :

Déterminer l'ensemble où f est dérivable et la fonction dérivée dans chacun des cas suivants:

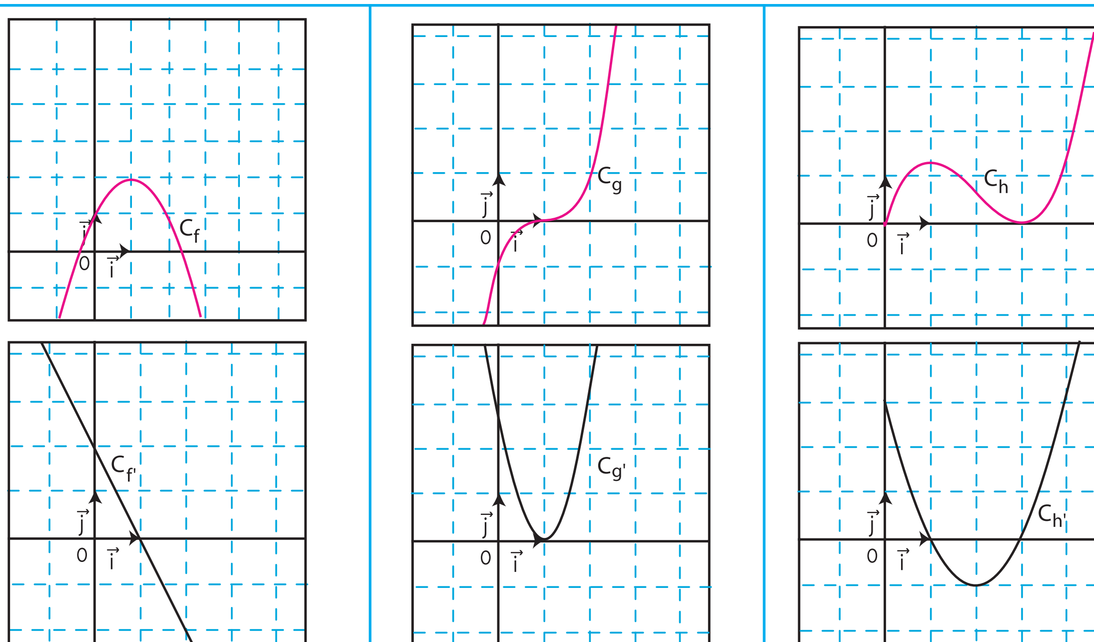
1°) $f : x \mapsto 2x^2 + \frac{1}{2}x + 3$	2°) $f : x \mapsto x^3 + x^2 - 5x + 3$	3°) $f : x \mapsto x^4 - \frac{1}{3}x^2 - 3x + 1$
4°) $f : x \mapsto \dfrac{\frac{1}{2}x + 3}{2x - 5}$	5°) $f : x \mapsto \dfrac{-0.01x^2 + 3x - 1}{x + 2}$	6°) $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{2}x + 3}$

IX - Quelques applications de la dérivée :

1°) Sens de variation dune fontion :

Activité 1 :

Voici les courbes représentants trois fonctions f, g, h et de leurs fonctions dérivées respectives.

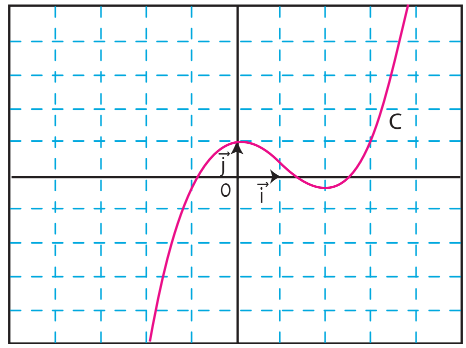


I=]−∞,1],I =[1,+∞[	I= IR	I=[0,1],I=[1,3],I=[3,+∞[

1°) Donner le signe de la fonction dérivée ainsi que le sens de variation de chacune des fonctions f, g et h sur I.
2°) Trouver le lien qui semble exister entre le signe de la dérivée d'une fonction et le sens de variation de cette fonction.

Activité 2 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ et C_f sa représentantion graphique .



1°) **a/**Calculer $f'(x)$.

b/ Donner le signe de $f'(x)$.

2°) Utiliser la représentation graphique ci-contre pour donner le sens de variation de f.

3°) Quelle conjecture peut-on faire?

Théorème:(admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et f′ sa fonction dérivée.
- f′est positive sur I si et seulement si f est croissante sur I.
- f′est négative sur I si et seulement si f est décroissante sur I.
- f′est nulle en toute valeur de I si et seulement si f est constante sur I.

Activité 3 :

Soit $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

Justifier tous les renseignements donnés par ce tableau.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

Vocabulaire : Le tableau précédent est appelé tableau de variation de f.

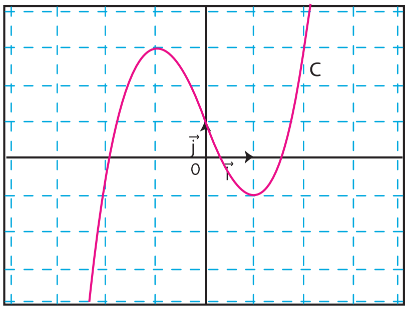
Activité 4 :

Pour chacune des fonctions suivantes donner son tableau de variation :

1°) $f(x) = x$	**2°)** $f(x) = x^2$
3°) $f(x) = \sqrt{2x-1}$	**4°)** $f(x) = \dfrac{2x+5}{x-1}$
5°) $f(x) = x^3$	

2°) Extremum d 'une fonction :

Activité 1 :



La courbe (C) ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-3, 3]$ par :$f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1°) Déterminez graphiquement le nombre x_1 pour lequel f admet un maximum relatif.
Calculer $f'(x_1)$.

2°) Déterminer graphiquement le nombre x_2 pour lequel f admet un minimum relatif.
Calculer $f'(x_2)$.

3°) Tracer les tangentes à (C) aux points d'abscisses respectives - 1 et 1.

Théorème:

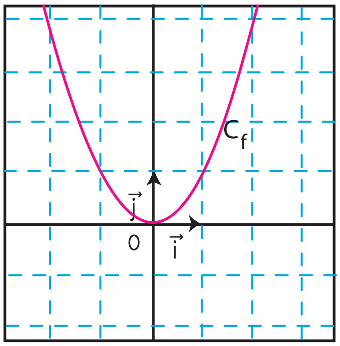
Soit f une fonction dérivable en a, de courbe représentative C_f .
Si f admet un extremum (maximum ou minimum) en a, alors $f'(a) = 0$.

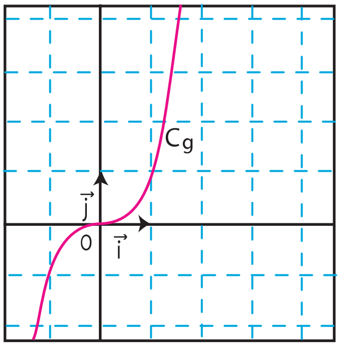
Remarque :

Si f admet un extremum en a alors la tangente à sa courbe au point a est horizontale.

Activité 2 :

Les courbes ci-dessous sont les représentations graphiques des fonctions $f : x \mapsto x^2$
$g : x \mapsto x^3$





1°) **a/** Quel est le nombre dérivé de f en 0 ?
b/ Quel est le nombre dérivé de g en 0 ?

2°) **a/** f admet elle un extremum en 0 ?
b/ g admet elle un extremum en 0 ?

Activité 3 :

Les tableaux suivants sont ceux des variations de deux fonctions f et g définies sur l'intervalle [-0,5 ; 4].

x	−0,5		0		2		4
f′(x)		+	0	−	0	+	
f	1,125	↗	5	↘	1	↗	2

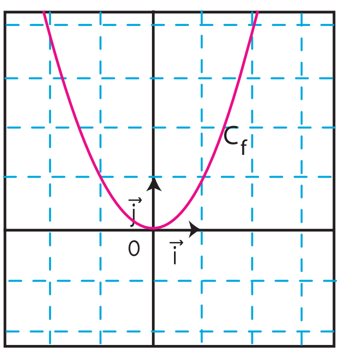
x	−0,5		0		3		4
g′(x)		−	0	−	0	+	
g	1,5625		↘		-26	↗	2

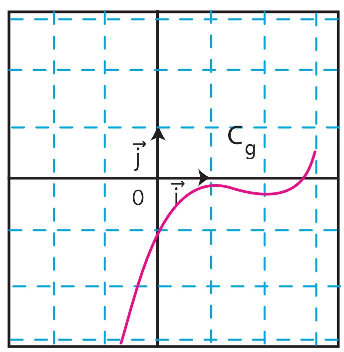
Déterminer les extremums, relatifs eventuels locales de chacune des fonctions f et g

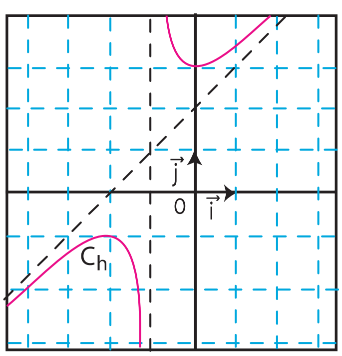
Théorème:

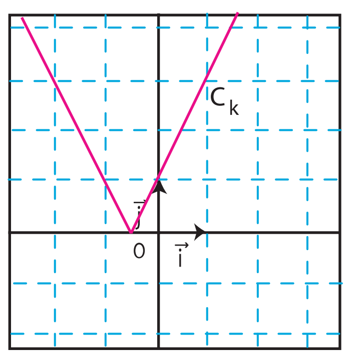
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a ∈ I Si f s' annule en a en changeant de signe alors f admet un extremum relatif en a.

Activité 4 :









1°) Pour chacune des fonction respectives ci -dessus donner ses extremums relatifs.
2°) Ces extremums relatifs sont ils absolus ?

3. Cout marginal :

Activité :

On estime que le coût total de production (en DT) de q unités d'un produit donné est de $C(q) = 3q^2 + 5q - 10$.

1°) Trouver la formule du coût marginal.

2°) Quel est le coût marginal lorsque 50 unités ont été produites?

3°) Quel est le coût réel de production de la $51^{\text{ème}}$ unité?

> Le coût marginal est la dérivée du coût total

4. Taux de variation d'une population :

Activité :

On prévoit que dans t années la population d'une ville sera de $P(t) = 20 - \frac{6}{t+1}$ milliers d'habitants.

1°) Donner la formule qui exprime le taux de variation de la population par rapport au temps.

2°) Quel sera, dans un an, le taux de variation de la population de la ville?

3°) De combien d'habitants la population augmentera-t-elle réellement au cours de la $2^{\text{ème}}$ année?

4°) Quel sera, dans 9 ans, le taux de variation de la population?

5°) Que deviendra, à long terme, le taux de la population ?

> Le taux de variation d'une population est sa dérivée par rapport au temps.

5. Exemples de problémes d'optimisation:

Activité 1 :

On estime que le coût de construction en milliers de dinars d'un immeuble de n étages est $C(n) = 2n^2 + 500n + 600$

1°) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = 2x + 500 + \frac{800}{x}$
Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2°) Expliciter le coût moyen Cm de construction d'un étage en fonction de n.

3°) Quel doit être le nombre d'étages d'un immeuble pour que le coût moyen par étage soit minimal.

> Le coût moyen de construction d'un étage est donner par $\frac{C(n)}{n}$

Activité 2 :

Un article courant d'un magasin de bricolage est acheté à 3 DT au fournisseur.
On observe que le nombre d'articles q, vendus journellement est fonction du prix de vente, noté x (exprimé en DT), suivant la formule $q(x) = 300 - 20x$ avec $x \in [3, 15]$.

1°) Quel est le nombre d'articles vendus si le prix de vente est 6 DT? Calculer alors le bénéfice réalisé.

2°) Prouver que le bénéfice B, obtenu avec un prix de vente de x DT vérifie la relation: $B(x) = (300 - 20x)(x - 3)$.

3°) Calculer la dérivée $B'(x)$ et dresser le tableau de variation de B. En déduire le prix de vente qui donne un bénéfice maximal.

Activité 3 :

Une entreprise produit différents articles. Le coût total de production est donné, en fonction de la quantité q d'articles produits, par la relation $C(q) = (2q^2 - 60q + 800)$ DT.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0; 50] par $f(x) = 2x^2 - 60x + 800$.

1°) Déterminer la fonction dérivée f' de f.

2°) Étudier le signe de la dérivée. Dresser le tableau de variation de f.

3°) En déduire que la fonction f admet un minimum. Calculer ce minimum.

4°) a/ Vérifier que $f(x) = 2[(x-15)^2 + 175]$

b/ Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.
(Unités graphiques : en abscisse, 1 cm pour 5 en ordonnée, 5cm pour 1000).

5°) Déterminer graphiquement la quantité d'articles à produire pour que:

a/ le coût total de production soit minimal.

b/ le coût total de production soit inférieur à 2000 DT.

Visualisation de la tangente en un point à la courbe d'une fonction et la détermination de son coefficient directeur avec GEOPLANW

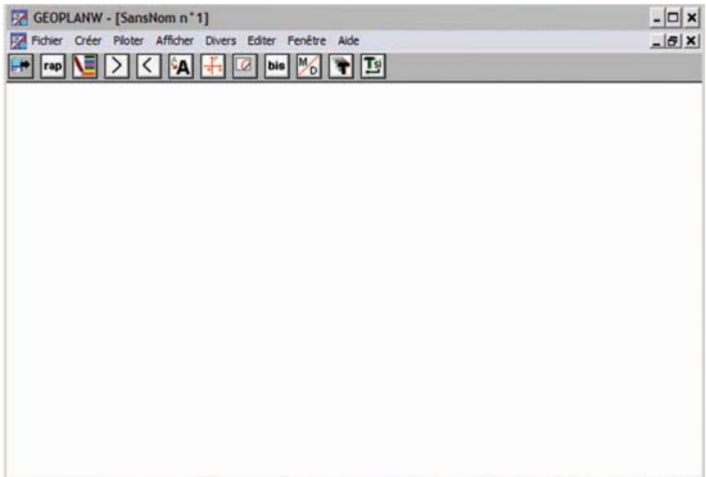
a/ Traiter le texte suivant avec un logiciel de traitement de texte (Notepad, WordPad, Microsoft Word)

```
Position de Roxy: Xmin: -4.3426637431, Xmax: 5.6573362569,
Ymax: 4.4143540353
Objet dessinable Roxy, particularités: rouge, avec quadrillage, dessiné

f fonction: xl->(-x^2+5x-1)/(x^2+1)
C graphe de f sur [-10,10] (1000 points, repère Roxy)
Objet dessinable C, particularités: points liés
X point libre sur la droite ox
Objet libre X, paramètre: -4.7511702965
Pas de pilotage au clavier de X: 0.001 (/ fenêtre,modifiable)
x abscisse de X dans le repère ox
M point de coordonnées (x,f(x)) dans le repère Roxy
A point de coordonnées (2,f(2)) dans le repère Roxy
Droite (AM)
Objet dessinable (AM), particularités: bleu
m coefficient directeur de la droite (AM) (repère Roxy)
a abscisse de A (repère Roxy)
dis = a − x

Hauteur de la zone des affichages: 50
Af0 affichage du scalaire m (2 décimales)
Position de l'affichage Af0: (0,0)
Af1 affichage du scalaire dis (2 décimales)
Position de l'affichage Af1: (224,0)
```

Sélectionner tout le texte est le copier : Aller dans la barre de menu et choisir

Edition/ Copier

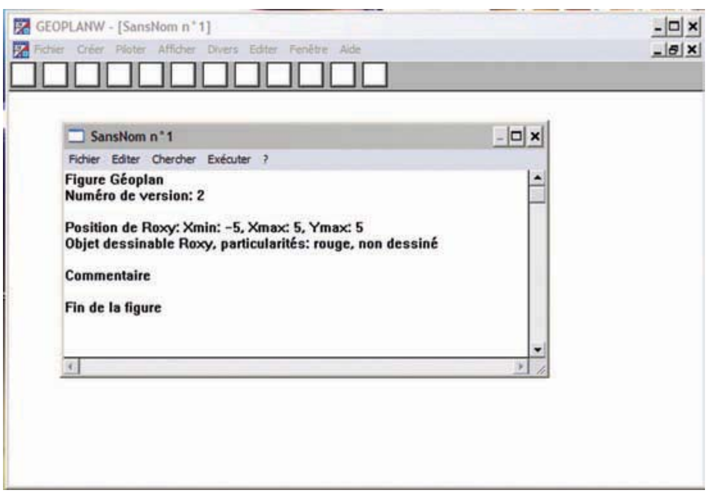
b/ Ouvrir le programme GeoplanW en exécutant



c/ Aller dans la barre de menu et choisir

Editer/ Editer Texte figure

On obtient :



Effacer le texte suivant :

Position de Roxy: Xmin: –5, Xmax: 5, Ymax: 5
Objet dessinable Roxy, particularités: rouge, non dessiné

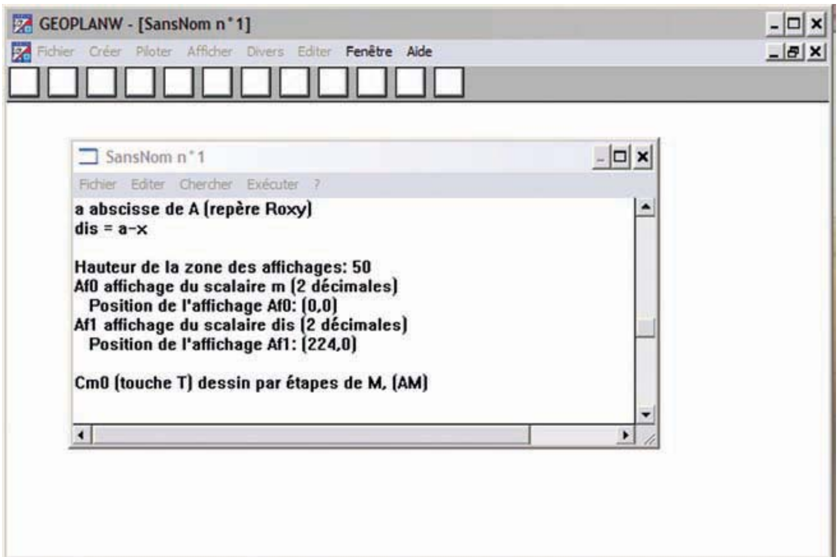
Commentaire

Fin de la figure

Et la remplacer par le texte traiter au départ on procédant comme suit :

Edition/ Coller

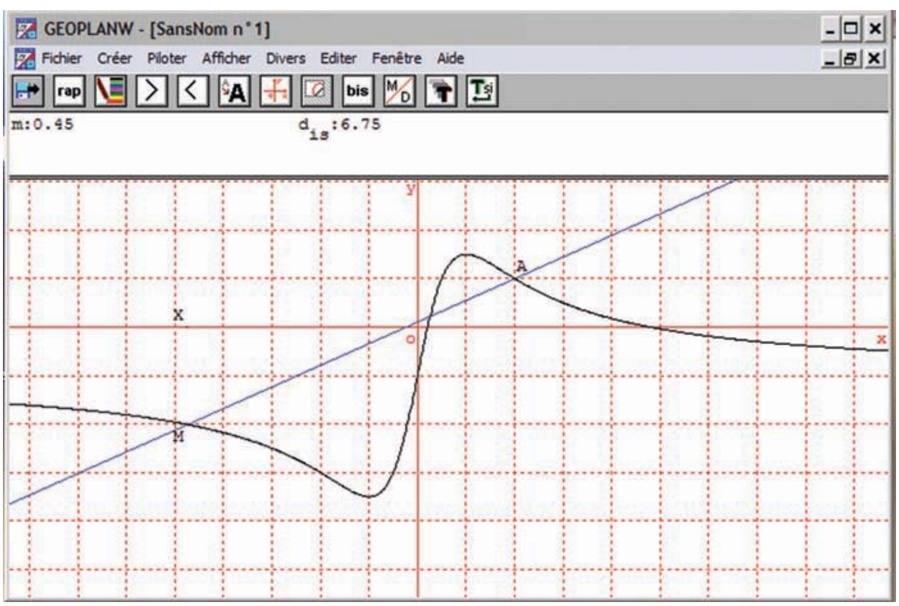
On obtient :



d/ Aller dans la barre de menu et choisir

Exécuter

Exécuter
à la commande appuyer sur yes
On obtient :



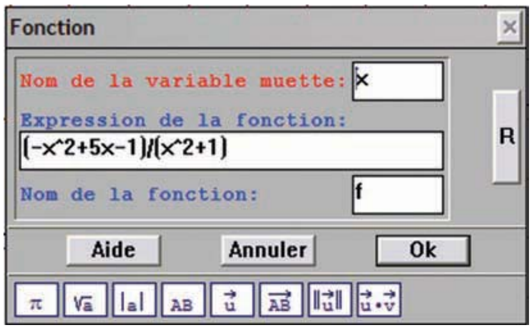
e/ Avec les flèches du clavier en rapproche le point M au point A.
m est coefficient directeur de la droite (AM) et dis = $x_A - x_M$.

f/ On peut modifier l'expression de la fonction f ainsi les coordonnés du point A sur la courbe en exécutent

Divers/ Modifier/Dupliquer

On valide l'écran suivant :

Puis



De même pour le point A.

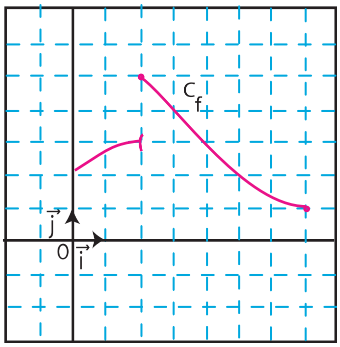
1

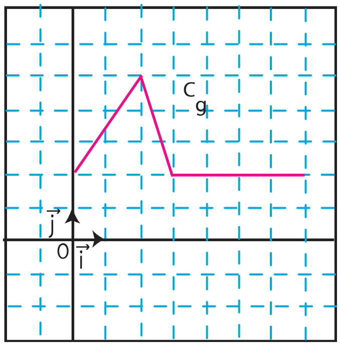
Dans chacun des cas suivants Calculer le nombre dérivé de f en a.

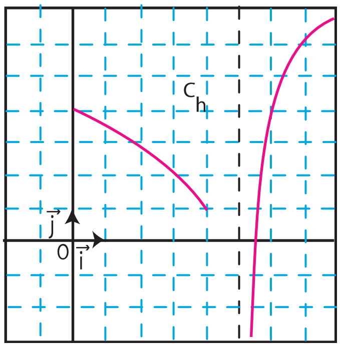
$f(x)= -x^2+x+1$	$a = 2$
$f(x)=-x^3+2x-3$	$a = 1$
$f(x)= x^4-3x^2+2x-1$	$a = 0$
$f(x)=(x+3)(2x-1)$	$a = 1$
$f(x)=\dfrac{1}{x+1}$	$a = 2$
$f(x)=\dfrac{-5}{2x+1}$	$a = 0$
$f(x)=\dfrac{-x-5}{2x-1}$	$a = -1$
$f(x)=\dfrac{x^2-x+0{,}1}{1-x}$	$a = 2$
$f(x)=\dfrac{1}{x}-2x$	$a = 3$
$f(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x-1}$	$a = 2$
$f(x)=\sqrt{-2x+1}$	$a = -3$
$f(x)=\lvert x+1\rvert$	$a = \dfrac{1}{2}$
$f(x)=x\lvert x\rvert$	$a = 0{,}3$

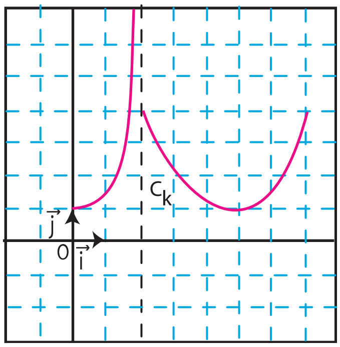
2

1°) Pour chaque fonction, indiquer celle pour laquelle on ne peut pas calculer la limite en 2. De même en 5.
2°) Etudier la dérivabilité de chaque fonction en 2 et en 5



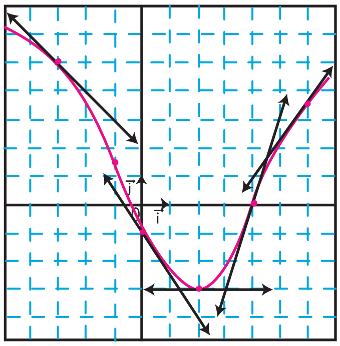






3

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, représentée par la courbe C ci-dessous et quelques tangentes.



1°) Déterminer graphiquement

f(2) ; f(4) ; f(6) ; f(–3) ; f(0)

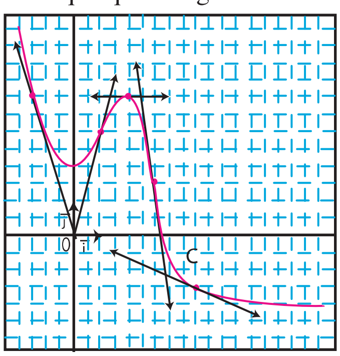
2°) a/ Résoudre graphiquement

b/ $f(x) \geq 0$

c/ $f'(x) \geq 0$

4

La fonction f est représentée ci-dessous par la courbe C. On connaît quelques tangentes à C.



1°) Lire graphiquement $f'(1)$, $f'(4{,}5)$, $f'(1{,}5)$, $f'(3)$, $f'(0)$, $f'(2)$

2°) Donner une équation de chacune des tangentes passant par l'origine, puis de chacune des tangentes horizontales.

3°) Sur l'intervalle [–2 ; 9], d'après la forme de la courbe C donnée, existe-t-il un autre point de C où la tangente passe par l'origine ?

5

Construire une courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle [- 4; 6], telle que :

x	–4	–2	-1	0	2	4	6
f(x)	–2	–1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	4	3	$\frac{5}{2}$

et connaissant les nombres dérivés :

$f'(-2) = 1$; $f'(0) = \frac{4}{3}$; $f'(2) = 0$ et $f'(4) = -\frac{2}{5}$

6

1°) Soit $f : x \mapsto (1+x)^2$.

a/ Calculer le nombre dérivé de f en 0.

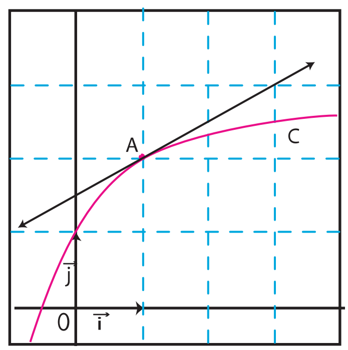
b/ En déduire l'approximation affine de f au voisinage de 0.

2°) De même pour la fonction $f : x \mapsto (1+x)^3$.

7

La courbe C ci-dessous représente une fonction f. On s'intéresse aux valeurs de x proches de 1.

La droite T est la tangente à C en A



1°) Donner l'équation de T sous la forme y = ax + b.

2°) a/ On approche la fonction f au voisinage de 1 par la fonction affine $g : x \mapsto ax + b$.

b/ En déduire une valeur approchée de : f(1,l) ; f(0,9) ; f(1,01) ; f(0,999).

8

On considère les fonctions f et g définies sur IR par:

$f(x) = x^2 + 3x$ et $g(x) = -x^2 - x + 2$.

Démontrer que, en leurs points d'abscisses –1, les tangentes respectives à C_f et à C_g sont parallèles.

9

On considère les courbes C_1, C_2 et C_3 d'équations respectives : $y = -x^2 + 3x+6$, $y = x^3 - x^2 + 4$ et $y = x^2 + 7x+ 8$

Montrer que ces trois courbes passent par le point A(-1, 2) et qu'elles admettent en ce point la même tangente T.

10

Déterminer les points de la courbe C d'équation : $y = x^3 - 3x^2 - 7x + 6$, où la tangente à C est parallèle à la droite D d'équation $y = 2x$.

11

Soit la fonction f définie sur R\ {- 3 ; 0} par:

$$f(x)=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x}$$

1°) Démontrer que la tangente T à la courbe C au point d'abscisse -2 passe par l'origine.

2°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de T avec la courbe C. En déduire, suivant les valeurs de x, la position de la courbe C par rapport à la tangente T.

12

On considère la fonction f définie sur IR par:

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{1}{2}$$

1°)Déterminer $f'(x)$

2°) Écrire une équation de chacune des tangentes à la courbe C_f aux points d'abscisses 0, 1 et -1

3°) Soit a un réel.

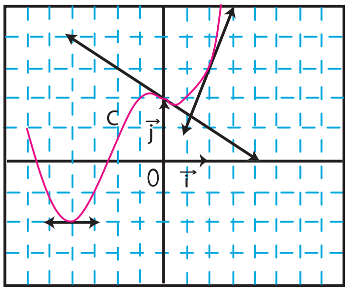
a/ Déterminer a pour que la tangente T au point d'abscisse a soit parallèle à la droite D d'équation $y = 2x - 3$.

b/ Déterminer le réel a pour que la tangente T au point d'abscisse a passe par le point $I(0,\frac{5}{2})$

c/Tracer toutes les tangentes obtenues aux questions précédentes, puis la courbe C_f sur le même grphique.

13

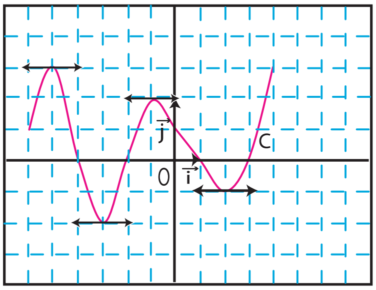
La courbe représentative d'une fonction f est donnée-ci-après. En chacun des points indiqués, la courbe admet une tangente qui est tracée.



En vous servant du quadrillage, déterminer : $f(0)$, $f(-2)$,$f(1)$, $f'(-2)$, $f'(1)$ et $f'(0)$.
Déterminer l'équation de la tangente en $x_0 = 1$

14

Soit la fonction f dont la représentation graphique C_f est la suivante :



Par lecture graphique.

1°) Dresser le tableau de signe de la fonction f par lecture graphique.

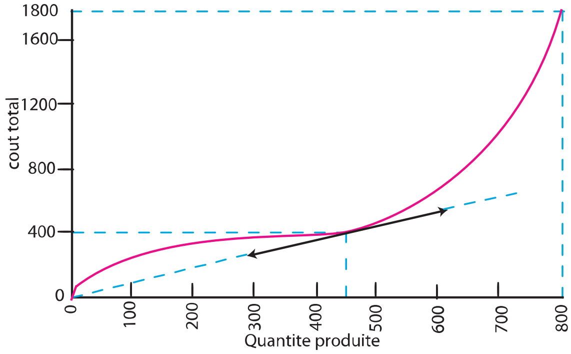
2°) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3°) Dresser le tableau de signe de la fonction f'.

4°) Résoudre l'équation : $f'(x) = 0$.

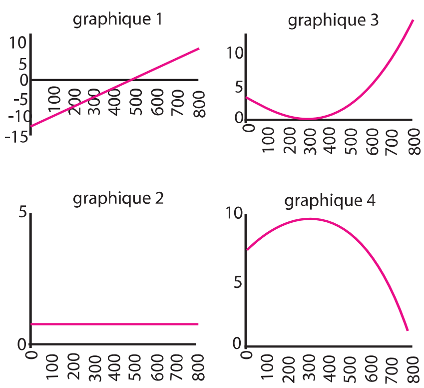
15

Une entreprise spécialisée produit un type de détergent, que l'on nommera A.
La courbe C ci-dessous représente le coût total de production du produit A en fonction de la quantité produite.
On note x la quantité produite exprimée en litres et CT(x) le coût total exprimé en DT, x variant de 0 à800.
On notera que $C_T(0) = 0$, $C_T(450) = 400$, $C_T(800) = 1\,800$, et que la tangente au point d'abscisse 450 passe par l'origine du repère.



Les économistes définissent le coût marginal comme le supplément de coût de production engendré par la production d'une unité supplémentaire. On considère qu'il peut être modélisé par la dérivée du coût total.
Nous le noterons C_m. On a donc $C_m = C'_T$.

Parmi les représentations ci-dessous, une correspond au coût marginal associé à la production du détergent A.Laquelle ? Justifier la réponse.



16

Un artisan fabrique des objets en bois. Pour chaque semaine, il estime que le coût de production en Dinars de C objets est donné par :

$C(x) = x^2 + 60x + 121$, pour $x \in [1;30]$.

Le coût moyen de production est défini par

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Calculer la dérivée C'_m de C_m . Etudier le signe de C'_m et dresser le tableau de variation de C_m.

En déduire le nombre d'objets à fabriquer pour obtenir un coût moyen minimal.

Chaque objet est vendu à 110 DT. Montrer que le bénéfice réalisé par la vente de x objets est donné par $B(X) = -x^2 + 50x - 121$

Etudier le signe de $B'(x)$ et dresser le tableau de variation de B. En déduire le nombre d'objets à vendre pour obtenir un bénéfice maximal.

17

Soit la fonction f telle que $f(x) = x^{19}$

Calculer le nombre dérivé de f en 1. Donner la valeur approchée de $f(1{,}001)$ et $f(0{,}999)$.

18

Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$f(x) = \sqrt{x}$

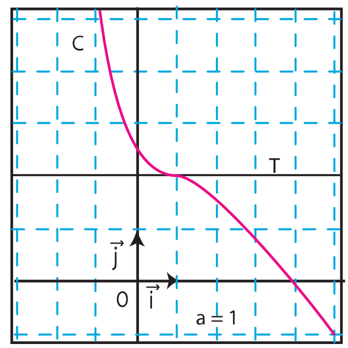
1°) Déterminer $f'(x)$ et en déduire $f'(4)$.

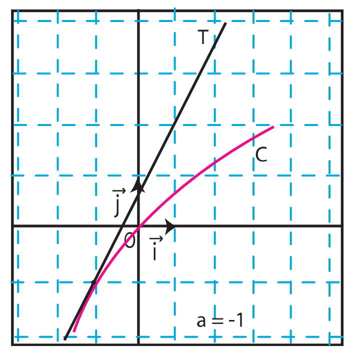
2°) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{4{,}02}$ et de $\sqrt{3{,}996}$ résultat sous forme (décimale).

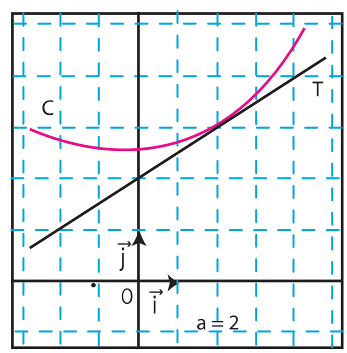
19

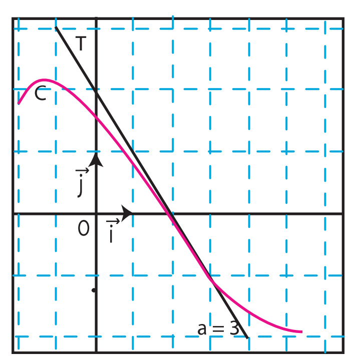
(C) représente une fonction dérivable sur IR et la droite T est tangente à (C) au point d'abscisse a.

Dans chaque cas déterminer $f'(a)$ et donner une équation de la tangente T.









Exercices et problèmes

20

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{x}$
définie sur IR* et soit (C) sa courbe représentative.
Déterminer les abscisses des points de (C) où la tangente :
1°) est horizontale
2°) est parallèle à la droite d'équation $y = -\dfrac{2}{3}x - 5$

21

Déterminer le réel m pour que la courbe d'équation $y = (m - 1)x^2 + (3m + 2)x + 4$ admette au point d'abscisse -1 une tangente de coefficient directeur 6.

22

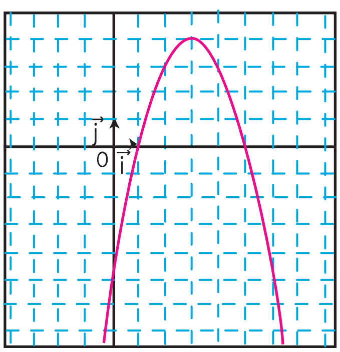
Soit (P) la parabole d'équation : $y = x^2 - 3x + \dfrac{5}{4}$

et (H) l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{3(3x + 5)}{4(x + 3)}$.

1°) Montrer que (P) et (H) rencontrent l'axe (Oy) en un même point A.
2°) Montrer que les tangentes en A aux courbes (P) et (H) sont perpendiculaires.
(Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1).

23

La courbe suivante est la représentation graphique de la fonction dérivée d'une fonction f définie sur IR.



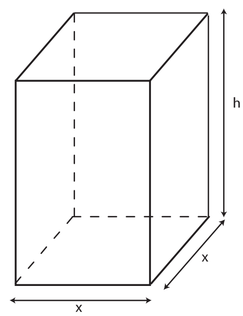
1°) Déterminer les variations de f.
2°) Sachant que $f(3) = 4$, donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.

24

soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = 2x^2 + \dfrac{4}{x}$
1°) a/ déterminer la fontion dérivée f ' de f

b/ Vérifier que $f'(x) = \dfrac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$
étudier le signe de $f'(x)$.
c/ En déduire le tableau de variation de f.

2°) On construit un réservoir fermé en tôle, ayant la forme d'un parallélépipède rectangle , de hauteur h et dont la base est un carré de côté x (l'unité de longueur est le mètre



Exprimer l'aire S de la tôle utilisée et le volume V du réservoir en fonction de x et h.
3°) On suppose que la capacité du réservoir est de $1m^3$.
a/ Exprimer la hauteur h en fonction de x.
b/ En déduire l'expression de S en fonction de x.
c/ A l'aide la première partie, déterminer x tel que l'aire S soit minimumale.
Donner alors les dimensions du réservoir.

25

Soit la fonction f définie sur IR par
$f(x) = x^2+2x+1$ et C sa représentation graphique dans un repère orthonormal du plan.
1°) Prouver que la tangente à C au point M de C d'abscisse a , a pour équation $y = (2a+2)x - a^2 + 1$
2°) Déterminer les équations réduites des deux tangentes à C issues du points A(0;1)

26

Soit $f : \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$
1°) Déterminer l'ensemble de définition de f
2°) Etudier les variations de f
3°) Déterminer ses extremums éventuels

27

f et g sont les fonctions définies sur IR par :

$f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$ et $g(x) = \frac{-3x^2+x}{x^2+1}$

Sans calculer f '(x) et g' (x) montrer que pour tout réel x, f '(x) = g' (x).

28

On considère la fonction f définie et dérivable sur $I =]0;+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.

a/ Déterminez sa fonction dérivée.

b/ En déduire la limite de $\frac{x\sqrt{x}-8}{x-4}$ quand x tend vers 4.

29

f est la fonction $x \mapsto x^3$

Donner une approximation des nombres suivants :$(2{,}001)^3$et $(1{,}997)^3$

30

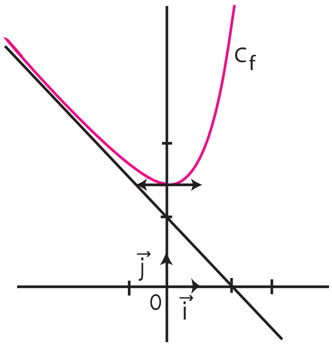
Soit f la fonction trinôme telle que :

$f(x) = ax^2+bx+c$.Déterminer les réels a,b, c tels que C_f admette au point (1;3) une tangente de coefficient directeur égal à 1 ainsi qu'une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

31

On a représenté ci- dessous une foction f définie sur $\mathbb{R}$

1°) Donner le tableau de variation de f.



2°) f est une fonction définie sur $]-3,+\infty[$ dont les variations sont données ci-dessous :

x	-3		2		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f	$-\infty$	↗	-1	↘	-2

Donner l'allure de sa courbe représentative

32

Pour chacune des fonctions *f* donner l'ensemble où *f* est dérivable ainsi sa fonction dérivée :

1°) $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$

2°) $f(x) = \frac{x^2+2x-7}{2}$

3°) $f(x) = 3x - 5 + \frac{4}{x}$

4°) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

5°) $f(x) = \frac{1}{x}\left(\sqrt{x}+1\right)$

6°) $f(x) = \frac{4}{3x} + \frac{3x}{4}$

7°) $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

8°) $f(x) = \frac{x}{x-3}$

9°) $f(x) = \sqrt{2x+5}$

10°) $f(x) = \sqrt{0{,}2x-1}$

11°) $f(x) - x^3 - 7{,}5x^2 - 500$

12°) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 0{,}5x + 4$

13°) $f(x) = 3x^6 - 5x^1 - 1$

14°) $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}$

15°) $f(x) = (2x+3)\left(4x^2+2x+1\right)$

16°) $f(x) = \frac{2x+4}{4} - \frac{x^2+x-1}{8}$

17°) $f(x) = 2x + \frac{3}{x^3}$

18°) $f(x) = \frac{2x^2+3x-2}{2x+3}$

19°) $f(x) = 4x - 1 + \dfrac{1}{x-3}$

20°) $f(x) = \dfrac{-3}{2x-1} + \dfrac{1}{x-3}$

22°) $f(x) = 3x^2 - 2500 + \dfrac{4800}{x}$

22°) $f(x) = 0{,}1x^2 - 2\sqrt{x} + 400$

33

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = |x-1|$

1°) Vérifier que pour tout $x \in IR$;

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \le 1 \\ x-1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

2°) Etudier la dérivabilité de f sur IR est donner sa fonction dérivée.

34

Soit la fonction f définie sur IR par: $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$

1°) Vérifier que pour tout $x \in IR$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \in \left]-\infty, 1\right] \cup \left[2, +\infty\right[\\ -x^2 + 3x - 2 & \text{si } x \in \left[1, 2\right] \end{cases}$$

2°) Etudier la dérivabilité de f sur IR et donner sa fonction dérivée.

35

Préciser la valeur des extremums locaux s'ils existent pour chacune des fonctions suivantes

1°) f définie sur IR par $f(x) = x^3 - 3x + 2$

2°) f définie sur IR par $f(x) = x^3 - 0{,}03x$.

3°) f définie sur IR* par: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x}$

4°) f définie sur $IR \setminus \{0;2\}$ par: $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2}$

$f(x) = x - 4 + \dfrac{1}{x-3}$

36

1°) Soit $P(x) = 3x^2 - 2x - 1$.
Déterminer les racines de ce polynôme et étudier son signe

2°) Etudier le sens de variation de la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

37

1°) Montrer que le polynôme, définie par:
$P(x) = 3x^2 - 12x + 17$, est toujours strictement positif, quelle que soit la valeur de x.

2°) On considère la fonction f définie sur IR par :
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 17x + 4$.
Montrer que f est strictement croissante sur IR .

38

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$-{2} par :
$f(x) = x + 1 - \dfrac{4}{x-2}$

1°) **a/** Préciser le sens de variation de la fonction $f_1 : x \mapsto \dfrac{-4}{x-2}$, sur l'intervalle $]2,+\infty[$ et sur l'intervalle $]-\infty, 2[$.

b/ Préciser le sens de variation de la fonction f_2 : .
$f_2 : x \mapsto x + 1$

c/ En déduire le sens de variation de f sans utiliser la fonction dérivée de f .

2°) Retrouver les variations de f à l'aide de la fonction dérivée.

39

La population d'une ville nouvelle est donnée par $f(t) = \dfrac{26t + 10}{t + 5}$ où t est le temps écoulé depuis début 1970 (exprimé en années) et f(t) est le nombre d'habitants (exprimé en milliers).

1°) Calculer la population de cette ville début 1980, puis début 1995.

2°) **a/** Calculer $f'(t)$, où f' désigne la dérivée de f.

b/ En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et en donner une interprétation concrète.

3°) La dérivée de la fonction f représente le rythme de croissance de la population de cette ville (exprimé en milliers d'habitants par an).

a/ Calculer le rythme de croissance en 1990 pour cette ville.

b/ Calculer le rythme de croissance que l'on peut prévoir en 2010.

c/ Déterminer à quel moment le rythme de croissance sera égal à 0,125 milliers (ou 125 habitants, de plus par an).

40

Après l'apparition d'une maladie virale, les responsables de la santé publique ont estimé que le nombre de personnes frappées par la maladie au jour t à partir du jour d'apparition du premier cas est $M(t) = 45t^2 - t^3$ pour $t \in [0;25]$.
La vitesse de propagation de la maladie est assimilée à la dérivée du nombre de personnes malades en fonction de t.

a/ Calculer $M'(t)$.
En déduire la vitesse de propagation le cinquième jour.
b/ Déterminer le jour où la vitesse de propagation est maximale et calculer cette vitesse.
c/ Déterminer les jours où la vitesse de propagation est supérieure à 600 personnes par jour.

41

Dans l'un des ateliers d'une usine, on fabrique des commodes en bois en style oriental. Toute la production mensuelle est vendue au même donneur d'ordre. L'usine ne peut fabriquer plus de 80 commodes par mois. Le coût total (en DT) résultant de la fabrication de q commodes est donné pour $q \in [0; 80]$ par $Cq = 0{,}02q^3 - 2{,}1q^2 + 74q + 80$
Chaque commode fabriquée est vendue au donneur d'ordre 38 DT.

1°) On assimile le coût marginal $C_m(q)$ à la dérivée du coût total

a/ Exprimer le coût marginal en onction de q.
Calculer $C'(50)$. Comparer le résultat à C (51) – C (50) et à C (50) –C (49).
L'approximation faite pour q proche de 50 est-elle valable?

b/ Déterminer la quantité a qui minimise le coût marginal.
En déduire que le coût marginal garde un signe constant.
Que peut-on alors conclure pour la fonction de coût total?

2°) On rappelle que le coût moyen est donné par

$$C_M(q) = \frac{C(q)}{q} \text{ pour } q \in [0; 8].$$

On se propose de rechercher le nombre de commodes à fabriquer afin de minimiser le coût moyen.

a/ Exprimer le coût moyen en fonction de q.
Calculer le coût moyen pour la quantité a qui minimise le coût marginal.

b/ Trouver la quantité b telle que le coût moyen est minimal et donner la valeur $C_M(b)$. Calculer alors le coût marginal $C'(b)$.
Comparer ces deux coûts, à un Dinars près.

3°) **a/** Exprimer la recette mensuelle R(q) réalisée par la fabrication et la vente de q commodes.

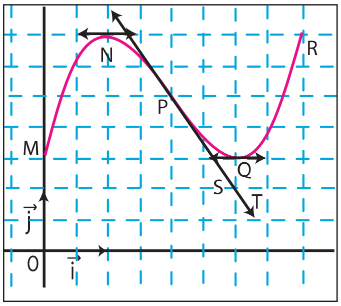
b/ Montrer que la fonction de bénéfice est donnée par $B(q) = -0{,}02q^3 + 2{,}1q^2 - 36q - 80$.

c/ Trouver le nombre minimum de commodes à fabriquer afin de réaliser un bénéfice (fonction bénéfice positive).

d/ Calculer la dérivée de la fonction bénéfice. Déterminer la quantité q_0 qui maximise le bénéfice. Donner alors le montant de ce bénéfice.

42

Soit f la fonction définie et dérivable surl'intervalle [0 ; 4] dont la représentation graphique, dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, est la courbe C ci-dessous.



Les points M, N, P, Q et R appartiennent à C.
Les coordonnées de M sont $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, , celles de N sont $\left(1, \frac{7}{2}\right)$, , celles de P sont $\left(2, \frac{5}{2}\right)$,celles de Q sont $\left(3, \frac{3}{2}\right)$ et celles de R sont $\left(4, \frac{7}{2}\right)$.
.
La courbe C admet en chacun des points Net Q une tangente parallèle à l'axe des abscisses.La droite Δ est tangente à la courbe C au point P ; elle passe par le point S de coordonnées (3 ;1).

1°) **a/** Donner $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.
b/ Déterminer une équation de la droite D.

2°) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$ sur l'intervalle [0 ; 4].

3°) f est la dérivée d'une fonction F définie sur l'intervalle [0 ; 4]. Donner le sens de variation de F.

UTILISATION DES EXTREMUMS :

L'étude d'une fonction à valeurs réelles comporte en particulier la détermination de ses extremums. C'est là un des objets du calcul différentiel classique lorsque la source de cette fonction est un espace numérique ; c'est l'objet de ce qu'Euler a appelé le calcul des variations lorsque cette source est un espace fonctionnel.

On rencontre déjà dans la plus haute antiquité des problèmes d'une telle nature. La légende ne veut-elle pas que Didon, lorsqu'elle fonda Carthage, ait délimité la plus grande étendue qu'elle pût circonscrire à l'aide de lanières découpées dans la peau d'un taureau ? Et il est bien connu que les Grecs caractérisaient un segment de droite comme la ligne de plus petite longueur joignant ses extrémités.

Ce n'est cependant qu'au XVIIIe siècle, à la suite de l'essor du calcul infinitésimal, qu'Euler et Lagrange établirent les fondements du calcul des variations et donnèrent une première condition d'extremum. Cette équation d'Euler-Lagrange allait jouer un rôle très important, surtout en physique, où elle justifiait les principes variationnels : principe de Fermat pour la propagation de la lumière dans les milieux différemment réfringents; principes de moindre action de Maupertuis et Hamilton pour la détermination des mouvements en mécanique analytique.

La recherche de conditions d'extremum se poursuivit aux XVIIIe et XIXe siècles, notamment avec les travaux de Legendre, Jacobi et Weierstrass, pour aboutir au début du XXe siècle à une théorie bien élaborée que l'on situe aujourd'hui dans le cadre ducalcul différentiel au sens de Fréchet dans les espaces de Banach. Mais de difficilesproblèmes relatifs àl'existence de ces extremums restent encore ouverts.

Plus récemment, les travaux de Morse relancèrent l'intérêt porté au calcul des variations. Utilisant à la fois des techniques d'analyse fonctionnelle, de topologie algébrique et de topologie différentielle, ils sont à l'origine de ce qu'on appelle maintenant l'analyse différentielle globale, une des théories carrefours de la mathématique actuelle.

L'imagination est plus importante que la connaissance

ALBERT EINSTEIN

EXEMPLES D'ETUDES DE FONCTIONS

Chapitre 11

- **Pour commencer**

- **Cours**

I -Exemples d'études de fonctions du type : $x \mapsto ax^2 + bx+c$

II -Exemples d'études de fonctions du type : $x \mapsto ax^3+bx^2+cx+d$

III-Exemples d'études de fonctions du type : $x \mapsto ax^4 + bx^2+c$

IV-Exemples d'études de fonctions du type : $x \mapsto \dfrac{ax + b}{cx + d}$

V -Exemples d'études de fonctions du type : $x \mapsto \dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$

VI - Exemples d'études de fonctions du type : $x \mapsto \sqrt{ax + b}$

- **Utilisation des T.I.C.**

- **Exercices et problèmes**

- **Math culture.**

Activité 1 :

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ |x-3|+1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Ecrire f(x) sans valeur absolue.
2°) Tracer la courbe (C).
3°) Résoudre dans IR, graphiquement puis par le calcul, l'inéquation :
$3f(x) - x > 0$.

Activité 2 :

Le barème des impôts sur le revenu d'un commerçant est défini de la façon suivante :
0 DT pour la tranche du revenu inférieur ou égale à 5 000 DT.
5% du revenu imposable pour la tranche du revenu comprise entre 5 000 DT et 20 000 DT.
10% pour la tranche du revenu supérieur ou égal à 20 000 DT.

1°) Calculer le montant des impôts sur un revenu de 8 000 DT puis sur un revenu de 30000 DT.
2°) **a/** Déterminer la fonction affine par intervalles donnant l' impôt I(x) en fonction du revenu x.
b/ Représenter cette fonction dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
c/ Lire graphiquement le montant de l'impôt pour un revenu de 12 000 DT.

Activité 3 :

A l'occasion d'une fête, deux boutiques qui vendent les mêmes articles ont offert à leurs clients des remises; ces derniéres sont décrites comme suit :

Remise de la boutique 1	Remise de la boutique 2
• 10 % si l'achat est au plus égal à 100 DT • 15 % si l'achat dépasse 100 DT	• 10 % si l'achat est au plus égal à 100 DT • Si l'achat dépasse 100 DT, la remise est de 10 % sur les premiers 100 DT et de 20 % sur le reste.

1°) Modéliser chaque situation par une fonction exprimant la somme à payer en fonction du prix fixé avant la remise, ce prix étant au plus égal à 500DT.
2°) Tracer dans un repère convenablement choisi, les courbes des deux fonctions ainsi définies.
3°) **a/** Que paye un client qui a acheté de la première boutique un article de 100DT ?
b/Que paye un client qui a acheté de la deuxième boutique un article de 100DT ?
4°) Même question pour un article de 170DT ?
5°) Une personne veut acheter un article de 400DT.
a/ Quel magasin offre la meilleure remise ?
b/ Calculer alors la somme qu'il payera.

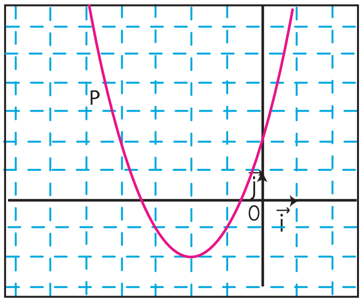
Activité 4 :

f désigne une fonction paire définie sur IR et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
A(1, 3) est un point de C.
Donner un autre point de C.

Activité 5 :

f désigne une fonction impaire définie sur IR et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
A(–5, 2) est un point de C.
Donner un autre point de C.

Activité 6 :



La parabole (P) ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f.

1°) Déterminer l'axe et le sommet de la parabole (P).

2°) Exprimer f(x) en fonction de x.

Activité 7 :

On donne dans repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$. les paraboles P : $y = 2x^2$ et P' : $y = 2(x-1)^2$

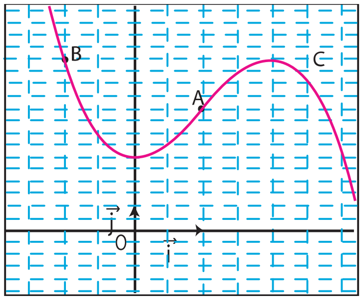
1°) **a/** Tracer la parabole P.

b/ En déduire la construction de la parabole P'

2°) **a/** Donner l'axe et le sommet de la parabole P.

b/ Donner l'axe et le sommet de la parabole P'.

Activité 8 :



La courbe (C) ci-contre est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur IR. On donne f'(1) = 3 et f'(–1) = –9

Construire les tangentes à la courbe (C) aux points A et B.

Activité 9 :

1°) Tracer dans un repère orthogonal les courbes P et H d'équations respectives

$$y = x^2 - 3 \quad \text{et} \quad y = -\frac{2}{x}$$

2°) Utiliser le graphique précédent pour résoudre l'équation $x^3 - 3x + 2 = 0$.

I – Exemples d'études de fonctions du type : $x \mapsto ax^2 + bx + c$

Activité 1 :

Soit la fonction définie sur IR par $f : x \mapsto 2x^2+3x-2$.
(C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Tracer la parabole (C). (On donnera son axe et son sommet).

2°) Déterminer les intersections de la courbe (C) avec les axes du repère.

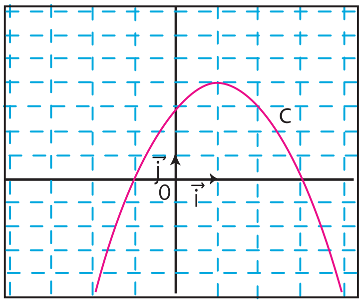
La représentation graphique, dans un repère orthogonal, de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ est la parabole d'axe la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ et de sommet $S(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$

3°) Construire dans le même repère les courbes représentatives des fonctions g, h et k définies sur IR respectivement par $g(x) = -f(x)$, $h(x) = |f(x)|$ et $k(x) = f(x)+3$

(On expliquera à chaque fois la construction)

Activité 2 :

La courbe (C) ci-contre est une parabole représentant une fonction f définie sur IR par : $f(x) = ax^2 +bx +c$
(où a est un réel non nul, b et c sont des réels donnés)



1°) Utiliser le graphique pour:

a/ Dresser le tableau des variations de f et déterminer l'axe de symétrie et le sommet de sa courbe (C).

b/ Retrouver les coefficients a, b et c.

2°) **a/** Calculer $f'(1)$.

b/ Que peut-on dire de la tangente à C au point d'abscisse 1.

Activité 3 :

Vérifier que la tangente à la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ en son sommet est horizontale.

Théorème :

La tangente à la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ en son sommet est horizontale.

Activité 4 :

Les fonctions d'offre O et de demande D d'un bien sont données par:
$O(q) = q^2 + 2q + 19$ et $D(q) = q^2-18q +113$ pour une quantité q variant de 1 à 8 tonnes.
O(q) et D(q) sont données en DT.

1°) **a/** Pour quelle quantité l'offre est de 54 DT ?

b/ Pour quelle quantité la demande est de 68 DT ?

2°) a/ Soient f et g deux fonctions définies sur IR par $f(x) = x^2 + 2x + 19$ et $g(x) = x^2 - 18x + 113$

b/ Déterminer le sens de variation des fonctions f et g sur $\mathbb{R}$, puis celui de leurs restrictions à $[1; 8]$.

c/ Représenter ces deux fonctions dans un même repère orthogonal bien choisi.

3°) a/ Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

b/ En déduire la quantité d'équilibre du marché offre-demande, puis le prix d'équilibre.

Activité 5 :

Une petite entreprise fabrique et vend des chaises.
Le coût de fabrication, en DT, de q chaises est donné par $C(q) = 0{,}1q^2 + 4q + 1000$.
Chaque chaise est vendue à 29 DT.

1°) Pour quels nombres de chaises fabriquées le coût est-il inférieur à 2 000 DT?

2°) a/Exprimer le bénéfice $B(q)$ en fonction de q.

b/ Pour quels nombres de chaises fabriquées et vendues le bénéfice est-il positif ou nul?

3°) Donner le tableau de variation de la fonction f définie par $f(x) = -0{,}1x^2 + 25x - 1000$.

En déduire le bénéfice maximal.

Activité 6 :

Un producteur de pommes peut récolter à ce jour 1200 kg et les vendre à1 DT le kg.
S'il attend, sa récolte augmentera de 60 kg par jour, mais le prix baissera de 0,02 DT par kg et par jour.

1°) Calculer son chiffre d'affaires dans chacun des cas suivants:

a/ s'il vend toute sa récolte tout de suite

b/ s'il attend un mois (30 jours) avant de la vendre.

2°) On suppose que ce producteur attend n jours (n est un entier variant de 0 à 50).

a/ Exprimer la quantité $P(n)$ de pommes en fonction du nombre de jours n.

b/ Exprimer le prix de vente $P(n)$ d'un kilogramme de pommes en fonction de n.

c/ En déduire le chiffre d'affaires $R(n)$ de ce producteur.

3°) Soit la fonction f définie par $f(x) = -1{,}2x^2 + 36x + 1200$

a/ Donner le tableau de variation de f.

b/ En déduire le jour n où ce producteur aura un chiffre d'affaires maximal.

II – Exemples d'études de fonctions du type $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^3 - 2x$. (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a/ Etudier les variations de f.

b/ Montrer que f est impaire. Que peut-on dire de la courbe (C) ?

c/ Etudier les branches infinies de (C)

2°) **a/** Donner l'équation de la tangente T_0 à la courbe (C) en O(0, 0).
b/ Vérifier que (C) traverse sa tangente T_0 en O.
3°) Tracer T_0 et (C).

Activité 2 :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^3 - 3x - 2$.
On désigne par C sa représentation graphique dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ et par A le point de coordonnées $(0, -2)$

1°) Donner le tableau de variation de f.
2°) Etudier les branches infinies de C.
3°) Tracer C.
4°) Soit M(x, y) un point de C.
a/ Déterminer les coordonnées du point M' symétrique de M par rapport à A.
b/ Vérifier que M' est un point de C.
c/ Que représente le point A pour la courbe C ?

Théorème admis :

Soit f la fonction définie sur un ensemble D et C sa représentation graphique dans un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.
Le point I(a, b) est un centre de symétrie de C si et seulement si : pour tout x de D on a

$$\begin{cases} 2a - x \in D \\ f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$$

Activité 3 :

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}$. (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) **a/** Montrer que $I\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$ est un centre de symétrie à la courbe (C).
b/ Donner l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point I.
2°) Soit g la restriction de f à $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$
a/ Etudier les variations de g.
b/ Préciser les extremums de g.
c/ Etudier la branche infinie de (C') représentation graphique de g.
3°) Tracer la droite T et la courbe (C').
4°) En déduire le tracé de (C).
5°) Vérifier, à l'aide du graphique, que l'équation (E) : $2x^3 - 9x^2 + 15 = 0$ admet dans IR trois solutions.

Activité 4 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0; 20] par $f(x) = -x^3 + 27x^2 - 96x - 200$.
On note C la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques :

– en abscisse 0,5 cm pour 1.
– en ordonnée 1cm pour 100.

1°) **a/** Déterminer la fonction dérivée f' de f et vérifier que, pour tout x de [0; 20], $f'(x) = -3(x - 2)(x - 16)$.

b/ Étudier sur l'intervalle [0; 20] le signe de $f'(x)$

c/ Dresser le tableau de variation de f.

d/ Tracer la représentation graphique de f dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

2°) Une entreprise fabrique des pièces. Les coûts de production journaliers se répartissent comme suit :

– les charges fixes s'élèvent à 200 DT

– les coûts de fabrication dépendent du nombre de pièces fabriquées. Pour une production journalière de q pièces (q entier supérieur ou égal à 8) ces coûts de fabrication s'élèvent à $(q^2 - 27q + 250)$ DT par pièce fabriquée.

a/ Déterminer le coût total journalier C (q), exprimé en DT, de production de q pièces.

b/ Chaque pièce est vendue 154 DT.

(i) Calculer le chiffre d'affaires total d'une journée.

(ii) Exprimer le bénéfice B (q) réalisé lors de la vente des q pièces produites dans une journée.

(iii) En utilisant les résultats de1°), déterminer le nombre de pièces que l'entreprise doit produire dans une journée pour réaliser un bénéfice maximal.

III – Exemples d'études de fonctions du type : $x \mapsto ax^4 + bx^2 + c$

Activité 1 :

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}$;(C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ et (C') la courbe représentative de sa restriction à $[0, +\infty[$.

1°) **a/** Vérifier que f est paire.

b/ Etudier les variations de f sur $[0, +\infty[$.

2°) **a/** Soit T la tangente au point d'abscisse 1. Vérifier que T a pour équation : $y = -x + \frac{5}{8}$

b/ On pose $h(x) = -x + \frac{5}{8}$.

Vérifier que $f(x) - h(x) = \frac{1}{8}(x-1)^3(x+3)$

c/ En déduire la position de (C') et T.

3°) Etudier la branche infinie de (C').

4°) Tracer (C') et T et en déduire le tracé de (C).

5°) Donner, graphiquement, une approximation des coordonnées des points intersection de la courbe (C) avec les axes du repère. Retrouver, par le calcul, ces coordonnées .

Activité 2 :

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^4 - 3x^2 - 1$; (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) **a/** Justifier que f est paire.

b/ Etudier les variations de f.

c/ Déterminer la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

d/ Etudier les branches infinies de (C) et tracer la.

2°) Soit g (x) = f (x +2).

Tracer (C') la courbe représentative de g.

3°) On considère la droite $\Delta : x = -2$.

Soit A(x, y) un point du plan et A' son symétrique par rapport à Δ.

a/ Vérifier que A' a pour coordonnées $(-4 - x, y)$.

b/ Montrer que si A est un point de (C') alors A' est un point de (C')

Théorème :

Soit f la fonction définie sur un ensemble D et C sa représentation graphique dans un repère orthogonale $(o, \vec{i}, \vec{j})$

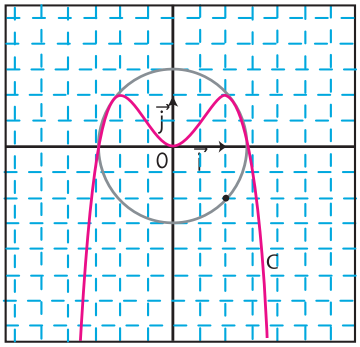
La droite $\Delta : x = a$ est un axe de symétrie de C si et seulement si : pour tout x de D on a

$$\begin{cases} 2a - x \in D \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

Activité 3 :

La courbe représentative (C) ci-contre, est celle d'une fonction polynôme bicarrée définie par :

$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ (où a est un réel non nul, b et c sont deux réels donnés).



1°) Utiliser le graphique pour :

a/ Dresser le tableau de variation de f et déterminer l'axe de symétrie de sa courbe (C).

b/ Déterminer les intersections de (C) avec les axes du repère.

2°) Trouver les coefficients a, b et c.

IV – Exemples d'études de fonctions du type : $x \mapsto \dfrac{ax + b}{cx + d}$

Activité 1 :

On désigne par $f : x \mapsto \dfrac{3}{x}$ et par H sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1°) Tracer H, on précisera ses asymptotes et son centre de symétrie.
2°) Soit $g : x \mapsto \dfrac{3-2x}{x}$ et H' sa représentation graphique dans le même repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

a/ Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.
b/ Vérifier que pour tout réel x non nul, $g(x) = f(x) - 2$.
c/ En déduire la construction de H' à partir de H.

Activité 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par : $f(x) = \dfrac{-3x + 2}{x+2}$

1°) Déterminer $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x)$. Interprétez graphiquement ces résultats.
2°) a/ Vérifier que pour tout réel $x \neq -2$, $f(x) = -3 + \dfrac{8}{x+2}$

b/Déterminer alors les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement ces résultats.
3°) a/ Calculer $f'(x)$, où f' est la fonction dérivée de f.
b/ Dresser le tableau de variation de f.
4°) Construire la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ainsi que ses deux asymptotes.

Activité 3 :

Soit les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{100}{x-5}$ et $g(x) = \dfrac{-x}{x-5}$ et H et H'respectivement leurs représentations graphiques dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a/ Vérifier que $I(5, 0)$ est une centre de symétrie de H.
b/ Etudier les variations de f sur $]5\ , +\infty[$.
c/ Tracer H.
2°) Etudier les variations de g et tracer sa courbe représentative H'.

3°) Pour un certain article, on a pu établir que sa demande est fonction de son prix p en DT et donnée par $D(p) = f(p) = \dfrac{100}{p-5}$.
On appelle élasticité de la demande par rapport au prix p le réel : $E(p) = p \times \dfrac{f'(p)}{f(p)}$
On admettra que ce réel, sans unité, indique le pourcentage de variation de la demande pour un accroissement de 1% d'un prix p donné.
a/ Vérifier que $E(p) = g(p)$.
b/ Calculer l'élasticité de la demande pour un prix donné de 9 DT.
c/ Pour quel prix p_0 une augmentation de 1% du prix conduit-elle à une diminution de 1,5% de la demande?

Activité 4 :

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{26x+10}{x+5}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité graphique : 0,25 cm sur l'axe des abscisses et 0,5cm sur l'axe des ordonnées).

1°) a/ Etudier les variations de f sur $[0, +\infty[$

b/ Donner l'équation de la demi-tangente T au point d'abscisse 0.

c/ Tracer T et C.

2°) La population d'une ville nouvelle est donnée par: $P(t) = \dfrac{26t+10}{t+5} = f(t)$ où t est le temps écoulé depuis début 2000 (exprimé en années) et P(t) est le nombre d'habitants (exprimé en milliers).

a/ Calculer la population de cette ville début 2005, puis début 2006.

b/ Que peut-on dire sur les variations de la population de cette ville ?

c/ (i) Calculer le rythme de croissance en 2005 pour cette ville.

(ii) Calculer le rythme de croissance que l'on peut prévoir en 2010.

(iii) Déterminer à quel moment le rythme de croissance sera inférieur ou égal à 0,125 milliers (ou 125 habitants, de plus par an).

> Si f modélise la population d'une ville, La dérivée de la fonction f modélise le rythme de croissance de cette population .

IV – Exemples d'étude de fonctions du type : $x \mapsto \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$

Activité 1 :

Soit la fonction f définie sur IR–{2} par : $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 2}$.

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Dresser le tableau de variations de f.

2°) a/ Vérifier que pour tout $x \in$ IR–{2}, $f(x) = x + 1 + \dfrac{3}{x-2}$

b/ Montrer que la courbe (C) admet deux asymptotes dont on précisera les équations.

3°) a/ Montrer que le point d'intersection I des deux asymptotes est un centre de symétrie de la courbe (C)

b/ Ecrire l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point A d'abscisse 1.

c/ Tracer la droite T et la courbe (C) dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Activité 2 :

Soit la fonction f définie sur IR–{3} par : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6x - 1}{3 - x}$.

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthogonal$(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a/ Ecrire f(x) sous la forme $ax + b + \dfrac{c}{3-x}$

b/Etudier les variations de f. Vérifier qu'elle n'a pas d'extremums.

2°) Montrer que la courbe (C) admet deux asymptotes dont une est oblique.

3°) a/ Montrer que le point d'intersection I des deux asymptotes est un centre de symétrie de la courbe (C)

b/ Tracer la courbe (C) dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

4°) a/ Résoudre dans IR, graphiquement, l'inéquation $f(x) + 2x < 0$.

b/Vérifier ce résultat par le calcul.

Activité 3 :

1°) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x + \dfrac{1600}{x}$

a/ Justifier le tableau de variation suivant :

x	0		40		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	80	$\nearrow$	$+\infty$

b/ Démontrer que la courbe représentative de g admet deux asymptotes, dont on précisera les équations.

c/ Tracer la courbe représentative de g sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On tracera les asymptotes. On prendra comme unité graphique sur chaque axe 1 cm pour représenter 10.

d/ Étant donné un réel quelconque p, discuter le nombre de solutions dans $]0, +\infty[$ de l'équation $g(x) = p$.

e/ Résoudre dans $]0, +\infty[$ l'équation $g(x) = 100$.

2°) g(x) modélise, en DT, le coût moyen unitaire de production d'un certain bien, en fonction de la quantité x produite. On appelle p le prix de vente unitaire (en DT) imposé par la concurrence et on admet que l'entreprise vend toute sa production.

Démontrer que la production ne peut pas être rentable si p est inférieur à 80.

3°) En fait, $p = 100$.

a/ Pour quelles quantités la production est-elle rentable?

b/ Exprimer en fonction de x le coût total de production, et, en déduire que le profit est : $h(x) = -x^2 + 100x - 1600$.

c/ Déterminer la quantité pour laquelle la production est la plus rentable.

V – Exemples d'études de fonctions du type : $x \mapsto \sqrt{ax+b}$

Activité 1 :

1°) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt{x}$. (C) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$

a/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter géométriquement le résultat.

b/ Etudier les variations de f. Préciser la branche infinie de sa courbe représentative.

c/ Ecrire l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point A d'abscisse 1.

2°) Tracer la droite T et la courbe (C) dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Activité 2 :

Soit la fonction f définie sur $[2, +\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x-2}$.

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 2. Interpréter géométriquement le résultat.

b/ Etudier les variations de f.

2°) a/ Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat graphiquement.

b/ Ecrire l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point A d'abscisse 3.

c/ Tracer la droite T et la courbe (C) dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

3°) a/ Tracer la courbe (P) d'équation $y = x^2 + 2$ et $x \geq 0$.

b/ Que peut-on conjecturer sur la relation entre (P) et (C) ?

c/ Prouver cette conjecture.

Activité 3 :

Soit la fonction f définie sur $]-\infty, 1]$ par $f(x)=\sqrt{3-3x}$.

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a/ Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1. Interpréter géométriquement le résultat.

b/ Etudier les variations de f.

2°) a/ Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat graphiquement.

b/ Ecrire l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point A d'abscisse 0.

c/ Tracer la droite T et la courbe (C) dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

3°) a/ Tracer la droite (D) d' équation: $y = -\sqrt{3}\,x + \sqrt{3}$

b/ Résoudre, graphiquement puis par le calcul, l'inéquation $\sqrt{1-x} > 1 - x$ dans IR.

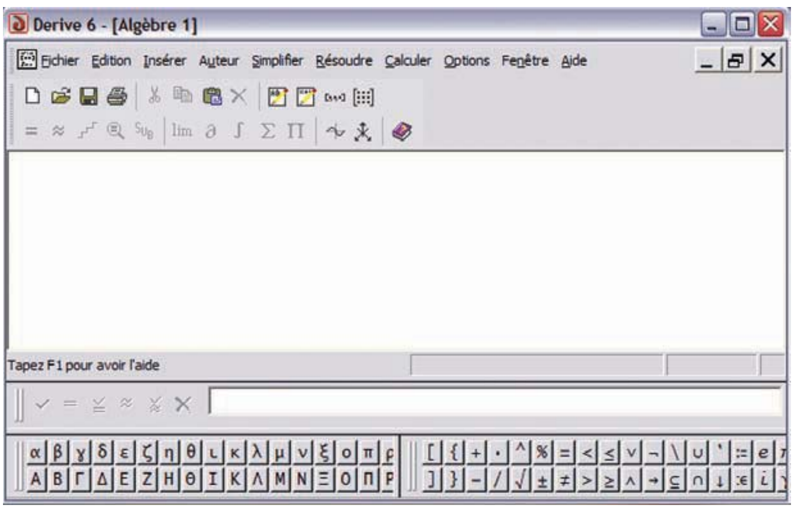
Le choix de production optimale :

Soient

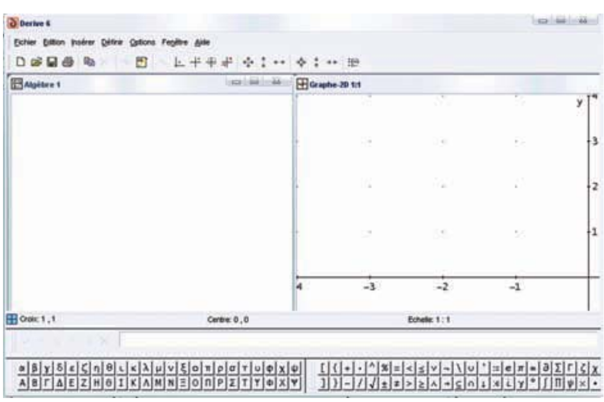
* q la quantité de biens produits par une entreprise.
* $C(q) = \frac{1}{30} q^3 - 5q^2 + 250q + 200$ son cout total de production.
* p le prix de vente unitaire de bien.
* Le profit réalisé est donné par B(q) = p(q)–C(q).

L'entreprise prend le prix comme donné soit p = 250
Elle cherche le niveau de production qui rend son profit maximum.

Ouvrir le logiciel derive en cliquant sur



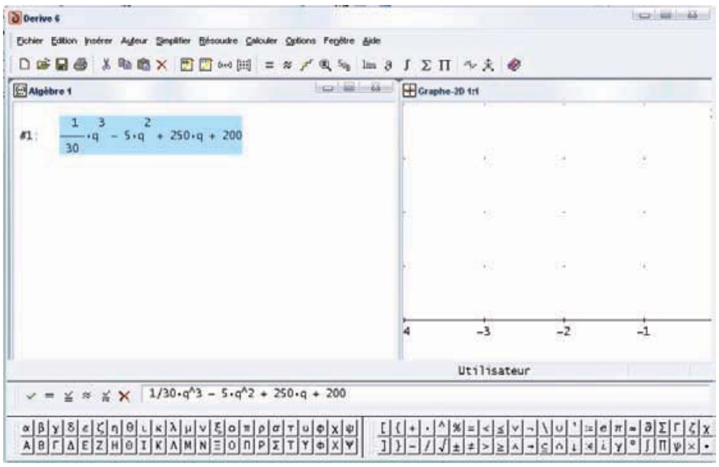
Mettre en niveau inferieur la feuille de calcul obtenu en cliquant sur puis sur la fenêtre graphe 2-D de construction en cliquant sur , puis aligner les deux fenêtre en agissant sur leurs bordures on obtient :



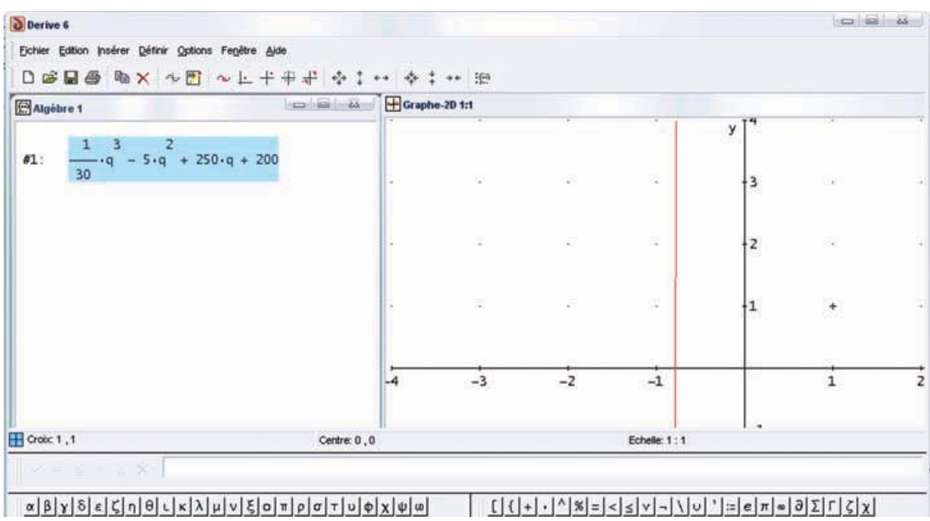
Pour se déplacer d'une fenêtre à une autre en clique sur :

-  fenêtre graphe 2D
-  fenêtre calcul.

Dans la barre de calcul en bas éditer l'expression de C(q) et valider en obtient :



Pour construire la courbe de C on se place dans la fenêtre graphe 2D et en clique sur  on obtient :

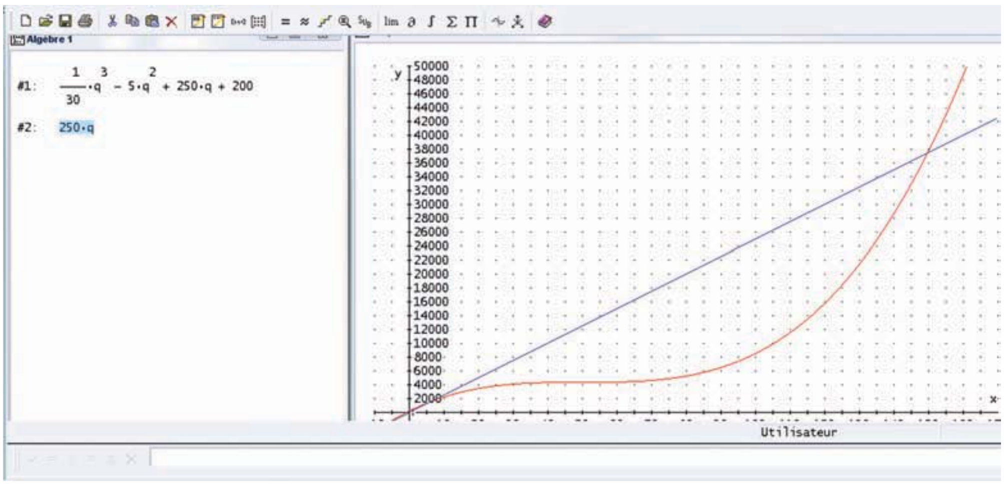


Pour régler la graduation : on clique dans la barre de menu sur :

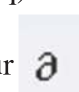
Définir/Zone de tracer/maximum/minimum

Et en complète comme suit :

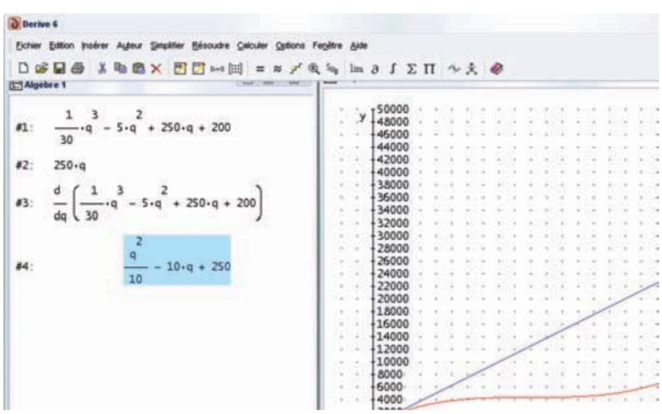
Dans la barre de calcul en introduit la fonction recette : 250q et en valide puis en la construit on obtient :



On veut déterminer le cout marginal de production Cm(q) = C'(q)

Pour cela on sélectionne la fonction cout et on clique sur  et on rempli comme suit :

Puis cliquer **simplifier** en obtient :



259

$Cm(q) = \frac{q^2}{10} - 10q + 250$

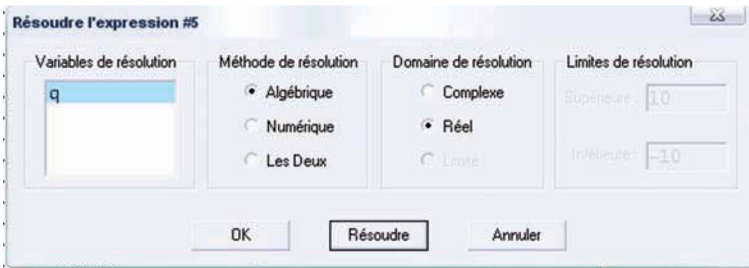
Vérifier à la main que le profit est maximal lorsque Cm(q) = p = 250

On va résoudre Cm(q) = 250

Dans la barre de calcul introduire $\frac{q^2}{10} - 10q + 250 = 250$ et valider puis sélectionner

L'expression $\frac{q^2}{10} - 10q + 250 = 250$ et cliquer sur  (résoudre l'expression)

On obtient :



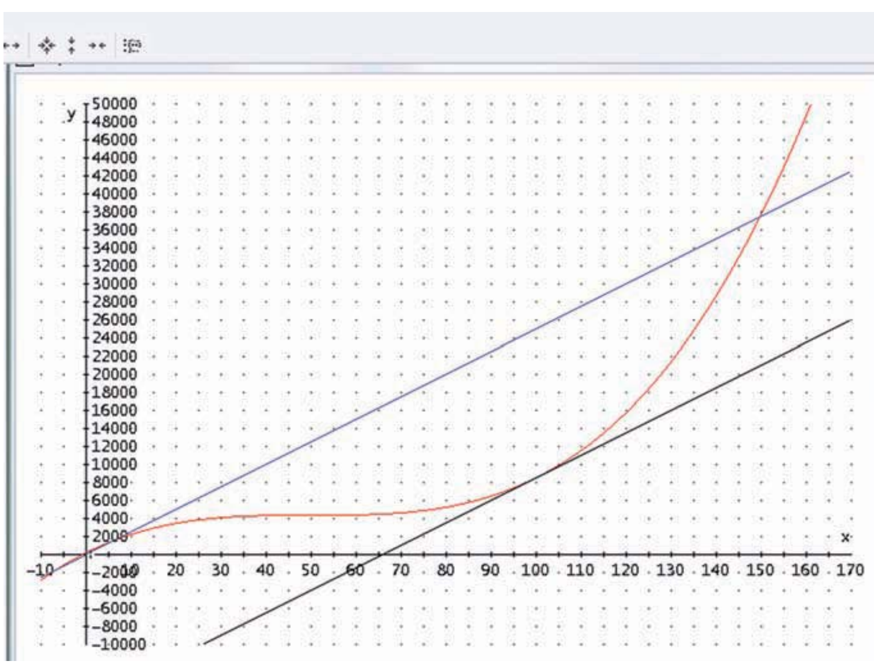
Puis cliquer sur Résoudre on aura les solutions 0 ou 100.

Pour déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 100, on écrit dans la barre de calcul : TANGENT$(\frac{1}{30}q^3 - 5q^2 + 250q + 200, q, 100)$ puis on valide.

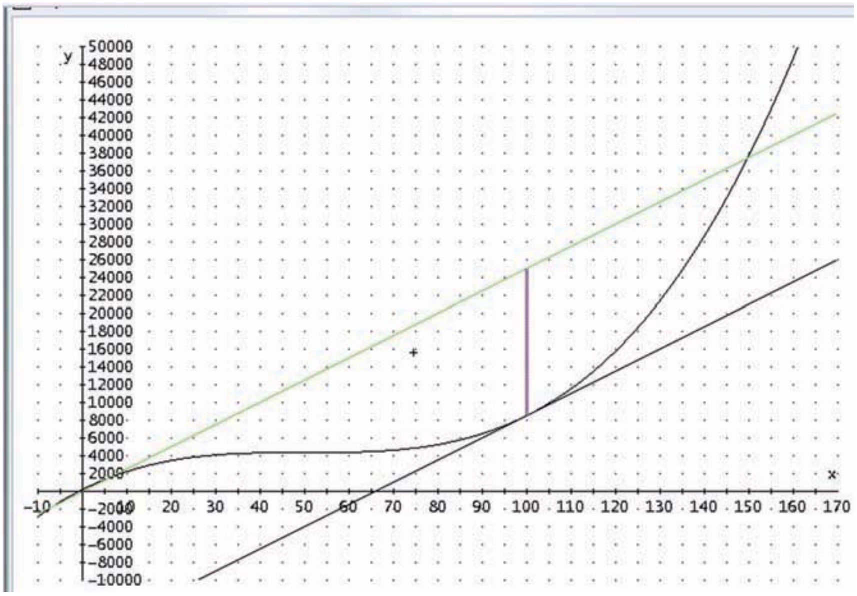
On sélectionne l'expression TANGENT $(\frac{1}{30}q^3 - 5q^2 + 250q + 200, q, 100)$ puis cliquer sur simplifier =

On obtient l'équation $y = \frac{50(150q-988)}{3}$ puis on représente cette tangente.

On aura :



On voit bien que le profit est maximal pour une quantité de 100 unités.



1

1°) Soit la fonction affine :

$f: x \mapsto 2x - \sqrt{3}$.

a/ Tracer sa courbe représentative (D) dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

b/ Tracer dans le même repère la courbe (γ) de la fonction $u : x \mapsto |f(x)|$

(On décrira l'obtention de (γ) à partir de (D))

2°) Soit la fonction affine

$g: x \mapsto -3x + 4\sqrt{3}$. Tracer sa courbe représentative (D') dans le même repère.

3°) On définit sur IR la fonction h par :

$$\begin{cases} f(x) & \text{si } x < \sqrt{3} \\ g(x) & \text{si } x \geq \sqrt{3} \end{cases}$$

a/ Tracer sa courbe représentative (C) dans le même repère.

b/ En déduire ses variations sur IR.

c/ Etudier la continuité et la dérivabilité de h en $\sqrt{3}$

4°) Hachurer la région du plan formée par les points de coordonnées (x,y) vérifiant :

$x \in IR$ et $y \geq Sup(2x - \sqrt{3}, -3x + 4\sqrt{3})$

2

Deux villes A et B sont distantes de 15 km. Un piéton part de A à 10 heures en direction de la ville B à la vitesse de 6 km/h, il se repose pendant 10 mn tous les 3km. On désigne par f(t) la distance parcourue par le piéton après un temps t.

1°) Préciser les valeurs entre lesquelles peut varier t.

2°) Expliciter f(t).

3°) Construire la courbe (C) de f dans un repère orthogonal.

4°) A quelle distance de la ville A se trouve le piéton à 10h 45 mn ?.

5°) Quel est le temps nécessaire pour que le piéton parcoure 11km ?

3

On considère les fonctions f et g définies sur IR par :

$f(x) = x^3 - 3x - 3$ et $g(x) = |2x - 3|$ (C) et (C') leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthogonal.

1°) Tracer, dans le même repère, la parabole (C) et la courbe (C').

2°) Déterminer, graphiquement, les points d'intersection des courbes (C) et (C')

3°) Retrouver, par le calcul, (C)∩(C').

4°) Hachurer la région du plan formée par les points de coordonnées (x, y) tels que $x \in IR$ et

$$x^3 - 3x - 3 \leq y < |2x - 3|$$

4

On considère la fonction f définie sur IR par :

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 - 2x + 1$$

(C) la courbe représentative dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) **a/** Déterminer l'axe de symétrie D et le sommet S de la parabole (C) puis tracer la.

2°) Tracer avec une autre couleur la courbe (C') de la fonction g définie sur IR par : $f(x) = \frac{1}{2} x^2 - 2x + 1$ puis dresser le tableau de variations de g .

3°) Montrer que la droite Δ est un axe de symétrie de la courbe (C').

4°) Déterminer, graphiquement, les extremums de g.

5°) Colorier l'ensemble des points M(x,y) du plan tels que $x \in IR$ et $\begin{matrix} y \leq x - 1 \\ 2y - x^2 + 4x - 2 \geq 0 \end{matrix}$

5

Soit la fonction $f : x \mapsto x^3 - 4 + 2$On désigne par (C) sa courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Résoudre dans IR l'équation : f(x) = 0.

2°) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$.

3°) **a/** Justifier que f est une fonction paire.

b/ Dresser le tableau de variation de f.

c/ Construire la courbe (C).

4°) Soit $\alpha \in]0,+\infty[- \{2\}$.On désigne par A et B les points de (C) d'abscisses respectives α et −α.

T_1 et T_2 les tangentes à (C) en A et B

Montrer que T_1 et T_2 se coupent en un point de l'axe $(O,\vec{j})$

6

Des démographes ont établi que le nombre d'habitants d'une ville dans x années est modélisé par la fonction P définie sur [1990, 2020] par

$P(x) = (x-1990)^2 - 40(x-1990) + 25000$

1°) Quelle est actuellement la population de la ville ?

2°) Quel est le nombre d'habitants de la ville dans 10 ans ?

3°) Dresser le tableau de variation de P.

4°) Après combien d'années la population de la ville sera-t-elle minimale ?

7

Le cout total de fonctionnement journalier d'une entreprise en DT est modélisé par :

$C(x) = x^2 + 40x + 2800$

où x désigne le nombre d'articles vendus par jour ($0 < x < 120$).

1°) Calculer C(0), C(20), C(40), C(80), C(100) et C(120).

2°) Déterminer la fonction dérivée C' de C.

3°) Dresser le tableau de variation de la fonction C.

4°) Représenter graphiquement C dans un repère orthogonal on prendra 1cm pour 10 en abscisse et 1 cm pour 1000 en ordonnée.

5°) Sachant que la recette totale de l'entreprise est modélisée par : $R(x) = 150x$

Représenter graphiquement la fonction R.

6°) A l'aide du graphique, déterminer la zone de rentabilité.

8

Une entreprise veut étudier et déterminer le prix en DT d'un nouvel appareil photographique jetable avant sa commercialisation.

On note x le prix unitaire de cet appareil. L'offre pour ce produit est donnée par : $10x + 36$

La demande pour cet appareil est donnée par :

$-x^2 + 30x + 17$

1°) Calculer l'offre et la demande pour un prix de 10 DT.

2°) On considère la fonction f définie sur l'intervalle [5; 20] par : $f(x) = 10x + 36$

Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, représenter graphiquement la fonction f.

Unités graphiques : en abscisse : 2,5 cm pour 5 et en ordonnée : 5 cm pour 100.

3°) On considère la fonction g définie sur l'intervalle [5 ; 20] par : $g(x) = -x^2 + 30x + 17$

a/ Calculer g'(x) où g' est la fonction dérivée de g.

b/ Déterminer la valeur de x pour laquelle $g'(x) = 0$

c/ Étudier le signe de g'(x) sur l'intervalle [5; 20]. En déduire le tableau de variation de la fonction g.

d/ Représenter graphiquement dans le repère utilisé précédemment la fonction g.

4°) Détermination du prix d'équilibre :

a/ Résoudre algébriquement sur l'intervalle [5 ; 20] l'équation: $f(x) = g(x)$

b/ Interpréter graphiquement la solution de cette équation.

Ce nombre correspond au prix d'équilibre entre l'offre et la demande.

5°) L'entreprise décide de prendre pour prix unitaire de l'appareil, la valeur de x pour laquelle la demande est maximale. Donner cette valeur.

9

Soit la fonction f définie par :

$f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x - 2$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a/ Dresser le tableau de variations de f.

b/ Montrer que (C) admet le point $I(\frac{3}{2}, -\frac{13}{2})$ comme centre de symétrie

Construire (C).

2°) Soit la fonction g définie par :

$g(x) = -2|x|^3 + 9x^2 - 12|x| - 2$.

a/ Montrer que g est paire.

b/ Déduire de (C), la courbe représentative (C') de la fonction g.

c/ Soit l'équation (E) :

$2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| + 1 + a = 0$ ($a \in IR$)

Déterminer graphiquement, les valeurs de a pour lesquelles l'équation (E) admet exactement quatre solutions distinctes.

10

1°) Tracer, dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C) de la fonction f définie sur [0,5] par : $f(x) = 2x^3 - 6x$.

2°) Une entreprise estime que le revenu mensuel pour les 5 années à venir, à compter d'aujourd'hui exprimé en millions de dinars, d'un produit est décrit par: $R(t) = 2(t^3 - 3t)$ où t désigne le nombre d'années.

a/ Que peut-on dire du revenu de l'entreprise dans la première année ?

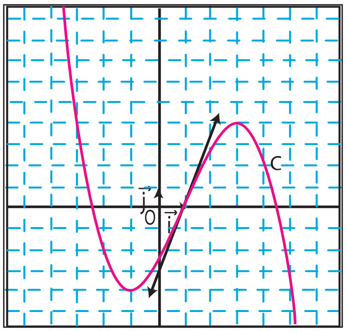
Peut-on donner une explication ?

b/ Quel est le taux de croissance du revenu entre 0 et 3 ans ?

c/ A partir de quelle année l'entreprise ne sera plus déficitaire dans la fabrication de ce produit ?

12

La courbe représentative (C) ci-dessous est celle d'une fonction polynôme du troisième degré définie par :
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (où a, b, c et d sont quatre réels donnés).



1°) Utiliser le graphique pour dresser le tableau de variation de f et déterminer le centre de symétrie de(C).
2°) Déterminer les coefficients a, b, c et d.
3°) Déterminer l'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

13

Une étude des coûts d'une entreprise a montré que la fonction coût est donnée par :
$C(q) = aq^3 + bq^2 + cq + d$ où q est la quantité produite et a, b, c, d des réels.
1°) Déterminer a, b, c, d sachant que :
$C(0) = 120$; $C(1) = 245$; $C(2) = 340$; $C(3) = 435$.
2°) Étudier la fonction C et construisez sa courbe représentative sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
3°) Déterminer la fonction coût marginal C'
Etudier cette fonction C' et construire sa courbe représentative sur $[0 ; +\infty[$.
4°) Le produit est vendu 105 DT l'unité Déterminez la fonction bénéfice B. quelle est la quantité qui procure le bénéfice maximal ?Etudier et représenter graphiquement la fonction B.

14

Une entreprise fabrique des objets. Chaque jour, elle produit un nombre x d'objets, x étant compris entre 0 et 70.
Le coût, exprimé en DT, de la production jour-nalière de x objets, est donné par:$f(x) = x^3 - 90x^2 + 2700x$.
I- Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0; 70] par $f(x) = x^3 - 90x^2 + 2700x$.
1°) a/ Déterminer la fonction dérivée f' de f et vérifier que, pour tout x de [10; 70], $f'(x) = 3(x - 30)^2$.
b/ Dresser le tableau de variation de f.
2°) Le plan est muni d'un repère orthogonal dont les unités graphiques sont :
* en abscisse 1 cm pour 5
* en ordonnée 1 cm pour 5000
On note C la courbe représentative de f.
a/ Construire les tangentes à la courbe C en ses points d'abscisses 0 et 30.
b/ Tracer la courbe C.
II- On suppose que toute la production est vendue au prix de 900 DT l'unité. Le chiffre d'affaires journalier, exprimé en DT, est donné par $g(x) = 900x$.
1°) a/ Calculer g (60).
b/ Tracer dans le repère utilisé précédemment la représentation graphique de la fonction g définie sur l'intervalle [0; 70] par $g(x) = 900x$.
2°) Le bénéfice journalier total h (x) est égal à $g(x) - f(x)$.

a/ Déterminer graphiquement les solutions sur l'intervalle [0; 70] de l'équation h (x) = 0.

b/ Déterminer graphiquement le signe de h (x). A quel intervalle doit appartenir x pour que l'entreprise dégage un bénéfice?

c/ Déterminer graphiquement le nombre d'objets que l'entreprise doit produire dans une journée pour réaliser le bénéfice maximum.

15

1°) Construire dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ la parabole (P) d'équation $y = -x^2 + 1$.

2°) Soit I le point du plan de coordonnées (0, 3) et M le point de la parabole (P) d'abscisse x. On note $f(x) = IM^2$.

a/ Montrer que pour tout $x \in IR$, $f(x) = x^4 + 5x^2 + 4$.

b/ Construire, dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction f.

c/ Déterminer la position de M sur (P) pour que la distance IM soit minimale.

16

On considère les deux fonctions f et g définies sur IR par: $f(x) = x^4 - 2x^2$ et $g(x) = (x-1)^2 - 1$. On désigne par (C) et (C') les courbes respectives des fonctions f et g dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Construire les courbes (C) et (C').

2°) Déterminer les points d'intersection des deux courbes (C) et (C').

3°) Résoudre, graphiquement, l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

4°) Résoudre, graphiquement, dans IRx IR l'inéquation $(y - f(x))(y - g(x)) \leq 0$.

17

1°) Construire dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la parabole (P) d'équation

$y = x^2 + 1$ et l'hyperbole (H) d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

2°) En déduire, graphiquement, que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une seule solution a appartenant à l'intervalle]0 , 1[.

3°) Résoudre, dans IR, l'inéquation : $f(x) > g(x)$.

18

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = (x+1)^2 \text{ et } g(x) = \frac{1}{x+1}.$$

On note (C) et (C') leurs courbes respectives dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Tracer les courbes (C) et (C').

2°) Résoudre, graphiquement, dans IR l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

3°) Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x) = (x+1)\,|x+1|$.

Utiliser (C) pour construire la courbe représentative de h.

4°) Soit la fonction k définie par :

$$k(x) = \begin{cases} \sup(g(x), h(x)) \text{ si } x\ ]-\infty, -1[\\ \inf(g(x), h(x)) \text{ si } x\ ]-1, +\infty[\end{cases}$$

a/ Tracer la courbe (C") de k dans le même repère.

b/ Déduire le tableau de variation de k.

19

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x+4}{x+1}$.

On désigne par (H) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Tracer la courbe (H) de la fonction f.

2°) Soit (P) la parabole d'équation $y = -x^2 + 4$.

a/ Tracer la parabole (P).

b/ Montrer que (H) et (P) ont trois points communs dont-on précisera les coordonnées.

3°) Soit la fonction g définie par $g(x) = \sup(f(x), -x^2 + 4)$

a/ Dresser le tableau de variation de g.

b/ Discuter, suivant les valeurs du réel a, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = a$.

20

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-1} \text{ si } x \in]-\infty, 0[\cup [2, +\infty[\\ x^2 - x + 1 \text{ si } x \in [0, 2[\end{cases}$$

1°) **a/** Montrer que f est dérivable en 0.

b/ Ecrire une équation de la tangente à la courbe (C) de f au point d'abscisse 0.

2°) Etudier la dérivabilité de f en 2.

3°) Dresser le tableau de variation de f.

4°) **a/** Préciser l'asymptote de (C).

b/ Construire la courbe (C).

21

1°) Le prix d'un article est de 150 DT. Ce prix subit une majoration au taux de 25 pour 100, puis une minoration au taux inconnu y pour 100, sur le prix majoré.
Calculer y sachant que le prix de l'article est à nouveau 150 F.

2°) En Plus généralement, un prix P, en DT, a subi une majoration au taux de x pour 100, puis une minoration sur le prix majoré au taux de y pour 100. Il est alors revenu à sa valeur initiale P.
En donnant le détail du calcul, montrer que :

$$y = \frac{100x}{x+100}$$

3°) Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0; 100]

par : $f(x) = \dfrac{100x}{x+100}$

On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 2mm.

a/ Déterminer la fonction dérivée f' de f et dresser le tableau de variation de f.

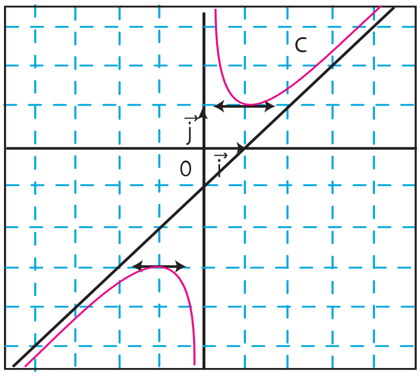
b/ Construire la tangente à la courbe C en son point d'abscisse 0.

c/ Tracer la courbe C.

4°) A l'aide du graphique, déterminer une valeur approchée du taux x pour le quel on a : $y = \frac{2}{3}x$.

22

On donne, ci-dessous, la courbe représentative (C) d'une fonction f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.



1°) a/ Déterminer, graphiquement les limites de f en 0^+, 0^-, $-\infty$ et en $+\infty$

b/ Préciser les asymptotes de (C).

c/ Dresser le tableau de variation de f.

d/ Déterminer, graphiquement, le nombre de solutions de l'équations f(x) = x.

2°) On suppose que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x}$ où a, b et c sont trois réels.

Déterminer les trois réels a, b et c.

3°) Soit la fonction g définie par : $g(x) = f(|x|)$.

a/ Déduire de (C) la courbe représentative (C') de g.

b/ Déterminer, graphiquement, le nombre de solutions de l'équation $x^2 + 1 = 3|x|$.

23

1°) Construire dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative (C) de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{3-x}{x}$.

2°) Soient A et B les points de (C) d'abscisses respectives 1 et 3. Trouver une équation cartésienne de la droite (AB).

3°) Une parallèle quelconque à l'axe (y'Oy) coupe la courbe (C) au point M et coupe la droite (AB) en N. On désigne par P le milieu du segment [MN].

Montrer que les coordonnées x et y du point P vérifient la relation : $y = \dfrac{-x^2+2x+3}{2x}$.

4°) Soit la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{-x^2+2x+3}{2x}$.

On désigne par (C') la courbe représentative de g.

a/ Montrer que la droite $\Delta : y = -\frac{1}{2}x + 1$ est une asymptote de la courbe (C').Quelle est l'autre asymptote de (C')?

b/ Construire la courbe (C') sur le même repère que la courbe (C).

5°) Déterminer les coordonnées des points P de (C') distinct de A tel que le triangle AMN soit isocèle de sommet principal A.

24

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) a/ Vérifier que, pour tout $x \in IR-\{2\}$,

on a : $f(x) = x + \dfrac{4}{x - 2}$.

b/ Préciser les asymptotes de (C).

c/ Montrer que le point I(2 , 2) est un centre de symétrie de (C).

2°) a/ Dresser le tableau de variation de f.

b/ Construire (C).

3°) Soit la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{x^2}{|x| - 2}$.

a/ Montrer que g est paire.

b/ Vérifier que, pour tout $x \in IR_+ - \{2\}$, on a : $g(x) = f(x) + 2$.

c/ Déduire de (C) la courbe représentative (C') de g.

25

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 5x & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{x^2 - 5x + 8}{x - 1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Montrer que f est dérivable en 2.

2°) Dresser le tableau de variation de f.

3°) Montrer que la droite $\Delta : y = x - 4$ est une asymptote de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

4°) a/ Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 2.

b/ Construire la tangente T et la courbe (C

26

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un

un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

.

1°) a/ Montrer que la droite $\Delta : y = x - 3$ est une asymptote de (C).

b/ Préciser l'autre asymptote de (C).

2°) a/ Dresser le tableau de variation de f.

b/ Construire (C).

3°) Soit la fonction g définie par : $g(x) = 4 + \dfrac{x^2}{1 - |x|}$.

a/ Montrer que g est paire.

b/ Vérifier que, pour tout $x \in IR_+ - \{1\}$, on a : $g(x) = - f(x)$.

c/ Construire alors la courbe représentative de g.

27

On donne les deux fonctions f et g définies par :

$f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$ et $g(x) = x^2 - 3x - 3$.

On désigne par (C) et (C') les courbes respectives des fonctions f et g dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1°) a/ Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x \in IR-\{1\}$, on a $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 1}$.

b/ Etudier les variations de f.

c/ Construire (C).

2°) a/ Déterminer les points d'intersection des deux courbes (C) et (C').

b/ Montrer que les deux courbes (C) et (C') ont la même tangente T au point d'abscisse 0.

c/ Tracer la tangente T et la courbe (C') dans le même repère que celui de (C).

d/ Résoudre, graphiquement, l'inéquation :

$$\frac{1}{x - 1} \geq \frac{x^2 - 3x - 3}{x^2 + 3}.$$

28

Dans l'impression d'un livre on doit respecter sur chaque page des marges de 2cm à gauche et à droite, de 3cm en haut et en bas. On désigne par x la mesure, en cm, de la largeur d'une page entière et par y la mesure de sa hauteur. L'aire totale de la page étant de 600 cm^2.

1°) Exprimer la hauteur y de la page en fonction de x.

2°) Montrer que l'aire A(x) de la surface imprimable est donnée par la relation : $A(x) = 624 - 6x - \dfrac{2400}{x}$

3°) Quelles doivent être les dimensions d'une page du livre pour que : $A(x) = 352\ cm^2$.

29

Soit la fonction f définie sur IR–{1} par :

$f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x-1}$.

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Ecrire f(x) sous la forme $ax + b + \frac{c}{x-1}$

2°) a/ Montrer que la courbe (C) admet deux asymptotes dont une est oblique.

b/ Montrer que le point d'intersection I des deux asymptotes est un centre de symétrie de (C).

3°) a/ Etudier les variations de f.

b/ Tracer la courbe (C) dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

30

Soit la fonction f définie sur IR– {-1} par :

$f(x) = \frac{2x^2+3x}{x+1}$.

(C) est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Ecrire f(x) sous la forme : $ax + b + \frac{c}{x+1}$

2°) a/ Déterminer les asymptotes de la courbe (C) .

b/ Montrer que le point d'intersection I des deux asymptotes est un centre de symétrie de (C)

3°) a/ Etudier les variations de f.

b/ Tracer la courbe (C) dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

c/ Comment obtenir, à partir de (C) les courbes représentatives des fonctions g, h et k définies par $g(x) = |f(x)|$, $h(x) = f(|x|)$ et $k(x) = -1+f(x-1)$? Tracer ces courbes.

31

Le service de gestion d'une entreprise a établi que le coût annuel C de son stock, exprimé en DT, est donné, en fonction du nombre annuel q de commandes, par :

$C(q) = 5q + \frac{980}{q}$ (q compris entre 2 et 20)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [2; 20] par : $f(x) = 5x + \frac{980}{x}$

1°) Déterminer la fonction dérivée f ' de la fonction f.

2°) Pour tout x de l'intervalle [2; 20], étudier le signe de f '(x).

En déduire le tableau de variation de f.

3°).Indiquer la valeur minimale prise par f(x) pour x appartenant à l'intervalle [2; 20].

4°) Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, tracer la courbe représentative de f. Unités graphiques : en abscisse 0,5cm. en ordonnée 1 cm pour 50.

5°).Indiquer le nombre annuel de commandes qui permet à l'entreprise d'avoir un coût de stock annuel minimal.

32

Soit la fonction f définie sur]0 ; +∞[par : $x \mapsto x + \frac{100}{x}$

1°) Déterminer la fonction dérivée f ' de la fonction f.

2°) Étudier les variations de f. En déduire que f admet un minimum pour une valeur de x que l'on précisera. Quelle est la valeur de ce minimum?

3°) Application:

On considère deux nombres strictement positifs x et y tels que $xy = 100$.

a/ Exprimer en fonction de x seul la somme $S = x + y$.

b/ Montrer que S est minimale pour deux nombres x et y que l'on précisera.

4°) On considère maintenant deux nombres strictement négatifs x et y tels que : $xy = 100$. En utilisant les résultats précédents que peut on dire de leur somme $S = x + y$?

33

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]1, +∞[par

$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal d'unité graphique 1cm.

1°) Déterminer la fonction dérivée f ' de f et vérifier que, pour tout x de]1, +∞[, $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

2°) Pour tout x de]1, +∞[étudier le signe de f '(x) et établir le tableau de variation de f.

3°)a/ Construire les tangentes à la courbe C en ses points d'abscisses : $\frac{3}{2}$; 0 ; 5

b/ Tracer l'arc de la courbe C obtenu pour $\frac{3}{2} < x < 5$.

34

I- Soit f la fonction définie sur l'intervalle [5; 160] par :

$f(x) = x - 20 + \frac{400}{x}$

Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 0,1cm.

1°) Déterminer la fonction dérivée f 'de f et étudier le signe de f ' (x). Établir le tableau de variation de f.

2°) Calculer les ordonnées des points de la courbe C d'abscisses respectives : 5; 10; 20; 40; 50; 80; 100; 160.

3°) Tracer la courbe C.

II- Une entreprise fabrique durant une période donnée une quantité x d'un certain objet. Le coût de fabrication, pour ces x objets est donné, en DT, par :

$C(x) = x^2 - 20x + 400$ où $5 < x < 160$.

1°) Le coût unitaire moyen noté $c_m(x)$ est défini par:

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Déterminer, en utilisant les résultats de **I-**, le nombre x d'objets à fabriquer pour avoir un coût unitaire moyen minimal.

2°) Chaque objet est vendu 100 DT.

a/ Déterminer le bénéfice B(x) de cette entreprise en fonction de x.

b/ Déterminer la quantité d'objets à fabriquer pour obtenir un bénéfice maximum.

35

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{9 - 2x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) **a/** Déterminer l'ensemble de définition D de f.

b/ Etudier la dérivabilité de f à gauche en $\frac{9}{2}$.

c/ Construire la courbe (C).

2°) Soit le point A des coordonnées (4, 0) et M le point de (C) d'abscisse x ($x \in D$).

On pose $g(x) = AM = |x - 5|$.

Préciser l'ensemble de définition de g.

3°) On désigne par (C') la courbe représentative de la fonction g.

a/ Déterminer $(C) \cap (C')$.

b/ Montrer que (C') est la tangente à (C) au point A.

36

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 \text{ si } x \;]-\infty, 1] \\ \sqrt{x-1} \quad \text{ si } x \; [1, +\infty[\end{cases}$$

1°) **a/** Etudier la dérivabilité de f en 1.

2°) Construire la courbe représentative (C) de f dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

3°) Soit la fonction g définie par : $g(x) = |f(x)|$

a/ Déduire de (C) la courbe représentative (C') de g.

b/ Dresser le tableau de variation de g.

4°) Résoudre, graphiquement, l'équation $g(x) = -x - 1$.

37

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 2\sqrt{x}$ dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

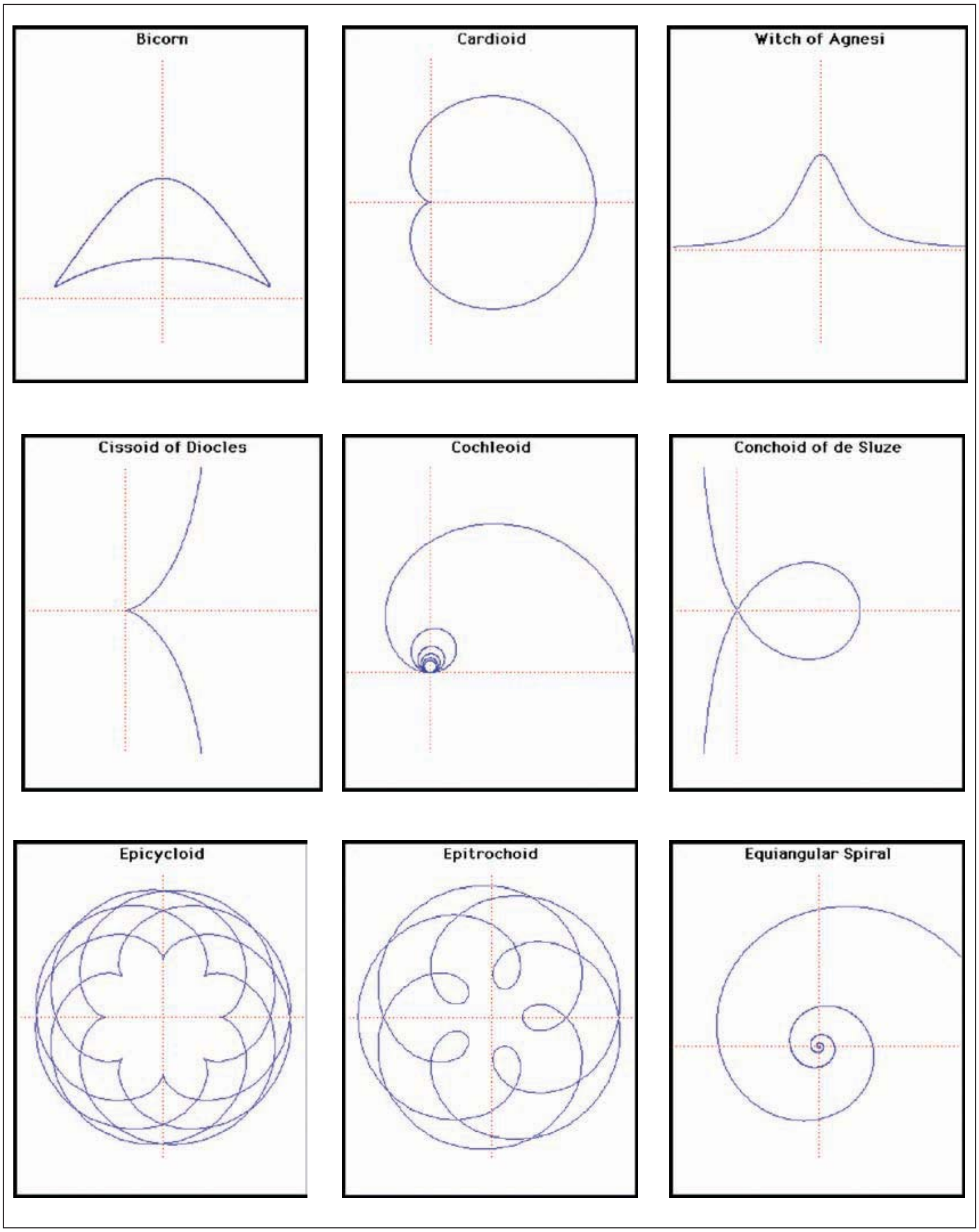
Soit A le point de (C) de coordonnées (1, 2) .

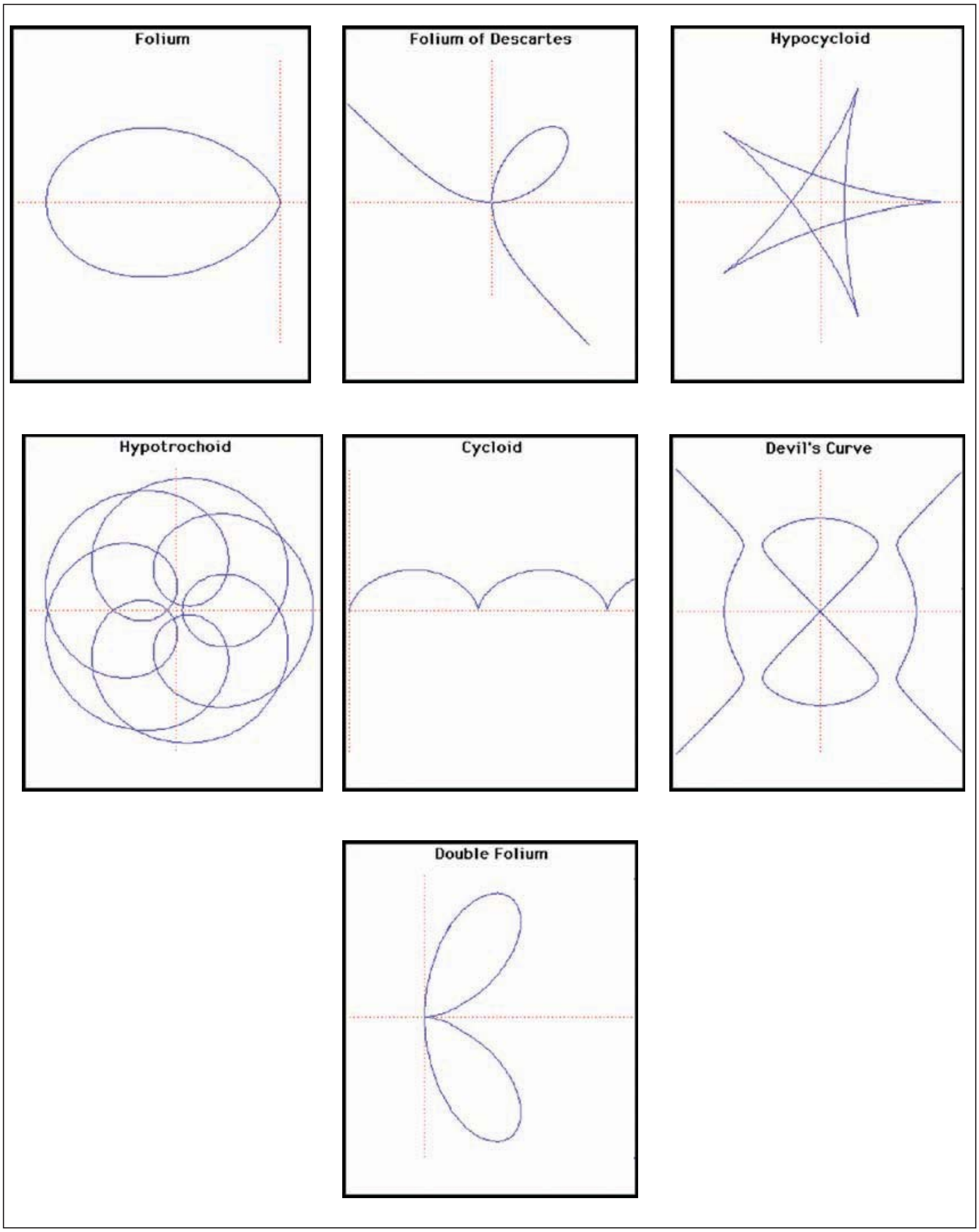
A tout réel $x > 0$ et différent de 1, on associe le point M de (C) d'abscisse x et on désigne par m(x) le coefficient directeur de la droite (A M).

1°) Expliciter m(x).

2°) Calculer $\lim_{x \to +\infty} m(x)$. Interpréter ce résultat.

EXEMPLES DE COURBES CONNUES




Folium
Folium of Descartes
Hypocycloid
Hypotrochoid
Cycloid
Devil's Curve
Double Folium

Je crois fermement à l'astrologie, mais rarement aux astrologues.

MAX JACOB

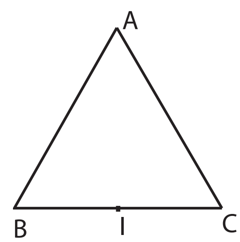
Chapitre 12

FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

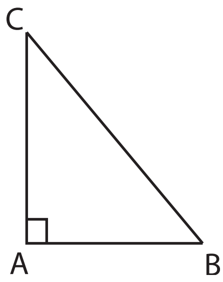
- **Cours**

- **Utilisation des T.I.C.**
- **Exercices et problèmes**
- **Math culture.**

Activité 1 :

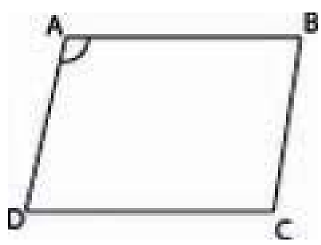


1°) Dans la figure ci-contre ABC est un triangle équilatéral et I est le milieu de [BC].
Donner la mesure de chacun des angles $\widehat{ABC}$; $\widehat{IAC}$; $\widehat{BIC}$.



2°) Dans la figure ci-contre ABC est un triangle rectangle isocèle en A.
Donner la mesure de chacun de ses angles.

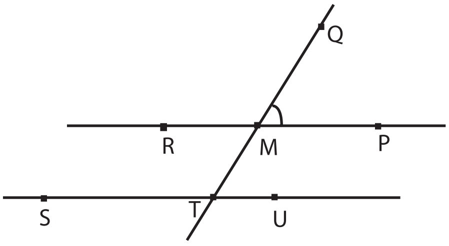
Activité 2 :



Dans la figure ci-contre ABCD est un parallélogramme et $\widehat{BAD} = 75^0$
Donner la mesure de chacun des angles du parallélogramme .

Activité 3 :

Dans la figure ci-contre les droites (ST) et (MP) sont parallèles et $\widehat{PMQ} = 55^0$
Donner la mesure de chacun des angles : $\widehat{RMT}$; $\widehat{MTU}$; $\widehat{STM}$.



Activité 4 :

On considère un triangle MNP rectangle en M et tel que PN=2 et $\widehat{MNP} = 30^0$.

Donner les valeurs exactes de MP et de cos $(\widehat{MPN})$.

Donner une valeur approchée de $\sin(\widehat{MPN})$.

I– Mesure d' un angle en radians

Activité 1 :

On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.

Soit A, B, C et D des points de $\mathscr{C}$ tels que [AD] est un diamètre, $\widehat{AOC} = 30^0$ et $\widehat{BOC} = 60^0$.

1°) Déterminer la valeur exacte du périmètre de $\mathscr{C}$.

2°) Déterminer la valeur exacte de la longueur de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ contenant A, puis de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ ne contenant pas A.

Définition

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon1, A et B deux points de $\mathscr{C}$.

On appelle mesure en radian de l'angle $\widehat{AOB}$, la longueur du petit arc $\overset{\frown}{AB}$.

Conséquence :

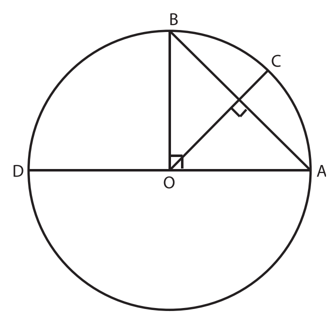
Un angle plat mesure 180 degrés ou mesure π radians.

Un angle droit mesure 90 degrés ou mesure $\frac{\pi}{2}$ radians.

Activité 2 :

Dans la figure ci-contre, on a représenté un cercle de centre O, passant par les points A, B, C et D tels que (OA) ⊥ (OB) et (OC) ⊥ (AB).

Donner la mesure en radians des angles $\widehat{AOD}$, $\widehat{DOB}$, $\widehat{AOC}$, et $\widehat{COD}$.



Activité 3 : **Proportionnalité**

Dans le tableau ci-dessous, on a donné les mesures en degré ou en radian d'angles.

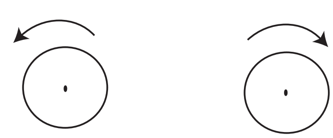
Mesure en degré	45		75			105	150
Mesure en radian		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$		

Trouver les mesures manquantes.

II– Arcs orientés

Orientation d'un cercle

On admet qu'il n'y a que deux orientations possibles sur un cercle donné.Orienter un cercle, c'est choisir l'une des deux orientations.Nous conviendrons qu'un cercle est orienté dans le sens direct s'il est orienté dans le sens contraire des aiguilles d'une montre et qu'il est orienté dans le sens indirect s'il est orienté dans le sens des aiguilles d'une montre.

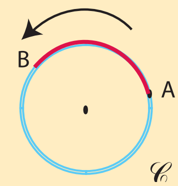


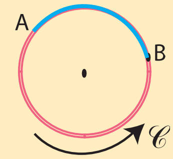
cercle oriente dans le sens direct   cercle oriente dans le sens indirect

Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1, orienté dans le sens direct.

Définition

Soit un couple (A,B) de points distincts d'un cercle orienté $\mathscr{C}$.
Alors, il y a deux arcs de cercle d'origine A et d'extrémité B.
Un et un seul de ces arcs est orienté conformément à l'orientation du cercle.On l'appelle l'arc orienté d'origine A et d'extrémité B et on le note $\overset{\curvearrowright}{AB}$





On convient que le couple (A, A) détermine un arc orienté dont l'origine et l'extrémité sont confondues. On le note $\overset{\curvearrowright}{AA}$

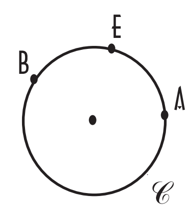
Vocabulaire

Tout arc orienté $\overset{\curvearrowright}{AB}$ détermine un unique arc géométrique appelé arc géométrique associé à $\overset{\curvearrowright}{AB}$

Mesure algébrique d'un arc orienté

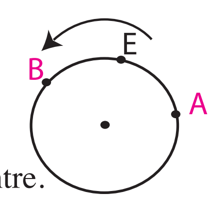
Activité 1 :

Soit A , B et E trois points distincts appartenant à un cercle $\mathscr{C}$ de rayon 1.
On désigne par L la longueur de l'arc géométrique d'extrémités A et B qui contient E.

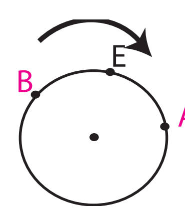


On considère un point mobile M qui se déplace sur le cercle $\mathscr{C}$.
On convient que la mesure algébrique x du trajet parcouru est égale à :
La longueur du trajet parcouru, si M se déplace dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.
L'opposé de la longueur du trajet parcouru, si M se déplace dans le sens des aiguilles d'une montre.

1°) On suppose que M se déplace dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.
Déterminer x dans chacun des cas ci-dessous.
Le mobile M s'arrête en B dès son premier passage par B.
Le mobile M s'arrête en B, à son deuxième passage par B.
Le mobile M s'arrête en B, à son $k^{\text{ième}}$ passage par B ($k \geq 1$).



2°) On suppose que M se déplace dans le sens des aiguilles d'une montre.
Déterminer x dans chacun des cas ci-dessous.
Le mobile M s'arrête en B dès son premier passage par B.
Le mobile M s'arrête en B, à son deuxième passage par B



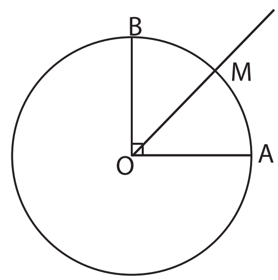
Le mobile M s'arrête en B, à son $k^{ième}$ passage par B.
L'activité précédente nous a permis de constater que pour aller de A et arriver à B, le mobile M peut faire k tours complets sur le cercle avant de s'arrêter en B. Il est donc légitime de donner la définition ci-dessous.

Définition

Soit $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique, (A,B) un couple de points distincts de $\mathscr{C}$ et L la longueur de l'arc géométrique associé à $\overset{\frown}{AB}$.
On appelle mesure algébrique de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ et on note mes $\overset{\frown}{AB}$ tout réel de la forme $L + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
mes $\overset{\frown}{AA} = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Activité 1 :

Dans la figure ci contre $\mathscr{C}$ est un cercle orienté de centre O et de rayon 1 et A et B sont deux points tel que $\widehat{AOB} = 90°$ [OM) désigne la bissectrice de [OA, OB]



1°) Donner une mesure de $\overset{\frown}{AM}$
2°) Donner la mesure de $\overset{\frown}{AM}$ qui appartient à $[0, 2\pi]$
3°) Soit x et y deux mesures de $\overset{\frown}{AM}$. Vérifier que $x = y + 2k\pi$, ou k est un élément de $\mathbb{Z}$

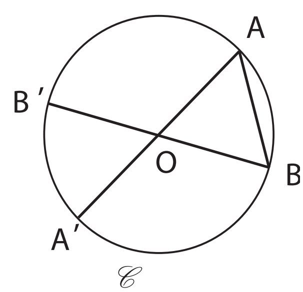
Théorème:

Etant donné un cercle orienté $\mathscr{C}$ de rayon 1.
Tout arc orienté de $\mathscr{C}$ possède une unique mesure dans $[0, 2\pi[$, qui est la longueur de l'arc géométrique associé.
Si x et y sont deux mesures d'un même arc orienté, alors $x = y + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Notation:
si x et y sont deux mesure d'une même arc orienté on note $x \equiv y\ (2\pi)$ et on lit :x est congru à y module 2π .

Activité 2 :

Dans la figure ci-contre, $\mathscr{C}$ est un cercle trigonométrique de centre O, OAB est un triangle équilatéral.
Les points A' et B' sont les symétriques respectifs des points A et B par rapport à O.



1°) Déterminer pour chacun des arcs orientés $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AA'}$, $\overset{\frown}{AB'}$, la mesure qui appartient à $[0, 2\pi[$.
2°) Soit K le point de $\mathscr{C}$ tel que mes $\overset{\frown}{AK} = \dfrac{13\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Donner la mesure de $\overset{\frown}{AK}$ qui appartient à$[0, 2\pi[$.

Activité 3 :

Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique, M et N deux points de $\mathscr{C}$ et α une mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{MN}$

Trouver, dans chacun des cas suivants, la mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{MN}$ qui appartient à$[0, 2\pi[$

a/ $\alpha = \frac{185\pi}{4}$; **b/** $\alpha = \frac{-228\pi}{2}$; **c/** $\alpha = \frac{2006\pi}{3}$

Activité 4 :

Soit $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique et (A,B) un couple de points de $\mathscr{C}$ tels que :

mes $\overset{\frown}{AB} \equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi]$.

1°) Faire une figure.

2°) **a/** Placer sur $\mathscr{C}$ le point D tel que mes $\overset{\frown}{BD} \equiv \frac{\pi}{3} \; [2\pi]$.

b/ comparer mes $\overset{\frown}{AB}$ + mes $\overset{\frown}{BD}$ et mes $\overset{\frown}{AD}$

3°) Placer sur $\mathscr{C}$ le point D' tel que mes $\overset{\frown}{AD'} \equiv \frac{\pi}{6} \; [2\pi]$.

comparer mes $\overset{\frown}{AB}$ + mes $\overset{\frown}{BD'}$ et mes $\overset{\frown}{AD'}$

Propriétés

Pour tous points A , B et C d'un cercle $\mathscr{C}$ orienté de rayon 1, on a :
mes $\overset{\frown}{AB}$ + mes $\overset{\frown}{BC}$ = mes $\overset{\frown}{AC}$ $+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (Relation de Chasles).

mes $\overset{\frown}{AB}$ = $-$ mes $\overset{\frown}{BA}$ $+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Activité 5 :

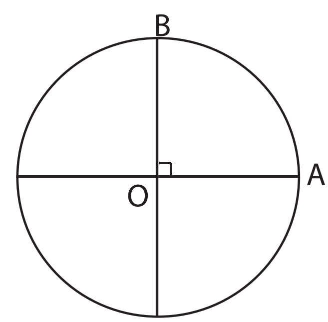
Dans la figure ci-contre on a représenté le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 et les points A et B du cercle $\mathscr{C}$ tels que OA = OB = 1 et mes $\overset{\frown}{AB} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

1°) Placer les points M de $\mathscr{C}$ dans chacun des cas suivants

a/ mes $\overset{\frown}{AM} = \frac{13\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$;

b/ mes $\overset{\frown}{AM} = \frac{17\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

c/ mes $\overset{\frown}{AM} = \frac{25\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$



2°) Déterminer les coordonnées des points M dans le repère

$(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ dans chacun des cas ci-dessus.

Définition

On dit qu'un repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ du plan est orthonormé direct si OA = OB = 1 et

mes $\widehat{AB} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Théorème (admis) :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.
A tout réel x, on peut associer un unique point M de $\mathscr{C}$ tel que mes $\widehat{AM} = x$
Si $x = y + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ alors les points de $\mathscr{C}$ associés aux réels x et à y sont confondus.

Activité 6 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.
On désigne par M et N les points du cercle $\mathscr{C}$ tels que les triangles OAM et OAN sont équilatéraux.
On désigne par C et C' les points du cercle $\mathscr{C}$ diamétralement opposés respectivement aux points A et B.
1°) Déterminer pour chacun des arcs orientés $\widehat{AM}$, $\widehat{AN}$, $\widehat{AC}$, et $\widehat{AC'}$ la mesure qui appartient à $[0, 2\pi]$.
2°) Déterminer les coordonnées de chacun des points M, N, C et C' dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

III- Cosinus, sinus et tangente d'un réel :

Consinus et sinus d'un réel

Activité 1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.
1°) Construire dans chacun des cas suivants le point M du cercle $\mathscr{C}$.

mes $\widehat{AM} = \frac{\pi}{3}$; mes $\widehat{AM} = -\frac{\pi}{6}$; mes $\widehat{AM} = \frac{\pi}{3}$; mes $\widehat{AM} = \frac{3\pi}{4}$; mes $\widehat{AM} = -\frac{13\pi}{4}$

mes $\widehat{AM} = -\frac{25\pi}{6}$; mes $\widehat{AM} = \frac{26\pi}{4}$; mes $\widehat{AM} = \frac{13\pi}{2}$

2°) Déterminer, dans chacun des cas ci-dessus, les coordonnées du point M dans le repére $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Définitions

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$
Soit θ un réel et M le point du cercle trigonométrique tel que mes $\widehat{AM} \equiv \theta \left[2\pi\right]$.

On appelle cosinus de θ , et on note $\cos\theta$, l'abscisse de M dans le repère orthonormé direct : $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

On appelle sinus de θ , et on note $\sin\theta$, l'ordonnée de M dans le repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

Sachant que pour tout entier k, on peut associer un unique point M aux réels θ et $\theta + 2k\pi$ – on en déduit que :

Pour tout entier k et tout réel θ , $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$ et $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$

Activité 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et et $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.

1°) Construire dans chacun des cas suivants le point M du cercle $\mathscr{C}$.

mes $\widehat{AM} = \frac{\pi}{3}$; mes $\widehat{AM} = \frac{\pi}{6}$; mes $\widehat{AM} = \frac{\pi}{4}$; mes $\widehat{AM}$ $\frac{\pi}{2}$; mes $\widehat{AM} = \pi$; mes $\widehat{AM} = \frac{2\pi}{3}$

mes $\widehat{AM} = \frac{4\pi}{3}$; mes $\widehat{AM} = \frac{5\pi}{3}$; mes $\widehat{AM} = \frac{5\pi}{6}$; mes $\widehat{AM} = \frac{3\pi}{4}$; mes $\widehat{AM} = \frac{5\pi}{4}$; mes $\widehat{AM} = \frac{7\pi}{4}$.

2°) Déterminer, dans chacun des cas ci-dessus, les coordonnées du point M dans le repère . $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

3°) Compléter le tableau suivant.

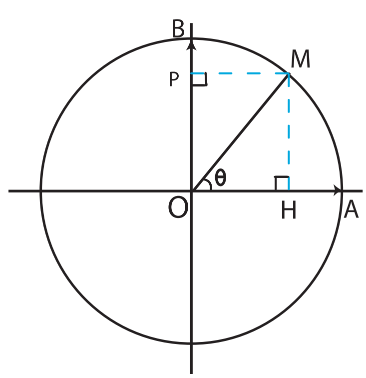
α en radians	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
$\cos\alpha$												
$\sin\alpha$												

Activité 3 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O.
En utilisant la figure ci-contre, établir les propriétés suivantes.
Pour tout réel θ , on a

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin\theta \leq 1$$



Activité 4 :

En utilisant la figure de l'activité 3 déterminer
$\cos(-\theta)$; $\sin(\pi-\theta)$; $\cos(\pi+\theta)$; $\cos(\pi-\theta)$; $\sin(\pi+\theta)$; $\sin(\pi-\theta)$
en fonction de $\cos\theta$ ou en fonction de $\sin\theta$

Activité 5 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$
on considère l'hexagone régulier de côté 1, inscrit dans le cercle trigonométrique de centre O.

Calculer le cosinus et le sinus de chacun des réels. $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{6}$

Activité 6 :

Utiliser la calculatrice (en mode radians) pour trouver une valeur approchée à 10^{-1} près, du cosinus et sinus de chacun des réels 2; 3 ; -1,5; 12 ; 4 ; 0,2 et –0,4.

Tangente de réel

Activité 1 :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$. $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O

1°) placer le point B de $\mathscr{C}$ telque $\text{mes}\,\widehat{IB} = \frac{\pi}{2}$

placer le point B' de $\mathscr{C}$ telque telque $\text{mes}\,\widehat{IB'} = \frac{3\pi}{2}$

2°) Vérifier que pour tout point M de $\mathscr{C}$ différent de B et différent de B' $\text{mes}\,\widehat{IM} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

3°) soit θ une mesure de $\widehat{IM}$, verifier que $\cos\theta \neq 0$

Définitions

Pour tout réel θ tel que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

On appelle tangente θ le réel noté $\tan\theta$ ou $\text{tg}\,\theta$ défini par $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

Activité 2 :

Determiner les tangentes des réels suivants : $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{6}$; π ; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$

Activité 3 :

Pour tout réel θ tel que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
Vérifier les égalitées suivantes :

- $\tan(\theta+\pi) = \tan(\theta)$
- $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$
- $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

III– Fonctions Cosinus et sinus :

Définitions

La fonction sinus est la fonction qui au réel x associe le réel sinx et on la note .
sin : $x \mapsto \sin x$.
La fonction cosinus est la fonction qui au réel x associe le réel cosx et on la note
cos : $x \mapsto \cos x$.

Activité 1 :

1°)Vérifier que la fonction sinus est impaire.
Donner une interprétation graphique.
2°) Vérifier que la fonction cosinus est paire.
Donner une interprétation graphique.
3°)Vérifier que pour tout réel x on a :$\cos(x + 2\pi)=\cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
On dit que les fonctions sinus et cosinus sont périodique de période 2π .

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et T un réel strictement positif.
On dit que f est périodique dont une période est T si et seulement si, $\forall \in D$ on a :
$x + T \in D$ et $f(x +T) = f(x)$

Théorème

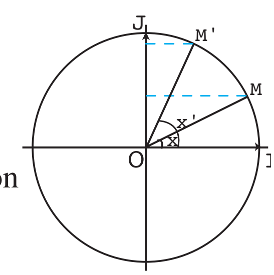
La fonction sinus est une fonction impaire.
La fonction cosinus est une fonction paire.
Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques et de période 2π
Les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus se déduisent à partir de celles de la restriction de chacune de ces fonctions à un intervalle de longueur une période 2π , par translations de vecteur $2k\pi\vec{i}$, où k est un entier.

Conséquence

Soit a un réel.
Les fonctions, $x \mapsto \sin(x + a)$ et $x \mapsto \cos(x + a)$ sont périodiques, de période 2π.

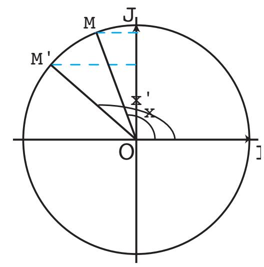
Activité 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.
On désigne par M et M' des points du cercle trigonométrique, et on note x et x' les mesures respectifs (en radians) des angles $\widehat{IOM}$ et $\widehat{IOM'}$.



1°) Dans la figure ci-contre, $0 \leq x < x' \leq \dfrac{\pi}{2}$.

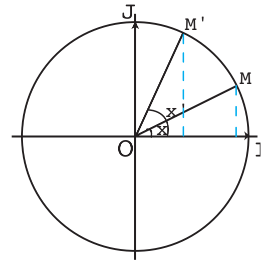
Comparer sin x et sin x' et en déduire le sens de variation de la fonction sinus sur l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$



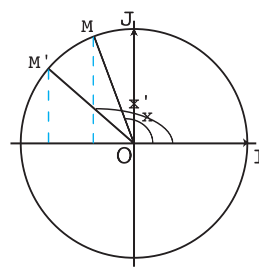
2°) Dans la figure ci-contre, $\frac{\pi}{2} \leq x < x' \leq \pi$.
Comparer sin x et sin x' et en déduire le sens de variation de la fonction sinus sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

3°) **a/** Tracer le Tableau de variations de la fonction sinus sur $[0,\pi]$.
b/ Représenter graphiquement la fonction sinus sur $[0,\pi]$.
c/ Déduire la représentation graphique de la fonction sinus sur $[-\pi,\pi]$ puis sur $[-\pi,3\pi]$.

Activité 3 :



Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.
On désigne par M et M' des points du cercle trigonométrique, et on note x et x' les mesures respectifs (en radians) des angles $\widehat{OIM}$ et $\widehat{OIM'}$.
1°) Dans la figure ci-contre, $0 \leq x < x' \leq \frac{\pi}{2}$.
Comparer cos x et cos x' et en déduire le sens de variation de la fonction cosinus sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



2°) Dans la figure ci - contre $\frac{\pi}{2} \leq x < x' \leq \pi$.
Comparer cos x et cos x' et en déduire le sens de variation de la fonction cosinus sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

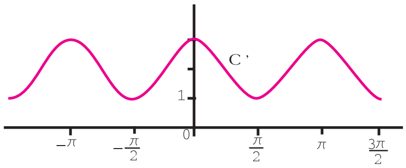
3°) **a/** tracer le Tableau de variations de la fonction cosinus sur $[0,\pi]$.
b/ Représenter graphiquement la fonction cosinus sur $[0,\pi]$.
c/ Déduire la représentation graphique de la fonction cosinus $[-\pi,\pi]$ puis sur $[-\pi,3\pi]$.

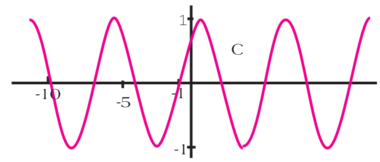
Activité 4 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par C, C_1 et C_2 les courbes respectivement représentatives des fonctions $x \mapsto \sin x$; $x \mapsto |\sin x|$ et $x \mapsto \sin|x|$.
1°) Tracer la courbe C.
2°) Déduire les courbes C_1 et C_2 à partir de la courbe C. Expliquer à chaque fois le procédé de construction.

Activité 5 :

Soient f et g les fonctions suivantes $f : x \mapsto \cos x + 2$ et $g : x \mapsto \sin(x + 1)$
1°) **a/** Expliquer comment on peut tracer la courbe représentative de f à partir de la courbe représentative de la fonction cosinus.
b/ Expliquer comment on peut tracer la courbe représentative de g à partir de la courbe représentative de la fonction sinus.
2°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a représenté les courbes C et C', représentatives des fonctions f et g.





Associer à chacune des fonctions f et g sa courbe représentative.

Dérivabilité des fonctions sinus et cosinus

Théorème (admis) :

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur IR et pour tout $x \in$ IR
(cos)'(x) =–sin x, et (sin)'(x) = cos x.

Activité 1 :

1°) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

2°) a/ Vérifier que $\frac{1-\cos x}{x}=x\,\frac{\sin^2 x}{x^2}\,\frac{1}{1+\cos x}$ pour tout réel x non nul de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

b/ En déduire que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$ et que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

Théorème

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0;\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Activité 2 :

1°) Donner une approximation affine de sin h lorsque h est voisin de zéro.
2°) Donner une approximation affine de cos h lorsque h est voisin de zéro.
3°) Donner une approximation de sin(0.001), cos(0.001), sin(-0.002).

Activité 3 :

Justifier que la fonction f est dérivable sur IR et calculer f'(x) pour $x \in$ IR, dans chacun des cas suivants.

$f : x \mapsto 2\sin x\cos x$

$f : x \mapsto \cos^2 x$

$f : x \mapsto 1-2\sin^2 x$

Activité 4 :

Calculer, dans chaque cas, la limite de f(x) en x_0, en utilisant le nombre dérivé en x_0 d'une fonction que l'on déterminera.

1°) $f(x)=\dfrac{\sin x-0.5}{x-\frac{\pi}{6}}$, $x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

2°) $f(x)=\dfrac{\cos x-0.5}{x-\frac{\pi}{3}}$, $x_0=\dfrac{\pi}{3}$.

3°) $f(x)=\dfrac{2\cos(x)-\sqrt{2}}{2(x-\frac{\pi}{4})}$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$

Résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques

Activité 1 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par C la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \sin x$.

On note D la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

1°) Représenter dans un même repère la courbe C et la droite D d'équation $y = \frac{1}{2}$.

2°) a/ Soit $x \in [0, \pi]$. Résoudre graphiquement l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$.

b/ En déduire les solutions dans IR de l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$.

3°) a/ Soit $x \in [-\pi, \pi]$. Résoudre graphiquement $0 < \sin x < \frac{1}{2}$.

b/ En déduire les solutions sur $[-\pi, 3\pi]$ de $0 < \sin x < \frac{1}{2}$.

Activité 2 :

1°) Dresser le tableau de variation de la fonction sinus sur l'intervalle $[0, \pi]$.

2°) a/ Placer sur ce tableau de variation les réels x de $[0, \pi]$, vérifiant $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b/ En déduire les solutions de l'inéquation $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[-\pi, \pi]$.

3°) Déterminer les solutions de l'inéquation $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[-\pi, 5\pi]$.

Activité 3 :

1°) Dresser le tableau de variation de la fonction cosinus sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

2°) a/ Placer sur ce tableau de variation les réels x de $[-\pi, \pi]$, vérifiant $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b/ En déduire les solutions dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ de l'inéquation $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3°) Procéder comme dans 2) pour déterminer les solutions dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ de l'inéquation $\cos x \geq \frac{1}{2}$

4°) Résoudre dans IR ; $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Visualisation des courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus

a/ Traiter le texte suivant sous un logiciel de traitement de texte (Notepad, WordPad, Microsoft Word)

```
Figure Géoplan
Numéro de version: 2

Position de Roxy: Xmin: -7.7790391969, Xmax: 7.8459608031, Ymax: 8.056285851
Objet dessinable Roxy, particularités: rouge, non gradué, dessiné

O1 point libre
   Objet libre O1, paramètres: -7.0056806111, 0.00704342656
vec(i1) (4,0) (repère Roxy)
vec(j1) (0,4) (repère Roxy)
R1 repère (O1,vec(i1),vec(j1)) (graduations: 1,1)
   Objet dessinable R1, particularités: non gradué, non dessiné
Cc cercle de centre O1 et de rayon 4 (unité Uoxy)
d droite perpendiculaire à ox passant par O1
   Objet dessinable d, particularités: non dessiné
A point d'intersection 1 de la droite ox et du cercle Cc
vec(p) = vec(O1,A)
A' point d'intersection 2 de la droite ox et du cercle Cc
m point libre sur la droite ox
   Objet libre m, paramètre: 0.77090070344
   Pas de pilotage au clavier de m: 0.00125 (/ fenêtre,modifiable)
   Objet dessinable m, particularités: rouge
S courbe définie par Y=4sin(X), X décrivant [0,15] (500 points, repère Roxy)
   Objet dessinable S, particularités: points liés, non dessiné
u abscisse de m (repère Roxy)
v = 4cos(u)
X point de coordonnées (u,v) dans le repère Roxy
   Objet dessinable X, particularités: bleu
Segment [mX]
   Objet dessinable [mX], particularités: bleu, trait épais
e droite parallèle à ox passant par X
   Objet dessinable e, particularités: non dessiné
N point d'intersection 2 de la droite e et du cercle Cc
   Objet dessinable N, particularités: non dessiné
M point de coordonnées (-7+4cos(u),4sin(u)) dans le repère Roxy
V projeté orthogonal de M sur ox
Segment [MV]
```

Objet dessinable [MV], particularités: gris foncé, tireté
Segment [O1M]
  Objet dessinable [O1M], particularités: trait épais
U projeté orthogonal de M sur d
Segment [UM]
  Objet dessinable [UM], particularités: gris foncé, tireté
Segment [UO1]
  Objet dessinable [UO1], particularités: rouge, trait épais, non dessiné
l point de coordonnées (0,4) dans le repère Roxy
  Objet dessinable l, particularités: gris foncé
arc arc d'origine A et d'extrémité M sur le cercle Cc
  Objet dessinable arc, particularités: trait épais
Segment [ol]
  Objet dessinable [ol], particularités: gris foncé, trait épais
I point de coordonnées (1,0) dans le repère Roxy
  Objet dessinable I, particularités: gris foncé
Segment [oI]
  Objet dessinable [oI], particularités: gris foncé, trait épais
n droite d'équation X-Y+7=0 (repère Roxy)
  Objet dessinable n, particularités: gris, non dessiné
Droite (MV)
  Objet dessinable (MV), particularités: non dessiné
b point d'intersection des droites (MV) et n
  Objet dessinable b, particularités: non dessiné
Segment [bV]
  Objet dessinable [bV], particularités: gris foncé, tireté, non dessiné
Segment [bX]
  Objet dessinable [bX], particularités: gris foncé, tireté, non dessiné
Segment [O1V]
  Objet dessinable [O1V], particularités: bleu, trait épais
co courbe définie par Y=4cos(X), X décrivant [0,15] (500 points, repère Roxy)
  Objet dessinable co, particularités: bleu, points liés, non dessiné
B point d'intersection 1 de la droite d et du cercle Cc
  Objet dessinable B, particularités: non dessiné
B' point d'intersection 2 de la droite d et du cercle Cc
Segment [BB']
U' point d'intersection des droites (BB') et (bX)
Segment [O1U']
  Objet dessinable [O1U'], particularités: bleu, trait épais
Segment [U'b]
Objet dessinable [U'b], particularités: gris foncé, tireté, non dessiné
X' point de coordonnées (u,4sin(u)) dans le repère Roxy

Objet dessinable X', particularités: rouge
Segment [MX']
  Objet dessinable [MX'], particularités: gris foncé, tireté
Segment [X'm]
  Objet dessinable [X'm], particularités: rouge, trait épais
e' point libre sur le segment [O1A]
  Objet libre e', paramètre: 0.0045869859
  Objet dessinable e', particularités: non dessiné
f' projeté orthogonal de e' sur (UM)
  Objet dessinable f', particularités: non dessiné
Segment [e'f']
  Objet dessinable [e'f'], particularités: rouge, trait épais
h' point libre sur le segment [AO1]
  Objet libre h', paramètre: 0.00204388325
  Objet dessinable h', particularités: vert, non dessiné
cc cercle de centre O1 passant par h'
  Objet dessinable cc, particularités: non dessiné
Droite (MO1)
  Objet dessinable (MO1), particularités: non dessiné
g' point d'intersection 1 de la droite (MO1) et du cercle cc
  Objet dessinable g', particularités: non dessiné
r' point d'intersection 2 de la droite (MO1) et du cercle cc
  Objet dessinable r', particularités: vert, marque épaisse, nom non dessiné
k' arc d'origine h' et d'extrémité r' sur le cercle cc
  Objet dessinable k', particularités: vert, trait épais
Segment [U'X]
  Objet dessinable [U'X], particularités: tireté
Segment [A'A]

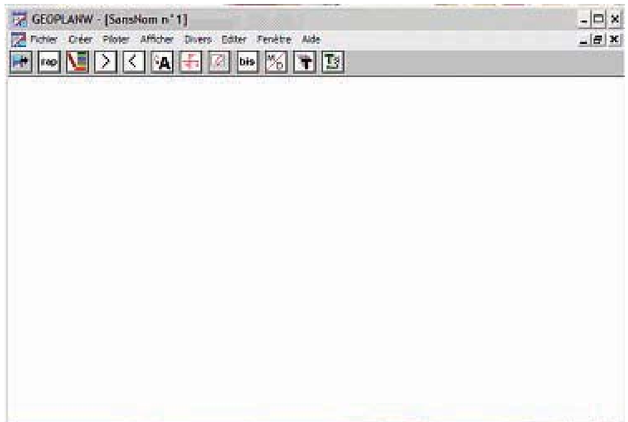
Cm0 (touche I) position mémorisée de m
  Paramètres pour Cm0: 0.00860990845
Cm1 (touche C) dessin en bloc de co
Cm2 (touche S) dessin en bloc de S
Cm3 (touche R) dessin en bloc de Roxy, l, [ol], [oI], I, [U'X], [MX'], X, X', [mX], m, [X'm]

Objet libre actif au clavier: m
Sélection pour trace: X, X', r'
Commentaire
touche I position mémorisée de m
touche C dessin en bloc de la représentation graphique de la fonction cosinus
touche S dessin en bloc de de la représentation graphique de la fonction sinus
touche R dessin en bloc de Roxy, l, [ol], [oI], I, [U'X], [MX'], X, X', [mX], m, [X'm]
Fin de la figure

Sélectionner tout le texte et le copier. Aller dans la barre de menu et choisir

Edition/ Copier

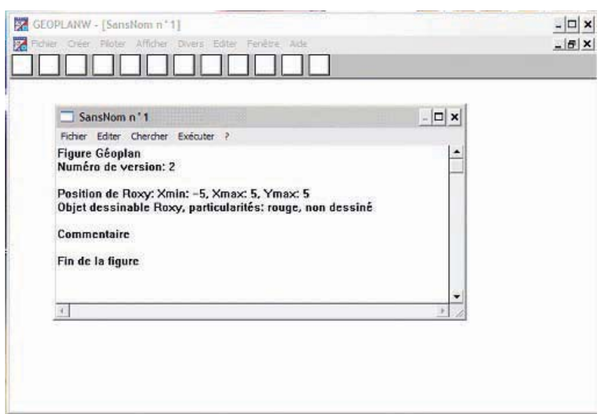
b/ Ouvrir le programme GeoplanW en exécutant 



c/ Aller dans la barre de menu et choisir

Editer/ Editer Texte figure

On obtient :



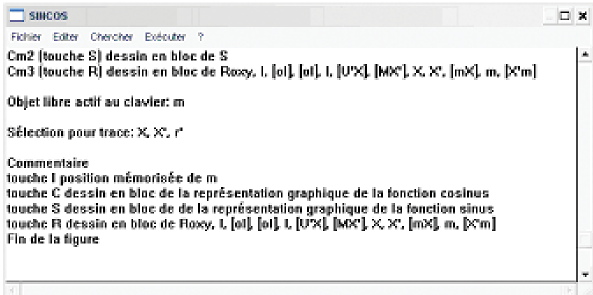
Effacer le texte suivant :

Position de Roxy: Xmin: -5, Xmax: 5, Ymax: 5 Objet dessinable Roxy, particularités: rouge, non dessiné Commentaire Fin de la figure

Et la remplacer par le texte traité au départ en procédant comme suit :

Edition/ Coller

On obtient :

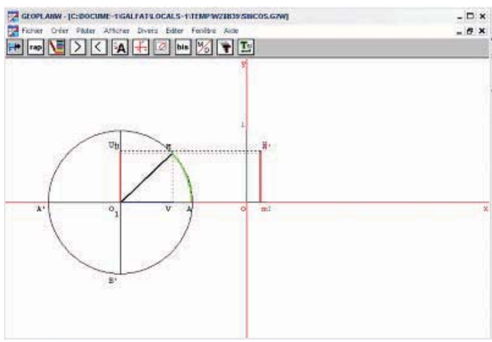


d/.Aller dans la barre de menu et choisir

Exécuter

à la commande appuyer sur **yes**

On obtient :



Différentes commandes au clavier : Cliquer sur la touche F3 pour les avoir à l'écran.

Touche I : Position initiale du point M en A.
Touche R : Dessin en bloc du repère et des points représentatifs.
Touche C : Dessin en bloc de la représentation graphique de la fonction cosinus.
Touche S : Dessin en bloc de la représentation graphique de la fonction sinus.
Le tracé point par point des courbes est obtenu en activant la fonction trace (icône) et en déplaçant le point M en utilisant les flèches de clavier.
La figure peut être agrandie ou réduite en utilisant les icônes > et <
La figure peut être déplacée, à l'aide de la souris, en maintenant la pression sur le bouton droit.
Des modifications peuvent être apportées à la figure et aux commandes en utilisant les fonctions de Géoplanw.

1

Soit $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique et $\overset{\frown}{AB}$ un arc orienté de C dont une mesure est $\frac{2\pi}{3}$.

1°) Donner, parmi les réels suivants, ceux qui sont des mesures de l'arc $\overset{\frown}{AB}$

a/ $\frac{\pi}{3}$ b/ $\frac{14\pi}{3}$

d/ $-\frac{18\pi}{3}$ e/ $-.\frac{2\pi}{3}$

2°) Trouver les entiers relatifs k pour lesquels $(\frac{2\pi}{3}+k\frac{\pi}{2})$ est une mesure de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$

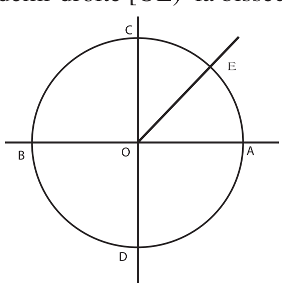
2

Soit $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{CD}$ deux arcs orientés de $\mathscr{C}$ dont deux mesures respectives sont $\frac{125\pi}{3}$ et $-\frac{151\pi}{4}$.

1°) Donner la mesure de chacun de ces deux arcs appartenant à $]-\pi,\pi]$.
2°) Déterminer l'ensemble des mesures de chacun des deux arcs.
3°) Déterminer, pour chaque arc, une mesure appartenant à $[21\pi,23\pi[$.

3

Le plan est orienté dans le sens direct.
On place, sur un cercle de centre O, cinq points A, B, C, D et E tels que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires et la demi-droite [OE) la bissectrice du secteur [OA,OC]



1°) Déterminer la mesure appartenant $[0,2\pi[$ de chacun des arcs orientés suivants: $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{EA}$ et $\overset{\frown}{DE}$

2°) Parmi les réels , $-\frac{5\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}, \frac{75\pi}{4}, -\frac{13\pi}{4}$ et $-\frac{17\pi}{4}$, quels sont ceux qui sont des mesures de l'arc $\overset{\frown}{DE}$.

4

Soit $\mathscr{C}$ un cercle orienté dans le sens direct et A un point de $\mathscr{C}$.
Soient $x=\frac{1261\pi}{3}$ et $y=-\frac{41\pi}{6}$ des mesures respectives de deux arcs orientés $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{AC}$ du cercle $\mathscr{C}$.
1°) Déterminer la mesure appartenant à $[0, 2\pi[$ de chacun de ces deux arcs.
2°) Placer les points B et C sur le cercle $\mathscr{C}$.

5

Etudier la parité des fonctions définies sur IR par :
$f(x) = \cos 4x$.
$g(x) = \sin 5x$.
$h(x) = \sin x \cos 3x$.
$k(x) = \sin 2x \cos 3x$.

6

Pour chacune des questions suivantes une seule des réponses proposées est correcte, trouver la:

1°) **a/** $\cos(51\pi-x) = \cos x$ **b/** $\cos(51\pi-x) = \sin x$ **c/** $\cos(51\pi-x) = -\cos x$

2°) **a/** $\cos(13\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$ **b/** $\cos(13\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$

c/ $\cos(13-x)=-\cos x$

3°) **a/** $\cos^2(3x) + \sin^2(3x) = 3$
b/ $\cos^2(3x) + \sin^2(3x) = 9$
c/ $\cos^2(3x) + \sin^2(3x) = 1$

7

Pour chacune des questions suivantes une seule des réponses proposées est correcte, trouver la

1°) $\cos\frac{11\pi}{3}$ est égal à :

a/ $\frac{1}{2}$ **b/** $-\frac{1}{2}$ **c/** $\frac{11}{2}$

2°) Pour tout réel x, $\cos(x) + \cos(-x)$ est égal à:
a/ 0 **b/** 2cosx **c/** 1
3°) Pour tout réel x, $\sin(x - 3\pi)$ est égal à:
a/ $-\sin x$ **b/** $\sin x$ **c/** $\cos x$

8

1°) Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos x$.

a/ Rappeler le nombre dérivé de f en O.

b/ Déterminer la limite en O de $x \mapsto \frac{\cos x - 1}{x}$

2°) Soit g la fonction définie par $x \mapsto \sin x$.

a/ Déterminer le nombre dérivé de g en $\frac{\pi}{6}$

b/ Démontrer que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}$

9

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions définies de la façon suivante :

1°) $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f(x) = \frac{1}{\cos x}$

2°) $x \in]0,\pi[$ et $g(x) = \frac{1}{\sin x}$

3°) $x \in]0,2\pi[$ et $h(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$

4°) $x \in]0,\pi[$ et $k(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

5°) $x \in IR$ et $l(x) = \frac{2\cos x - 1}{\cos x + 3}$

6°) $x \in IR$ et $m(x) = \frac{3 - \sin x}{5 + 2\sin x}$

10

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes:

$F: x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ $\quad G: x \mapsto \frac{1}{\sin x}$

$H: x \mapsto \frac{\cos x}{1 - \sin x}$ $\quad K: x \mapsto \frac{\sin x}{1 - 2\cos x}$.

11

On se propose de tracer les courbes représentatives respectives (C) et (C') des fonctions f et g définies sur IR par $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$.

1°) a/ Remarquer qu'il suffit d'étudier la fonction f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b/ Etudier les variations de f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

c/ Ecrire une équation de la tangente T à la courbe (C) au point O d'abscisse 0.

d/ Tracer la courbe (C) de la fonction f dans un repère orthogonal(on expliquera les différentes étapes de la construction).

12

Etudier la limite éventuelle de la fonction f en 0 dans chacun des cas suivants:

a/ $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$

b/ $f(x) = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$

c/ $f(x) = \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$

13

Dans chacun des cas suivants, étudier la limite éventuelle de la fonction f en 0.

$u : x \mapsto \frac{\cos x}{x}$ $\quad v : x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$

14

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & f(x) = \cos x \\ \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] & f(x) = 0 \end{cases}$$

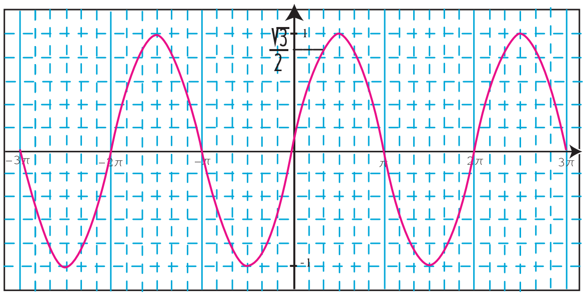
qui vérifie de plus elle est paire et périodique de période 2π.

On note C sa courbe représentative dans repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 2 cm.

Dessiner C pour $x \in [0,\pi]$ puis pour $x \in [-\pi,0]$ et enfin pour $x \in \left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$

15

la figure ci-dessous est la représentation graphique de la foction sinus $[-3\pi, 3\pi]$



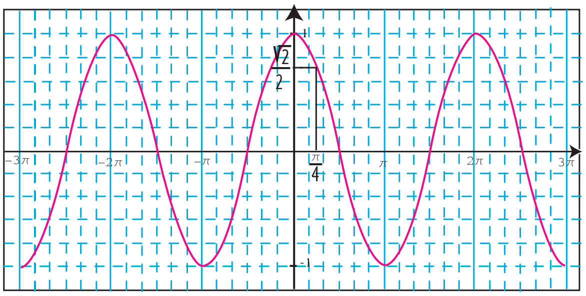
Utiliser le graphique pour résoudre dans$[-3\pi, 3\pi]$ les équations et les inéquations suivantes :

a/ $\sin x = \frac{1}{2}$ **b/** $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c/ $\sin x \leq \frac{1}{2}$ **d/** $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

16

La figure ci-dessous est la représentation graphique de la fonction cosinus sur $[-3\pi, 3\pi]$



Utiliser le graphique pour résoudre dans$[-3\pi, 3\pi]$ les équations et les inéquations suivantes :

a/ $\cos x = \frac{1}{2}$ **b/** $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c/ $\cos x \leq \frac{1}{2}$ **d/** $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Histoire de la trigonométrie

Le mot vient du grec *"trigone" (triangle)* et *"metron"* (mesure).
Dans *l'Encyclopédie* (1751), *Jean le Rond d'Alembert* (1717 ; 1783) définit la trigonométrie comme *« l'art de trouver les parties inconnues d'un triangle par le moyen de celles qu'on connaît »*. Et pourtant la trigonométrie n'est pas à l'origine un outil de calcul du triangle mais du cercle.
L'héritage des tables trigonométriques données aux grecs et la numération sexagésimale des babyloniens (base 60) contribueront à l'introduction du partage du cercle en 360°.
Eratosthène de Cyrène (-276 ; -196) et *Aristarque de Samos* (-310 ; -230) utilisent ces tables pour l'astronomie. Eratosthène se rendra célèbre pour avoir calculé la circonférence de la terre avec une précision tout à fait remarquable (seulement 3% d'erreur).
Le grec Claude Ptolémée poursuit dans l'Almageste les travaux des savants précédents avec une meilleure précision et introduit les premières formules de trigonométrie. Ptolémée croyait au géocentrisme : le terre est le centre de l'univers, tous les astres gravitent autour d'elle. Il faudra attendre le XVIe siècle pour rétablir la vérité pourtant déjà connue de Pythagore de Samos (-569 ; -475) au Ve siècle avant J.C.

La terre, centre de l'univers selon Ptolémée.

La règle de Ptolémée.

Dès le XIIIe siècle, les arabes, tel que le perse Mohammed al Khwarizmi (780 ; 850) traduisent les ouvrages provenant d'Orient.

Mohammed al Battani (850 ; 929) introduit les tables de tangentes et de nouvelles formules, puis après lui Muhammad Abu'l-Wafa (940 ;998) précise encore ces tables. Avec le perse al Tusi (1201-1274), la trigonométrie se sépare de l'astronomie