

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

MATHÉMATIQUES

3ème année de l'enseignement secondaire

Section : Mathématiques

TOME 1

Hikma Smida

Professeur universitaire

Ridha Ben Saad

Inspecteur

Néjiba Mhamdi

Inspecteur

Leila Ben Youssef

Professeur du secondaire

Imène Ghedamsi

Assistante universitaire

Ali Béji Hammas

Inspecteur

Béchir Labidi

Inspecteur

Evaluateurs

Belhassen Dehman

Professeur universitaire

Khédiya Ben Messaoud

Inspectrice Principale

Ali Rahmouni

Inspecteur Principal

Centre National Pédagogique

Remerciements

Madame Khédija BEN MASSOUD, Messieurs Abdennebi ACHOUR, Belhassen DAHMEN et Ali RAHMOUNI ont évalué ce manuel. Nous remercions tous les membres de cette équipe pour leurs critiques, leurs conseils pertinents et leurs modifications judicieuses.

Messieurs Taoufik CHARRADA, Ali AZIZI, Nebil MZIOU et Mourad ARBI ont lu ce manuel. Nous remercions tous les membres de cette équipe pour leurs remarques judicieuses.

Monsieur Abderrazek BERREZIGUE a contribué à l'élaboration des figures proposées dans ce manuel. Nous remercions Monsieur BERREZIGUE pour sa gentillesse et sa disponibilité.

La mise en page de ce manuel est l'œuvre de l'équipe d'édition du CNP. Nous remercions tous les membres de cette équipe pour leur grande compétence et leur patience.

Les auteurs

Préface

Ce manuel comprend douze chapitres. Chaque chapitre comprend six rubriques.

Pour commencer

Cette rubrique vise à permettre aux élèves de consolider leurs acquis antérieurs.

Cours

Cette rubrique comprend :

- *des activités visant à permettre aux élèves de développer leur capacité à chercher, à expérimenter, à modéliser, à conjecturer et à démontrer,*
- *les résultats du cours à retenir.*

QCM - Vrai ou faux

La rubrique QCM vise à permettre à l'élève de faire sa propre évaluation.

La rubrique Vrai ou Faux vise à l'apprentissage progressif des règles logiques.

Mobiliser ses compétences

Cette rubrique est consacrée à la résolution de problèmes, pour la plupart intégratifs, dans des situations mathématiques ou en rapport avec l'environnement.

Exercices et problèmes

Cette rubrique comprend deux parties.

- *Une partie qui comporte des exercices et problèmes visant à permettre aux élèves de mobiliser leurs compétences de façon autonome.*
- *Une partie Avec l'ordinateur, qui vise à permettre aux élèves d'utiliser un logiciel numérique ou géométrique pour chercher, expérimenter ou contrôler un résultat.*

Math-culture

Cette rubrique propose des éléments d'histoire des mathématiques et des éléments sur la contribution des mathématiques à la compréhension des phénomènes.

Sommaire

Chapitre 1	Généralités sur les fonctions	5
Chapitre 2	Continuité	21
Chapitre 3	Limites et continuité	40
Chapitre 4	Limites et comportements asymptotiques	56
Chapitre 5	Nombre dérivé	80
Chapitre 6	Fonction dérivée	100
Chapitre 7	Exemples d'étude de fonctions	118
Chapitre 8	Fonctions trigonométriques	136
Chapitre 9	Suites réelles	156
Chapitre 10	Limites de suites réelles	173
Chapitre 11	Statistiques	192
Chapitre 12	Probabilités	221

Généralités sur les fonctions

Chapitre 1

*« Le livre de la nature est écrit dans un langage
mathématique. »*

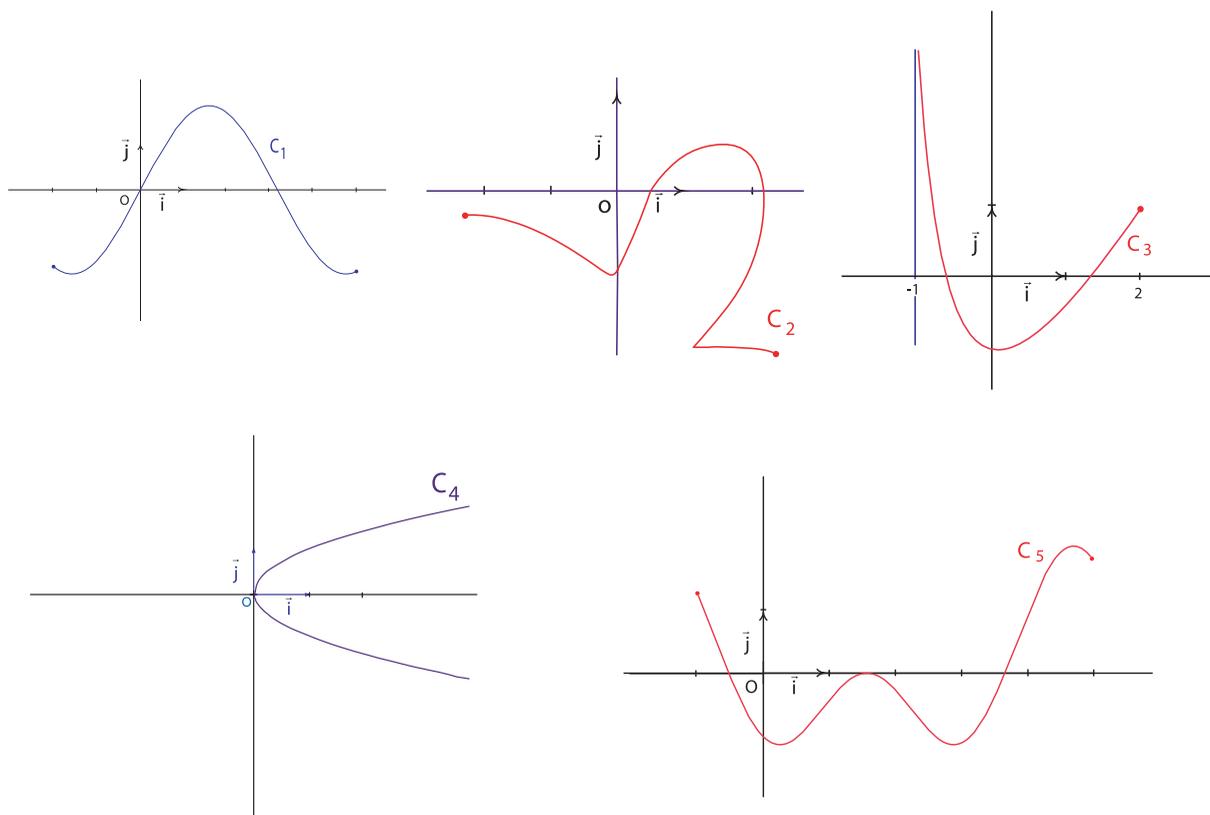
Galilée

Pour commencer

Activité 1

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Parmi les courbes C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5 tracées ci-dessous, préciser celles qui représentent graphiquement une fonction et préciser l'ensemble de définition de la fonction en question.



Activité 2

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

a. $f : x \mapsto \frac{5x-1}{x+3}$;

b. $g : x \mapsto \sqrt{1-x}$;

c. $h : x \mapsto \frac{4}{6-x} - \frac{1}{x}$;

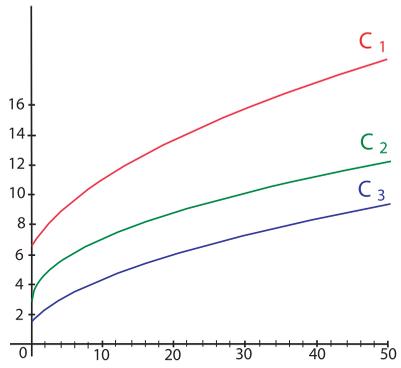
d. $k : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{x-1}$.

1. Rappels

1.1 Représentation graphique

Activité 1

- Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , représenter les courbes C et C' d'équations respectives $y = \frac{1}{x-2}$ et $y = x^2 - 2x$.
- Déterminer graphiquement le nombre de points d'intersection de C et C' .
- Montrer que si $x^2 - 2x = \frac{1}{x-2}$ alors $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$.
 - En déduire que le polynôme P défini par $P(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ admet au moins deux racines.
- Vérifier que 1 est une racine de P .
 - En déduire les autres racines de P .



Activité 2

On a représenté dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , les courbes des fonctions f, g et h définies sur $[0, +\infty[$ par

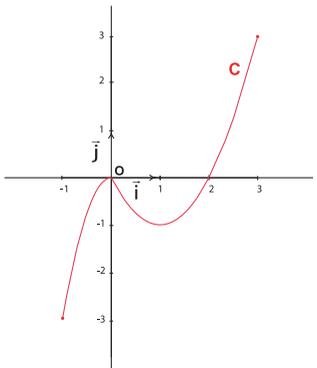
$f : x \mapsto \sqrt{x+3}$; $g : x \mapsto \sqrt{x} + 3$; $h : x \mapsto 2\sqrt{x+3} + 3$.

Identifier chacune d'entre-elles.

1.2 Sens de variation d'une fonction

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) . La courbe C tracée ci-contre, est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-1, 3]$.



- Lire graphiquement les variations de la fonction f .
- Construire les courbes représentatives des fonctions
 $-f : x \mapsto -f(x)$; $|f| : x \mapsto |f(x)|$;
 $h : x \mapsto 2f(x)$.
 Expliquer le procédé de construction.
- Lire graphiquement les variations de chacune des fonctions $-f, |f|$ et h .

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- La fonction f est croissante sur I si pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, $f(a) \leq f(b)$.
- La fonction f est décroissante sur I si pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, $f(a) \geq f(b)$.
- La fonction f est constante sur I si pour tous réels a et b de I , $f(a) = f(b)$.

Une fonction est dite monotone sur un intervalle I lorsqu'elle est croissante sur I ou décroissante sur I .

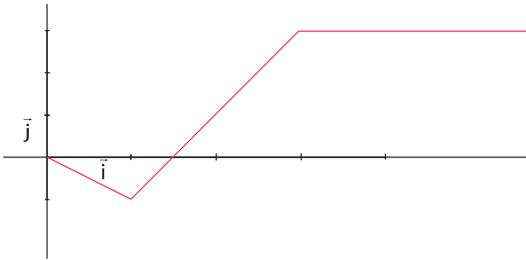
1. 3 Fonctions paires – Fonctions impaires

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit f une fonction paire définie sur \mathbb{R} .

On a représenté ci-dessous l'ensemble $\{M(x, f(x)) \text{ tels que } x \geq 0\}$



Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit f une fonction définie sur un ensemble D .

On dit que f est une fonction paire si pour tout x appartenant à D , $-x$ appartient à D et $f(-x) = f(x)$.

La fonction f est paire, si et seulement si, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

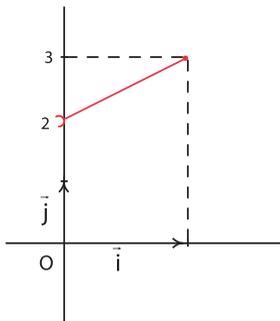
Reproduire la courbe donnée et achever le tracé de la courbe représentative de f .

Activité 2

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit g une fonction impaire définie sur $[-1,1]$.

On a représenté ci-dessous l'ensemble $\{M(x, g(x)) \text{ tel que } 0 < x \leq 1\}$.



Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit f une fonction définie sur un ensemble D .

On dit que f est une fonction impaire si pour tout x appartenant à D , $-x$ appartient à D et $f(-x) = -f(x)$.

La fonction f est impaire, si et seulement si, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

1. Reproduire la courbe donnée et achever le tracé de la courbe représentative de g .
2. Quelle est l'image de 0 par g ?
3. Donner l'expression de $g(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

2. Restriction d'une fonction

Activité 1

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

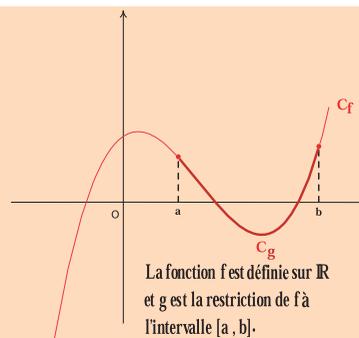
1. Représenter la parabole C , représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

2. On désigne par C' l'ensemble des points de C d'abscisses appartenant à l'intervalle $[-3, 0]$ et par g la fonction dont la représentation graphique est la courbe C' .

Colorier C' et donner l'expression de g .

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble E et C sa représentation graphique dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
Soit D une partie de E . On appelle restriction de la fonction f à D , la fonction g définie sur D par $g(x) = f(x)$, pour tout x de D .
La représentation graphique de g est l'ensemble des points de C ayant pour coordonnées $(x, f(x))$, x appartenant à D .



Activité 2

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2|x - 2| - |x + 3| - x^2$.

1. Donner l'expression de la fonction g , restriction de f à l'intervalle $[2, +\infty[$.
2. Représenter graphiquement g .

Activité 3

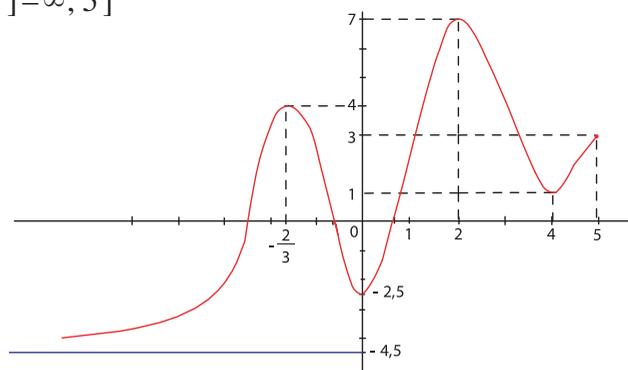
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Pour tout $x > 0$, on désigne par P le point de (O, \vec{i}) d'abscisse x .
 - a. Montrer qu'il existe un unique point M d'ordonnée positive, tel que le triangle OPM soit rectangle en P et d'aire égale à 1.
 - b. Sur quelle courbe varie le point M lorsque le point P varie ?
 - c. On désigne par g la fonction qui à x associe l'ordonnée de M . Donner l'expression de g .
 - d. Pour quelles valeurs de x , a-t-on $2 \leq g(x) \leq 10$?
2. Pour tout $x > 0$, on désigne par N le point de coordonnées $(0, g(x))$.
Existe-t-il une valeur de x pour laquelle le périmètre du rectangle $OPMN$ est égal à 2 ?

3. Majorant – Minorant

Activité 1

On a représenté dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , ci-dessous, la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]-\infty, 5]$



Répondre par vrai ou faux.

1. La fonction f admet un maximum sur $]-\infty, 5]$ en $-\frac{2}{3}$.
2. La restriction de f à $]-\infty, 0]$ admet un maximum en $-\frac{2}{3}$.
3. La fonction f admet un maximum sur $]-\infty, 5]$ en 2.
4. Le réel -4.5 est un minimum de la fonction f sur $]-\infty, 5]$.
5. La restriction de f à $]-2, 2]$ admet un minimum en 0.
6. Pour tout $x \in]-\infty, 5]$, $f(x) \leq 4$.
7. Pour tout $x \in]-\infty, 5]$, $f(x) \leq 10$.
8. Pour tout $x \in]-\infty, 5]$, $-4.5 \leq f(x)$.
9. Pour tout $x \in]-\infty, 5]$, $-6 \leq f(x)$.
10. Pour tout $x \in]-\infty, 5]$, $-5 \leq f(x) \leq 3$.

Soit f une fonction définie sur un ensemble D .

S'il existe un réel x_0 appartenant à D tel que pour tout x de D , $f(x) \leq f(x_0)$, on dit que la fonction f admet sur D un maximum en x_0 ou encore que $f(x_0)$ est un maximum de f sur D .

Soit f une fonction définie sur un ensemble D .

S'il existe un réel x_0 appartenant à D tel que pour tout x de D , $f(x_0) \leq f(x)$, on dit que la fonction f admet sur D un minimum en x_0 ou encore que $f(x_0)$ est un minimum de f sur D .

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble D .

- La fonction f est dite majorée sur D s'il existe un réel M tel que pour tout x de D , $f(x) \leq M$.
- La fonction f est dite minorée sur D s'il existe un réel m tel que pour tout x de D , $m \leq f(x)$.
- La fonction f est dite bornée sur D s'il existe deux réels m et M tels que pour tout x de D , $m \leq f(x) \leq M$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x+1}{|x|+1}$.

Montrer que tous les points de la courbe C de f se trouvent dans la région du plan délimitée par les droites $y = -1$ et $y = 1$.

4. Fonctions affines par intervalles

4.1 Définition d'une fonction affine par intervalles

Activité 1

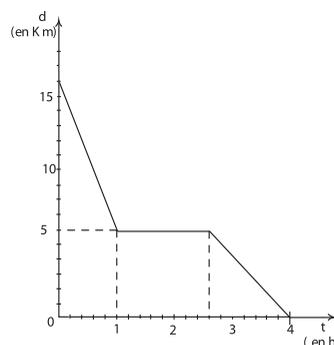
Un cycliste se dirige de la ville B vers la ville A.

On désigne par $d(t)$ la distance (en km) qui à l'instant t (en heure) le sépare de la ville A.

Soit d la fonction qui à t associe $d(t)$.

Dans le graphique ci-contre, la courbe C est la représentation graphique de la fonction d .

1. Quelle est la distance qui sépare les deux villes ?
2. Au bout de combien de temps le cycliste arrivera-t-il à la ville A ?
3. Donner l'expression de $d(t)$ pour tout $t \in [0, 4]$.



Définition

On appelle fonction affine par intervalles toute fonction définie sur une réunion d'intervalles et telle que sa restriction à chacun de ces intervalles soit affine.

Activité 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , les points $A(0, 4)$, $B(3, 0)$, $C(-3, 0)$ sont fixes et M est un point variable de la droite (BC) , d'abscisse x .

On désigne par H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB) et par K le projeté orthogonal de M sur la droite (AC) .

1. On considère la fonction $f : x \mapsto MH + MK$.

Donner l'expression de $f(x)$ pour tout réel x .

2. Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[-3, 3]$ est une fonction constante.

3. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $MH + MK = 6$.

4. Existe-t-il des points M tels que $MH = MK$?

4.2 Fonction partie entière

Activité 1

1. Pour chacun des réels suivants, donner un encadrement entre deux entiers consécutifs.

-1.2 ; -1.99999999 ; $\frac{56}{49}$; $-\sqrt{3}$; $5\sqrt{13}$; π ; -2π .

2. Pour chacun des réels suivants, déterminer le plus grand entier qui lui est inférieur.

5.1 ; -5.000002 ; $\sqrt{26}$; $-\frac{76}{15}$; $4 + \sqrt{3}$.

Définition

- On appelle partie entière d'un réel x et on note $E(x)$, le plus grand entier inférieur ou égal à x .
- On appelle fonction partie entière la fonction qui à tout réel associe sa partie entière.

Soit E la fonction partie entière.

Pour tout réel x , il existe un entier n tel que x appartient à $[n, n+1[$. On a alors $E(x) = n$.

Activité 2

Déterminer et représenter graphiquement la restriction de la fonction partie entière à l'intervalle $[-3, 2]$.

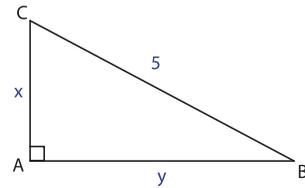
5. La fonction $x \mapsto \sqrt{g(x)}$

Activité 1

Dans la figure ci-contre le triangle ABC est rectangle en A.

On pose $AC = x$ et $AB = y$.

1. Exprimer y en fonction de x .
2. En déduire l'aire de ABC.



Activité 2

On considère la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x}$.

1. Pour quelles valeurs de x , les réels $f(x^2)$, $f(x + 2)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$ existent-ils ?

2. En déduire l'ensemble de définition de chacune des fonctions

$$k: x \mapsto f(x^2), \quad m: x \mapsto f(x + 2) \text{ et } s: x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Activité 3

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions

$$f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 1} \quad ; \quad g: x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 2} \quad ;$$

$$h: x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x-1}} \quad ; \quad k: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}.$$

Activité 4

1. Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle I .

- a. Montrer les propriétés ci-dessous

Si f est croissante sur I alors \sqrt{f} est croissante sur I .

Si f est décroissante sur I alors \sqrt{f} est décroissante sur I .

- b. Montrer que si f est majorée sur I alors \sqrt{f} est majorée sur I .

2. Pour chacune des fonctions ci-dessous, préciser son ensemble de définition et étudier ses variations.

$$m: x \mapsto \sqrt{x-3} \quad ; \quad h: x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \quad ; \quad k: x \mapsto \sqrt{x(1-x)}.$$

Théorème

Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle I .

- Si f est croissante sur I alors \sqrt{f} est croissante sur I .
- Si f est décroissante sur I alors \sqrt{f} est décroissante sur I .
- Si f est majorée sur I alors \sqrt{f} est majorée sur I .

6. Opérations sur les fonctions

Soit D une partie de \mathbb{R} . Nous pouvons munir l'ensemble des fonctions définies sur D et à valeurs dans \mathbb{R} d'une addition, d'une multiplication et de la multiplication par un réel de la manière suivante :

- La fonction $f + g$ est la fonction définie sur D par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- La fonction $f g$ est la fonction définie sur D par $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- Pour tout réel λ , la fonction λf est la fonction définie sur D par $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.

Activité 1

1. Vérifier que pour toutes fonctions f et g définies sur un même ensemble D , on a $f + g = g + f$; $fg = gf$.
2. Soit les fonctions f , g et h définies pour tout réel x par $f(x) = (x - 1)^2 - 2$; $g(x) = x - 1$ et $h(x) = 2|x - 2| - |x + 3|$.
Donner les expressions des fonctions $f + h$; $f g$; h^2 ; $2f + 3g^3$.
3. a. Résoudre dans \mathbb{R} , les équations $f(x) = 0$ et $h(x) = 0$.
b. Donner l'ensemble de définition des fonctions :

$$x \mapsto \frac{1}{f(x)} \quad ; \quad x \mapsto \frac{1}{h(x)} \quad ; \quad x \mapsto \frac{1}{h^2(x)} \quad ;$$

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \quad ; \quad x \mapsto \frac{h(x)}{g(x)} .$$

Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble D telles que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in D$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{g(x)}$ est notée $\frac{1}{g}$.

La fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est notée $\frac{f}{g}$.

Activité 2

1. Montrer que si f et g sont croissantes, alors $f+g$ est croissante.
2. Montrer que si f et g sont décroissantes, alors $f+g$ est décroissante.
3. Donner les variations de chacune des fonctions ci-dessous.

$$f : x \mapsto -x + 5 + \frac{1}{x} \quad \text{sur }]0, +\infty[.$$

$$g : x \mapsto x^2 - 1 + \sqrt{x+3} \quad \text{sur } [1, +\infty[.$$

QCM

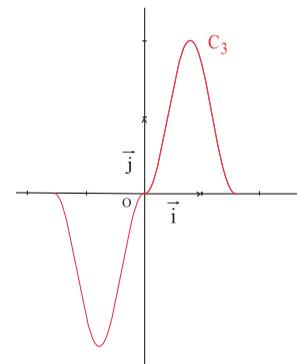
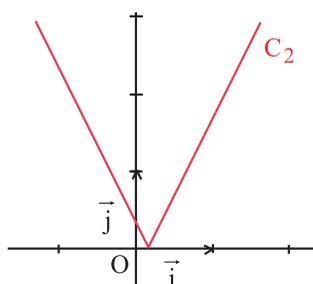
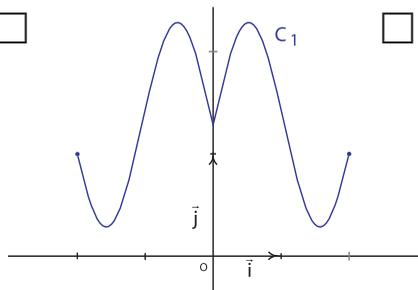
Cocher la réponse exacte.

1. La fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x}{1+|x|}$

- est paire est impaire n'est ni paire, ni impaire.

2. Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Une des courbes suivantes ne représente ni une fonction paire ni une fonction impaire. Laquelle ?



3. La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{2}{x^2 + 4}$.

- n'est pas majorée sur \mathbb{R} n'est pas minorée sur \mathbb{R} est bornée sur \mathbb{R} .

4. L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{|4-2x|}$ est

- $]-\infty, 2]$ $[2, +\infty[$ \mathbb{R} .

5. L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \frac{2x^3 - 1}{1 - |x|}$ est

- $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si f est une fonction paire définie sur \mathbb{R} , alors $f(0) = 0$.
2. Si f est bornée sur D , alors f admet un minimum sur D .
3. Si f admet un maximum sur D , alors f est bornée sur D .
4. Si f n'est pas bornée sur D , alors elle n'admet ni un minimum ni un maximum sur D .
5. Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$.

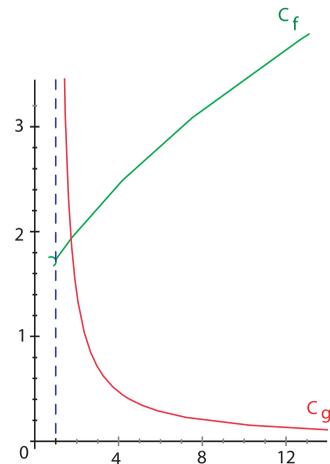
Si la restriction de f à $[1, 3]$ est bornée sur $[1, 3]$, alors f est bornée sur $[0, +\infty[$.

Mobiliser ses compétences

Situation

Dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on a représenté les fonctions f et g définies sur $]1, +\infty[$

$$\text{par } f(x) = \sqrt{x+2} \text{ et } g(x) = \frac{\sqrt{2}}{x-1} .$$



1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
2. On se propose de déterminer par le calcul la solution de l'équation $f(x) = g(x)$.
 - a. Vérifier que si α est une solution de l'équation $f(x) = g(x)$, alors α est une solution de l'équation $(x - 1)^2 (x + 2) = 2$.
 - b. Résoudre l'équation $(x - 1)^2 (x + 2) = 2$.
 - c. En déduire la solution de l'équation $f(x) = g(x)$.
3. Résoudre graphiquement les inéquations $f(x) > g(x)$ et $f(x) < g(x)$.
4. Représenter graphiquement la fonction h définie sur $]1, +\infty[$ par

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{x-1} & \text{si } x \in]1, \alpha], \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x > \alpha . \end{cases}$$

Exercices et problèmes

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition et étudier la parité de chacune des fonctions suivantes.

$$f : x \mapsto \frac{x}{1+x^2} ; \quad g : x \mapsto \sqrt{x} ;$$

$$h : x \mapsto \sqrt{|x|} ; \quad k : x \mapsto x^2 - x + 1.$$

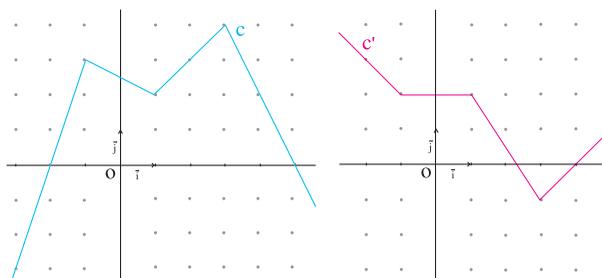
Exercice 2

Soit f et g deux fonctions définies sur un même ensemble D , a et b deux réels.

1. Que peut-on dire des fonctions fg et $af+bg$ lorsque les fonctions f et g sont paires ?
2. Que peut-on dire des fonctions fg et $af+bg$ lorsque les fonctions f et g sont impaires ?

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On a tracé ci-dessous les courbes représentatives respectives C et C' des fonctions f et g .



Dans chacun des cas suivants préciser si f et g admettent un maximum ou un minimum sur I . Dans l'affirmative préciser leurs valeurs et en quel(s) réel(s) ils sont atteints.

a. $I = [-1, 1]$; b. $I = [1, 3]$; c. $I = [-2, 4]$.

Exercice 4

1. Déterminer le minimum sur \mathbb{R} des fonctions ci-dessous.

a. $f : x \mapsto 1 + |x| + 2x^2$.

b. $g : x \mapsto |x+1| - 4$.

2. Déterminer le maximum sur \mathbb{R} des fonctions ci-dessous.

a. $h : x \mapsto \frac{1}{|x|+3} + 1$.

b. $k : x \mapsto \frac{2}{1+x^2} - 3$.

Exercice 5

1. Donner les variations sur $]0, 1[$ de la fonction

$$f : x \mapsto \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

2. En déduire celles de la fonction $g : x \mapsto \frac{2}{x^2 - x}$ sur $]0, 1[$.

3. Quel est le maximum de g sur $]0, 1[$?

Exercice 6

1. Majorer et minorer sur \mathbb{R} la fonction $g : x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

2. a. Montrer que pour tout réel x , $|2x| \leq x^2 + 1$.

b. Majorer et minorer sur \mathbb{R} la fonction $x \mapsto \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1}$.

Exercice 7

1. Majorer et minorer sur $[0, +\infty[$ la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1 + \sqrt{x}} - 2.$$

2. Majorer et minorer sur \mathbb{R} la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1 + (2+x)^2} + 1.$$

3. Majorer et minorer sur \mathbb{R} la fonction

$$x \mapsto \frac{2}{1 + \frac{1}{2+x^2}}.$$

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit P , Q et R les trinômes définis par

$$P(x) = 2x^2 - 5x - 3 ; \quad Q(x) = -x^2 + 2x - 1 ;$$

$$R(x) = -2x^2 + x - 5.$$

1. Déterminer les zéros éventuels de P , Q et R .

2. En déduire, pour chaque trinôme, la position relative de sa courbe représentative et de l'axe des abscisses.

3. Résoudre alors les inéquations $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$; $\frac{R(x)}{Q(x)} < 0$.

Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Tracer la représentation graphique d'une fonction f qui a les caractéristiques suivantes

- la fonction f est définie sur $[-4, 4]$,
- la fonction f est paire,
- $f(0) = 1$,

- la fonction f est majorée par 5 sur $[-4, 4]$,
 - la fonction f est croissante sur $[0, 1]$ et décroissante sur $[1, 4]$,
 - la restriction de f à $[-4, 0]$ admet un minimum égal à -3 .
- A-t-on une unique fonction qui vérifie ces conditions ?

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Tracer les représentations graphiques des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = |2x - 1| - 3x \quad \text{et} \quad g(x) = 2 - 2|x|.$$

2. Résoudre graphiquement dans \mathbb{R} , l'inéquation

$$|2x - 1| + 2|x| > 3x + 2.$$

Exercice 11

Soit f le trinôme défini sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 - 4x$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Tracer C_f .
2. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 2x^2 - 4|x|$.
 - a. Etudier la parité de g .
 - b. Vérifier que les restrictions de f et g à $[0, +\infty[$ sont égales.
 - c. Tracer alors C_g la courbe représentative de g .

Exercice 12

En utilisant des considérations sur la somme de fonctions, donner le sens de variation des fonctions suivantes.

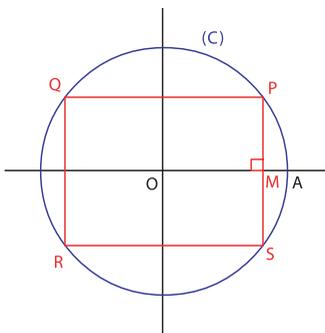
a. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

b. $g(x) = x^2 + 1 + \sqrt{x}$ sur $]0, +\infty[$.

c. $h(x) = 1 - x^2 - \sqrt{x+3}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 13

On considère la figure ci-dessous où (C) est un cercle de centre O et de rayon 1 et M est un point variable sur le segment $[OA]$ distinct de O et de A . On note $OM = x$.

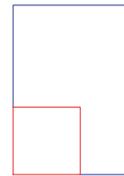


1. Exprimer l'aire $S(x)$ du rectangle PQRS en fonction de x .
2. On désigne par S la fonction qui à x associe $S(x)$.
 - a. Quel est l'ensemble de définition de S ?
 - b. Donner un majorant et un minorant de S .
 3. a. Montrer que pour tout réel x , $4x^2(1-x^2) \leq 1$.
 - b. En déduire que la fonction S est majorée par 2.
4. Pour quelle valeur de x , le quadrilatère PQRS est-il un carré ?

Montrer que la fonction S admet un maximum en cette valeur.

Exercice 14

Dans une feuille rectangulaire de dimension 21cm x 30cm on découpe un carré suivant le schéma ci-dessous. Avec ce carré on réalise un cylindre de révolution.



1. Quelle est la longueur du côté du plus grand carré que l'on puisse obtenir ?
Calculer le volume du cylindre que ce carré permet de réaliser ?
2. On découpe un carré de côté x .
 - a. A quel intervalle appartient x ?
 - b. Exprimer le volume $V(x)$ du cylindre obtenu en fonction de x .
 - c. Déterminer une valeur approchée de x à 1cm près pour laquelle on obtient un cylindre de volume 400 cm^3 .

Exercice 15

1. Soit la fonction $f : t \mapsto -20t^2 + 880t + 100$.

- a. Etudier le signe de f .
- b. Etudier les variations de f .

Le comptable d'une entreprise, créée en janvier 1995, estime que les bénéfices annuels bruts de l'entreprise sont de $B(t) = \sqrt{-20t^2 + 880t + 100}$ en milliers de dinars, t années après sa création.

On note B la fonction qui modélise la situation.

2. Quel est l'ensemble de définition de B ?
3. Donner une estimation des bénéfices annuels bruts en janvier 2000 ?
4. a. A partir des variations de la fonction f , déterminer celles de la fonction B .
- b. En quelle année A_m les bénéfices annuels bruts atteindront-ils leur valeur maximale ? Donner une estimation de ce maximum ?
- c. Quelles prédictions peut-on faire pour l'entreprise après l'année A_m ?

Exercice 16

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Tracer les représentations graphiques des fonctions f et g définies sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1} - 1 \text{ et } g(x) = 2x.$$

2. Résoudre graphiquement sur $[0, +\infty[$, l'inéquation

$$\frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x}} \leq 2\sqrt{x}.$$

Exercice 17

Soit f le trinôme défini par $f(x) = x^2 - 6x + 6$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Donner la forme canonique de f , c'est à dire trouver les réels a , b et c tels que pour tout réel x , $f(x) = a(x+b)^2 + c$.

2. Déterminer les variations de f .

3. Préciser par quelle transformation géométrique obtient-on la courbe C à partir de la parabole d'équation $y = x^2$.

4. Tracer la courbe C .

5. Résoudre graphiquement, puis par le calcul, les inéquations $f(x) \leq 0$, $f(x) < 2$ et $f(x) \geq -4$.

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $[-2, +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+2} - 3.$$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Déterminer les variations de f .

2. Préciser par quelle transformation géométrique obtient-on la courbe C_f à partir de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$.

On considère la fonction h définie sur $[-2, +\infty[$ par $h(x) = -\sqrt{x+2} + 3$ et on désigne par C_h sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

2. Préciser la position relative de C_f et C_h .

3. Tracer C_f et C_h .

4. Soit Q le demi-plan d'inéquation $y \geq 0$ et C la courbe $(C_f \cup C_h) \cap Q$.

a. Mettre en évidence C sur un second graphique.

b. De quelle fonction k , C est-elle la représentation graphique ?

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout réel

x différent de -3 , $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$.

2. Déterminer les variations de f .

3. Tracer la courbe C .

4. Déterminer graphiquement le nombre de solutions

dans \mathbb{R} de l'équation $\frac{x-1}{x+3} = x^2 - 4$.

Exercice 20

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Résoudre graphiquement le système

$$S: \begin{cases} y = \frac{3}{x}, \\ y = x - 2. \end{cases}$$

Exercice 21

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Résoudre graphiquement l'inéquation

$$\frac{x-1}{x-3} \leq 2.$$

Exercice 22

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Résoudre graphiquement l'inéquation

$$\sqrt{x-3} \leq x^2.$$

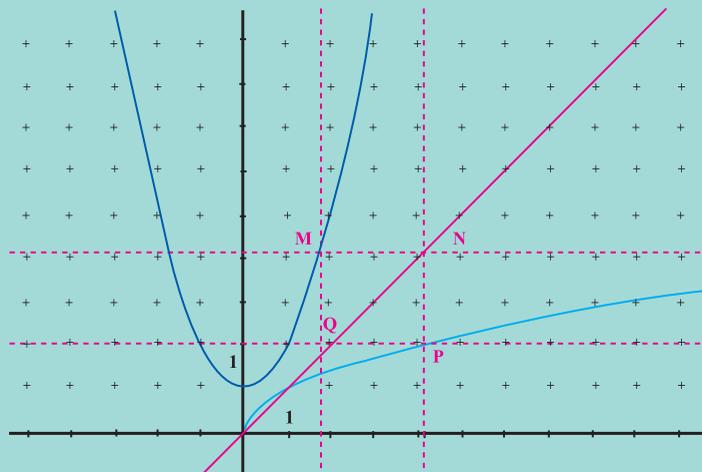
Avec l'ordinateur

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

On désigne par C_f et C_g leurs représentations graphiques respectives dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit D la droite d'équation $y = x$.

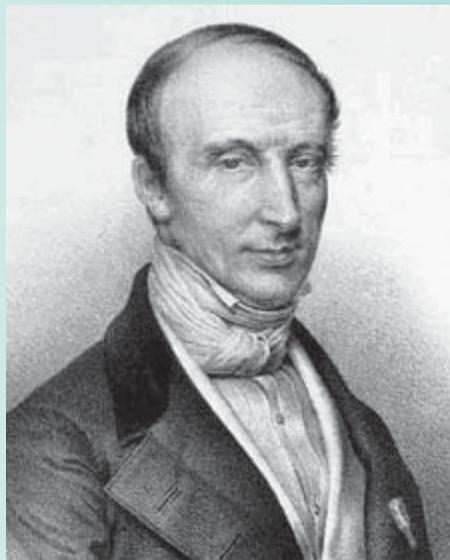
On se propose dans cette séquence, de construire la courbe représentative de la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

1. Ouvrir un nouveau fichier CABRI.
2. Montrer les axes, ainsi que la grille.
3. a. Afficher l'expression $x^2 + 1$.
b. Appliquer l'expression $x^2 + 1$ (la courbe C_f est alors tracée).
4. a. Afficher l'expression \sqrt{x} en tapant $x^{0.5}$.
b. Appliquer cette expression (la courbe C_g est alors tracée).
5. a. Afficher l'expression x .
b. Appliquer cette expression (la droite D d'équation $y = x$ est alors tracée).
6. Sélectionner un point sur C_f que l'on nommera M .
7. Construire le point N de D ayant la même ordonnée que celle de M .
Expliquer la construction.
8. Construire le point P de C_g ayant la même abscisse que celle de N .
9. Construire le point Q tel que le quadrilatère $MNPQ$ soit un rectangle.



10. Avec l'outil « Lieu », tracer le lieu des points Q lorsque M varie sur C_f .
Montrer qu'une équation de ce lieu est $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

Augustin Cauchy publi^a en 1821 ses *Cours d'analyse*, qui eurent très grande audience et constituèrent le premier exposé rigoureux sur les fonctions numériques. Rénovant l'analyse fonctionnelle, il formalise, en particulier, les notions de limite, de fonction et de continuité sur un intervalle.



Continuité

« Quelque fois on a besoin de dire des choses difficiles, mais on devrait tâcher de les dire aussi simplement que l'on peut. »

Hardy

Chapitre 2

Pour commencer

Activité 1

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes.

$$1) |x-1| < \frac{1}{2} \quad ; \quad 2) \left| x + \frac{1}{2} \right| < 0.1 \quad ; \quad 3) |x-2| > 0.2 \quad .$$

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Représenter sur l'axe des ordonnées l'ensemble des réels y tels que $|y-2| < \frac{1}{2}$.
2. Représenter sur l'axe des abscisses l'ensemble des réels x tels que $|x+1| < 0.2$.
3. En déduire l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que

$$\begin{cases} |x+1| < 0.2, \\ |y-2| < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Tracer la parabole d'équation $y = x^2$.
2. a. Représenter l'ensemble des points $M(x, y)$ de la courbe, tels que $y \in]0.5, 1.5[$.
b. Déterminer graphiquement l'ensemble des abscisses de ces points.

1. Continuité en un réel

Activité 1

Soit f la fonction définie pour tout réel x par

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x > 1, \\ 3 & \text{si } x = 1, \\ 3x & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

- Représenter la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- a. Représenter sur l'axe des ordonnées, l'ensemble des réels y tels que $|y-3| < 0.1$.
b. En déduire graphiquement, une condition suffisante sur x pour que $|f(x)-3| < 0.1$.
- Donner graphiquement une condition suffisante sur x pour que $|f(x)-3| < 0.01$.

L'activité précédente suggère que $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de $f(1)$, dès que x est suffisamment proche de 1.

On dit que f est continue en 1.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

On dit que la fonction f est continue en a si pour tout nombre $\beta > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que si x appartient à I et $|x-a| < \alpha$, alors $|f(x)-f(a)| < \beta$.

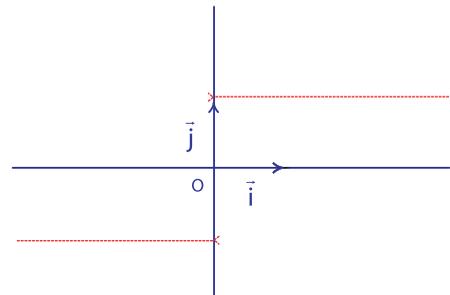
Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On a représenté la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- Reproduire la figure.
- Calculer $|f(x)-f(0)|$.
- Peut-on rendre la quantité $|f(x)-f(0)|$ aussi petite que l'on veut, en rapprochant x de 0 ?

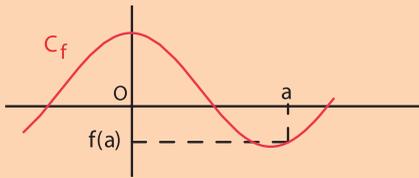


L'activité précédente illustre le cas d'une fonction non continue en 0.

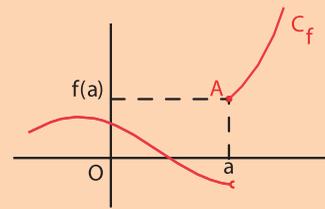
Vocabulaire

Une fonction non continue en a est dite discontinue en a .

Conséquence



Lorsque la représentation graphique de f sur un intervalle ouvert I , met en évidence un tracé continu de la courbe la fonction f est continue en tout réel a de I .



Lorsque la représentation graphique de f sur un intervalle ouvert I met en évidence un saut du tracé de part et d'autre du point $A(a, f(a))$, la fonction f est discontinue en a .

2. Continuité de certaines fonctions usuelles

Activité 1

Dans chacun des cas ci-dessous, représenter la fonction et vérifier, en utilisant le graphique, qu'elle est continue en a .

- La fonction $x \mapsto \sqrt{3}$; $a = -0.5$.
- La fonction $x \mapsto 2x$; $a = -1$.
- La fonction $x \mapsto |x|$; $a = -3$.
- La fonction $x \mapsto -3x + 4$; $a = 2$.

Le théorème suivant concerne la continuité de certaines fonctions usuelles, déjà rencontrées dans les années précédentes.

Théorème (admis)

Toute fonction constante est continue en tout réel a .

La fonction $x \mapsto x$ est continue en tout réel a .

Toute fonction linéaire est continue en tout réel a .

Toute fonction affine est continue en tout réel a .

La fonction $x \mapsto x^2$ est continue en tout réel a .

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout réel non nul a .

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en tout réel strictement positif a .

Toute fonction polynôme est continue en tout réel.

Toute fonction rationnelle est continue en tout réel où elle est définie.

Activité 2

Dans chacun des cas suivants, justifier la continuité de la fonction f en a .

- $f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 1$; $a = 0$.
- $f(x) = x^{30} - 3(x^2 + 2x + 1)^2 + \frac{1}{100}$; $a = \sqrt{2}$.

$$1. f(x) = \frac{1}{-2x + 1} \quad ; \quad a = 0.3.$$

$$2. f(x) = \frac{x^3 - 1}{(-x^2 + 3)^2} \quad ; \quad a = 1.$$

3. Continuité de la fonction |f|

Activité 1

1. Montrer que pour tous réels c et d, on a $||c| - |d|| \leq |c - d|$.
2. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a.
Montrer que si f est continue en a, alors |f| est continue en a.

On a donc obtenu le théorème ci-dessous.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
Si f est continue en a, alors |f| est continue en a.

Activité 2

Dans chacun des cas suivants, justifier la continuité de la fonction f en a.

$$1. f : x \mapsto |2x - 1| \quad ; \quad a = -3.$$

$$2. f : x \mapsto \frac{1}{|x|} \quad ; \quad a = 2.$$

$$3. f : x \mapsto \left| \frac{x^3 - x + 1}{x - 1} \right| \quad ; \quad a = 1986.$$

4. Opérations algébriques sur les fonctions continues

Le théorème ci-dessous que nous admettrons, concerne la somme, le produit et le quotient de fonctions continues en un réel.

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I. Soit a un réel de I et k un réel.

Si f et g sont continues en a alors les fonctions f + g, fg et kf sont continues en a.

Si f est continue en a et si f(a) ≠ 0 alors la fonction $\frac{1}{f}$ est continue en a.

Si f et g sont continues en a et si g(a) ≠ 0 alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en a.

Activité 1

Dans chacun des cas suivants, justifier la continuité de la fonction f en a.

$$1. f(x) = x^2 - \frac{1}{x} + |x| ; a = -\frac{3}{2}.$$

$$2. f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1} ; a = -1.$$

$$3. f(x) = \frac{|x|(x-5)}{(x^2+1)(x-3)} ; a = 0.31.$$

5. Continuité de la fonction \sqrt{f}

Activité 1

1. Représenter la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$, dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

2. a. Montrer que $\sqrt{1+x} - \sqrt{2} = \frac{x-1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{2}}$.

b. En déduire que $|\sqrt{1+x} - \sqrt{2}| \leq \frac{|x-1|}{\sqrt{2}}$.

c. La fonction f est-elle continue en 1 ?

Activité 2

Soit f une fonction positive sur un intervalle ouvert I . Soit a un réel de I tel que f soit continue en a .

1. On suppose que $f(a) > 0$.

a. Montrer que pour tout réel x de I , $\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(a)} = \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(a)}}$.

b. En déduire que pour tout réel x de I , $|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(a)}| \leq \frac{|f(x) - f(a)|}{\sqrt{f(a)}}$.

c. En déduire que \sqrt{f} est continue en a .

2. On suppose que $f(a) = 0$.

a. Ecrire la définition de la continuité de f en a .

b. En déduire que \sqrt{f} est continue en a .

On a donc obtenu le théorème ci-dessous.

Théorème

Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

Si f est continue en a , alors la fonction \sqrt{f} est continue en a .

Activité 3

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f en a .

1. $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$; $a = 3$.

2. $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-2x+1}{x+1}}$; $a = 1$.

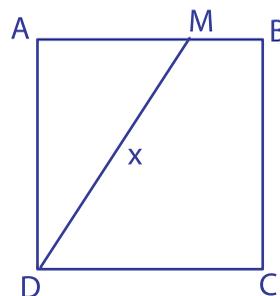
3. $f(x) = \sqrt{\frac{|x-3|}{x+2}}$; $a = 2$.

Activité 4

Dans la figure ci-contre ABCD est un carré de côté 1, M est un point du segment $[AB]$, distinct de A et B et tel que $DM = x$.

On désigne par f la fonction $x \mapsto AM$.

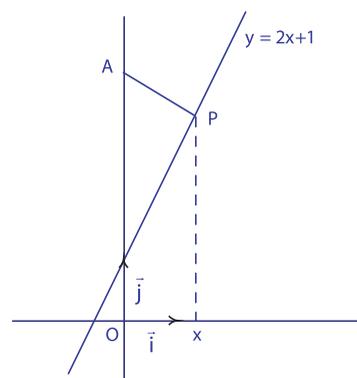
1. Donner l'ensemble de définition I de f .
2. Montrer que f est continue en tout point de I .



Activité 5

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère la droite D d'équation $y = 2x + 1$ et le point $A(0, 4)$. A tout réel x , on associe le point P appartenant à la droite D , d'abscisse x .

1. Calculer AP en fonction de x .
2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = AP$.
 - a. Montrer que la fonction f est continue pour tout réel x .
 - b. Montrer que la fonction f admet un minimum sur \mathbb{R} que l'on déterminera.



6. Continuité à droite. Continuité à gauche

Activité 1

Soit f la restriction à l'intervalle $]0, 3[$ de la fonction partie entière $x \mapsto E(x)$.

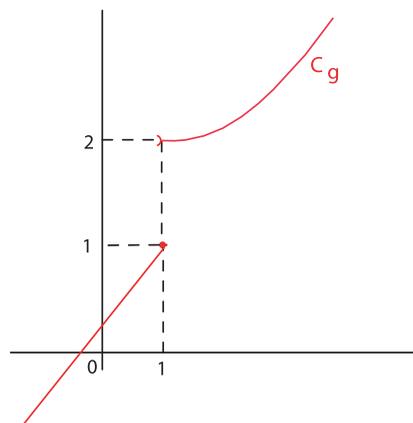
1. Représenter graphiquement f dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2. La fonction f est-elle continue en 2 ? Justifier graphiquement.
3. Que peut-on dire de $|E(x) - 2|$, lorsque que x est suffisamment proche de 2 en restant supérieur à 2 ?
4. Que peut-on dire de $|E(x) - 2|$ lorsque x se rapproche de 2 en restant inférieur à 2 ?

Activité 2

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On a représenté ci-contre, une fonction g définie sur \mathbb{R} .

1. La fonction g est-elle continue en 1 ?
2. Déterminer graphiquement $g(1)$.
3. Donner graphiquement une condition suffisante sur les réels x inférieurs à 1, pour que $|g(x) - g(1)| \leq 0.1$.
4. Que peut-on conjecturer sur $|g(x) - g(1)|$ lorsque x se rapproche de 1 en restant supérieur à 1 ?



Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I .

On dit que la fonction f est continue à droite en a si, pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si x appartient à I et $0 \leq x - a < \alpha$ alors $|f(x) - f(a)| < \beta$.

On dit que la fonction f est continue à gauche en a si, pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si x appartient à I et $0 \leq a - x < \alpha$ alors $|f(x) - f(a)| < \beta$.

Le théorème qui suit, établit le lien entre la continuité en un réel a et la continuité à droite et à gauche en a et se déduit des définitions.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a .

f est continue en a , si et seulement si, f est continue à droite et à gauche en a .

Activité 3

1. Soit la fonction $f: x \mapsto |x^2 + x|$. Etudier la continuité à droite (respectivement à gauche) de f en -1 .
2. Soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt{3x^2 + 4}$. Etudier la continuité à droite de f en 2 .
3. Soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt{\frac{5x^3 - 2}{x + 1}}$. Etudier la continuité à gauche de f en 3 .

Activité 4

Soit f la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

1. Représenter graphiquement f dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2. Montrer que f est continue à droite en 0 .

Théorème (admis)

Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle I et a un réel de I .

- Si f est continue à droite en a , alors la fonction \sqrt{f} est continue à droite en a .
- Si f est continue à gauche en a , alors la fonction \sqrt{f} est continue à gauche en a .

Activité 5

1. Soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt{-2x+1}$. Justifier que f est continue à gauche en 0.5 .
2. Soit la fonction $f: x \mapsto \sqrt{(3x+5)(1-x)}$. Justifier que f est continue à droite en $-\frac{5}{3}$.

7. Continuité sur un intervalle

Définition

- Soit a et b finis ou infinis.
Une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$ est dite continue sur $]a, b[$ si elle est continue en tout réel de $]a, b[$.
- Soit a fini ou infini et b un réel.
Une fonction définie sur un intervalle $]a, b]$ est dite continue sur $]a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à gauche en b .
- Soit a un réel et b fini ou infini.
Une fonction définie sur un intervalle $[a, b[$ est dite continue sur $[a, b[$ si elle est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en a .
- Soit a et b deux réels.
Une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ est dite continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b .

Conséquence

Si une fonction est continue sur un intervalle I , alors elle est continue sur tout intervalle inclus dans I .

Conséquence

Toute fonction polynôme est continue sur tout intervalle contenu dans \mathbb{R} .

Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition.

Activité 1

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} , telle que

- $g(x) = (x-1)^2 + 0.5$ si $x \geq 1$,
- la restriction de g à $] -\infty, 1[$ est une fonction linéaire,
- la fonction g est continue sur \mathbb{R} .

1. Représenter la fonction g dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2. Donner l'expression de $g(x)$ pour tout x de \mathbb{R} .

Activité 2

Justifier les affirmations suivantes.

1. La fonction $x \mapsto |x| + 1$ est continue sur \mathbb{R} .
2. La fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur $[0, 1]$.
3. La fonction $x \mapsto -3x + 5$ est continue sur l'intervalle $] -0.1, 10]$.
4. La fonction $x \mapsto \frac{2x+3}{x-1}$ est continue sur l'intervalle $[-1, 0]$.

5. La fonction $x \mapsto \sqrt{-2x+1}$ est continue sur l'intervalle $] -0.1, 0.3]$.

6. La fonction $x \mapsto \sqrt{-3x+6}$ est continue sur $] -\infty, 2]$.

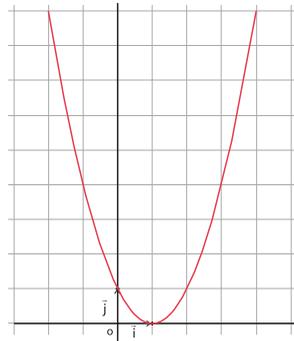
7. La fonction $x \mapsto \frac{2x+1}{x-2}$ est continue sur $] -2, 0[$.

8. Image d'un intervalle par une fonction continue

Activité 1

On a représenté ci-contre la fonction $f : x \mapsto (x-1)^2$.

- Justifier la continuité de f sur \mathbb{R} .
- Reproduire le graphique ci-contre et représenter chacun des ensembles de réels suivants :
 $f([2, +\infty[)$; $f(]-0.2, 0])$; $\{f(x) ; -0.5 \leq x \text{ et } x \neq 2\}$.
 Lequel de ces ensembles n'est pas un intervalle ?
- Montrer que $f([3, 4]) = [4, 9]$.
- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 5$.



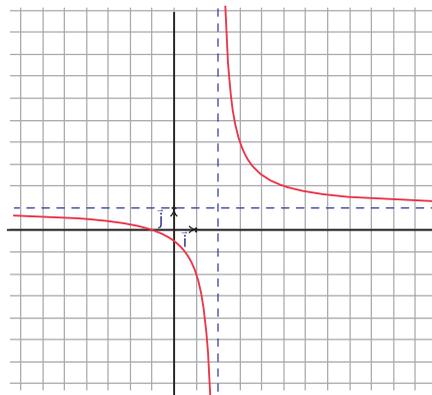
Soit f une fonction définie sur une partie D de \mathbb{R} et A une partie de D . L'ensemble des réels $f(x)$ tels que x appartient à A est noté $f(A)$.

On écrit alors $f(A) = \{f(x) ; x \in A\}$.

Activité 2

On a représenté ci-contre la fonction $f : x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$.

- Justifier la continuité de f sur chacun des intervalles $] -\infty, 2[$ et $] 2, +\infty[$.
- Reproduire le graphique ci-contre et représenter les ensembles ci-dessous.
 a. $f(]-1, 2])$. b. $f(]-3, 5[\setminus \{2\})$.



Activité 3

1. Représenter dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0, \\ 3 & \text{si } x = 0, \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- Montrer graphiquement que f n'est pas continue en 0.
- Déterminer $f(\mathbb{R})$. Cet ensemble est-il un intervalle ?
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ ne possède pas de solution.
- Que peut-on dire de l'équation $f(x) = a$; $a \neq 0$?

Théorème (admis)

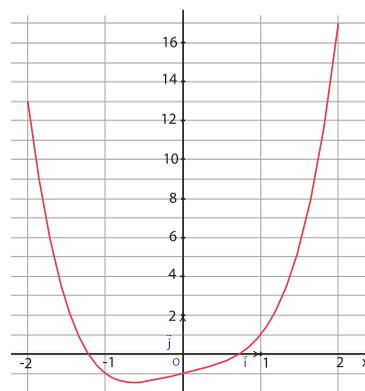
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

9. Résolution d'équations de la forme $f(x) = k$

Activité 1

On a représenté dans le graphique ci-contre la fonction $x \mapsto x^4 + x - 1$.

Donner un encadrement d'amplitude 0.5 des solutions de chacune des équations $f(x) = 2$; $f(x) = 8$.



Activité 2

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^3 - 3$.

1. Montrer que f est croissante sur $[0, +\infty[$.
2. Déterminer l'intervalle $f([0, 2])$.
3. En déduire que l'équation $x^3 - 3 = 0$ possède une solution dans l'intervalle $[0, 2]$.

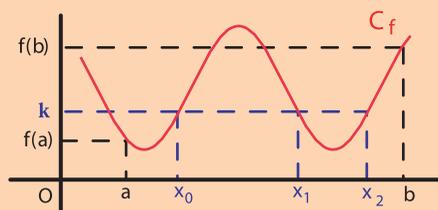
Activité 3

1. a. Représenter les fonctions $f : x \mapsto 5\sqrt{x}$ et $g : x \mapsto x^2 + 1$.
 b. Résoudre graphiquement l'équation (E): $5\sqrt{x} - x^2 - 1 = 0$.
 c. Donner un encadrement d'amplitude 0.1 de la solution de l'équation (E).
2. On considère la fonction $h : x \mapsto 5\sqrt{x} - x^2 - 1$.
 a. Calculer $h(0)$ et $h(1)$.
 b. Justifier que 0 appartient à l'intervalle $h([0, 1])$.
 c. En déduire que l'équation (E) possède au moins une solution dans l'intervalle $[0, 1]$.

Le théorème suivant, que nous admettons, nous donne une condition suffisante pour qu'une équation de la forme $f(x) = k$ possède une solution.

Théorème (admis)

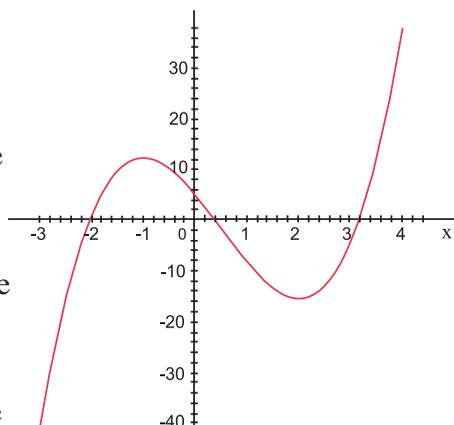
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I .
 Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.
 Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.



Activité 4

Dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on a représenté la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$.

- Justifier la continuité de f sur \mathbb{R} .
- Calculer $f(-3)$ et $f(-2)$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-3, -2]$.
 - Calculer $f(0)$ et $f(1)$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, 1]$.
 - Calculer $f(3)$ et $f(4)$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[3, 4]$.
 - Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions réelles distinctes.
- On désigne par α la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[0, 1]$.
 - Donner une valeur approchée à l'unité près par défaut de α .
 - Calculer $f(0.1)$, $f(0.2)$, $f(0.3)$, $f(0.4)$, $f(0.5)$, $f(0.6)$, $f(0.7)$, $f(0.8)$, $f(0.9)$.
et en déduire une valeur approchée à 0.1 près par défaut de α .
 - Donner une valeur approchée à 0.01 près par défaut de α .
- On désigne par β la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[-3, -2]$.
Donner une valeur approchée, à 0.1 près par défaut, de β .
- On désigne par λ la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[3, 4]$.
Donner une valeur approchée, à 0.1 près par excès, de λ .

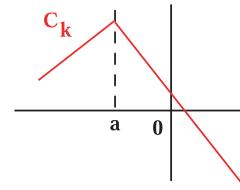
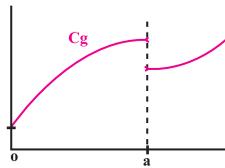
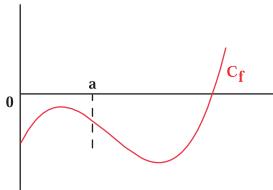


QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , C_f , C_g et C_k sont les courbes représentatives de trois fonctions f , g et k .



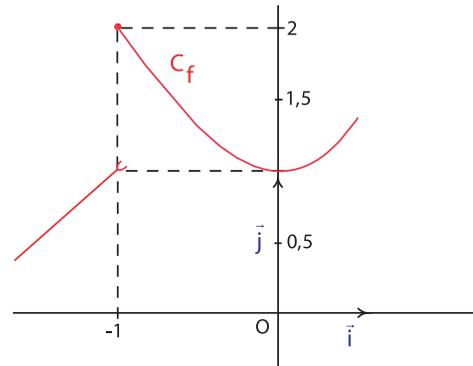
Une seulement parmi ces fonctions est discontinue en a , laquelle ?

- f g h .

2. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x+1}$ est continue en

- 0 -2 $-\frac{1}{2}$.

3. Dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , C_f est la courbe représentative de la fonction f . Alors f est continue



- en -1 à droite en -1 à gauche en -1 .

4. L'équation $4\sqrt{x+1} - x^2 - 3 = 0$ possède une solution dans

- $[0, 1]$ $[-1, 0]$ $[2, 3]$.

5. La fonction $E : x \mapsto E(x)$ est continue sur

- $[1, 2[$ $[1, 2]$ $]1, 2]$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

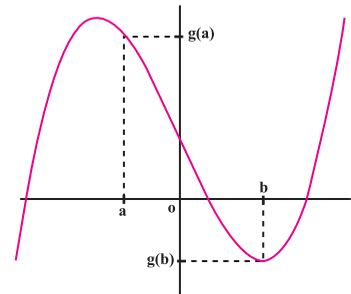
- Si f est continue en a , alors f est continue à droite en a .
- Si f n'est pas continue en a , alors f n'est pas continue à droite en a .
- Si f n'est pas continue à gauche en a , alors f n'est pas continue à droite en a .
- f n'est pas continue en a , si et seulement si, f n'est pas continue à droite en a ou à gauche en a .
- Si $|f|$ est continue en a alors f est continue en a .

Mobiliser ses compétences

Situation 1

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On a représenté ci-contre la courbe représentative d'une fonction g définie sur un intervalle ouvert.



1. Soit un réel a tel que la fonction g est continue en a et $g(a) > 0$.

a. Représenter l'ensemble des points $M(x, g(x))$ tels que

$$\frac{1}{2} g(a) < g(x) < \frac{3}{2} g(a).$$

b. Montrer qu'il existe un intervalle $]a-h, a+h[$ tel que

$$\text{pour tout } x \in]a-h, a+h[, \text{ on a } g(x) \in \left] \frac{1}{2} g(a), \frac{3}{2} g(a) \right[.$$

c. En déduire que la fonction g reste strictement positive sur cet intervalle.

2. Soit un réel b tel que la fonction g est continue en b et $g(b) < 0$.

Montrer qu'il existe un intervalle $]b-h, b+h[$ sur lequel g reste strictement négative.

Situation 2

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 5x^3 - 10x^2 - 8x + 10$.

1. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans chacun des intervalles $[-2, -1]$, $[0, 1]$ et $[2, 3]$.

b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} exactement trois solutions distinctes.

2. Soit α la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

On se propose de donner encadrement plus précis de α .

a. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

b. Calculer $f\left(\frac{3}{4}\right)$ et en déduire que $\alpha \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

c. Calculer $f\left(\frac{7}{8}\right)$ et en déduire que $\alpha \in \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right]$.

d. Calculer $f\left(\frac{13}{16}\right)$ et en déduire que $\alpha \in \left[\frac{3}{4}, \frac{13}{16}\right]$.

e. Calculer $f\left(\frac{25}{32}\right)$ et en déduire que $\alpha \in \left[\frac{25}{32}, \frac{13}{16}\right]$.

3. Soit β la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-2, -1]$.

Déterminer un intervalle de longueur 0.04 contenant β .

4. Soit λ la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[2, 3]$.

Déterminer un intervalle de longueur 0.04 contenant λ .

Exercices et problèmes

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, justifier la continuité de la fonction f en a .

$$f(x) = \sqrt{3}x^8 - \sqrt{2}x^3 + 3x + 1 ; a = -\sqrt{3}.$$

$$f(x) = \frac{2x^5 - 2x + 1}{x^3 - x + 1} ; a = 0.2.$$

$$f(x) = \sqrt{6}(2x - 5)^3 ; a = -2.8.$$

$$f(x) = 2x^4 - 3x(x + 1) + 5x^5 - 4 ; a = -\sqrt{3}.$$

$$f(x) = \frac{x}{10^2} - 10x^4 + \sqrt{3}x - 1 ; a = -1000500.$$

$$f(x) = \frac{-10^{-3}x^4 + 2}{3x + 10} ; a = -\frac{1}{2}.$$

$$f(x) = \frac{x - 5}{x^4 + 10x^2 + 3} ; a = -0.000251.$$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, justifier la continuité de la fonction f en a .

$$f(x) = \frac{-|x| + 5}{(x - 10)^4} ; a = 201.$$

$$f(x) = \left| \frac{x^2 - 8}{2x + 1} \right| ; a = 2.$$

$$f(x) = \frac{|x - 1||x + 2|}{x - 2} ; a = 51.$$

$$f(x) = \frac{|x|}{4} - |x|^3 - 5|x^5| ; a = 11.$$

$$f(x) = \frac{|x|^3 + 2}{|x| - 2} ; a = -5.$$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, justifier la continuité de la fonction f en a .

$$f(x) = \sqrt{3x + 5} ; a = \frac{2}{3}.$$

$$f(x) = \sqrt{-2x + 3} ; a = 0.01.$$

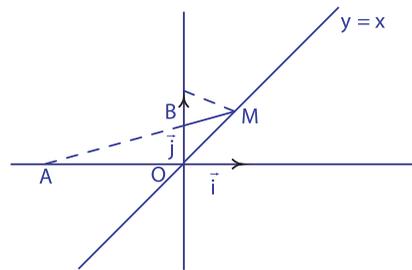
$$f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1} ; a = 1.25.$$

$$f(x) = (x - 4)\sqrt{2x^2 + 3x + 5} ; a = 10.$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3} - 5\frac{x^2 + 2x + 2}{x^4 + 5x + 3} ; a = -1.$$

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Dans la figure ci-dessous, les points $A(-2, 0)$ et $B(0, 1)$ sont fixés et le point M d'abscisse x , varie sur la droite d'équation $y = x$.



Soit la fonction $f : x \mapsto AM + BM$.

1. Donner l'expression de $f(x)$.
2. Justifier que f est continue en tout réel.
3. Déterminer x , pour que le trajet $AM + BM$ soit minimal.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x - 4} & \text{si } x \geq 2, \\ x & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de f dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2. Justifier la continuité de la fonction f sur $[2, +\infty[$.
3. Justifier la continuité de la fonction f sur $]-\infty, 2[$.
4. Vérifier, à l'aide du graphique, que la fonction f n'est pas continue sur \mathbb{R} .

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de f dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2. Justifier la continuité de la fonction f sur $]0, +\infty[$.
3. Justifier la continuité de la fonction f sur $]-\infty, 0[$.

4. Vérifier, à l'aide du graphique, que la fonction f n'est pas continue sur \mathbb{R} .
5. Pour chacune des équations ci-dessous, déterminer, à l'aide du graphique, le nombre de solutions de l'équation.

$$f(x) = 1 \quad ; \quad f(x) = \frac{2}{5} \quad ; \quad f(x) = -\frac{1}{2} \quad ; \quad f(x) = 0.$$

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} telle que

- la fonction f est continue sur \mathbb{R} ,
- f est impaire,
- $f(x) = -x^2 + 3$ si $x \geq 2$,
- la restriction de f à $] -2, 0[$ est une fonction affine.

1. Représenter la fonction f dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2. Donner l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8

$$\text{Soit } f : x \mapsto \frac{x}{2x - |x+1|}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition.

Exercice 9

$$\text{Soit } f \text{ le trinôme défini par } f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5.$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Tracer la courbe C .
2. Quelles sont les images par f de 2 ; -2 ; 0 ; $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{2}$?
3. Quelles sont les images par f des intervalles $I = [1, 3]$, $J =]-2, 2[$ et $K =]-\infty, 0]$?
4. Quels sont les antécédents éventuels par f de 0 , 7 et 9 ?
5. Déterminer l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $[7, 13]$.

Exercice 10

$$\text{Soit } f \text{ le trinôme défini par } f(x) = x^2 - 4x + 1.$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Tracer la courbe C .
2. Quelles sont les images par f des intervalles $I = [2, 3]$, $J = [0, 3]$ et $K = [0, +\infty[$?
3. Déterminer l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $[-2, 6]$.

Exercice 11

$$\text{Soit } f : x \mapsto \sqrt{x+3} - 2.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

2. Tracer la courbe C .
3. Quelles sont les images par f des intervalles $I = [2, 3]$, $J = [0, 5]$ et $K =]-1, +\infty[$.
4. Déterminer l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $[-1, +\infty[$.

Exercice 12

$$\text{Soit } f : x \mapsto -\frac{2}{x-1}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

2. Tracer la courbe C .
3. Quelles sont les images par f des intervalles $I = [2, 4]$, $J = [-1, 0]$ et $K =]-\infty, -3[$?
4. Déterminer l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $]-\infty, 0[$.

Exercice 13

$$\text{Soit } f \text{ la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = x^3.$$

1. Etudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
2. Quelles sont les images par f des intervalles $I = [1, 3]$, $J = [2, 5]$ et $K =]-6, -1]$?

Exercice 14

$$\text{Soit } f \text{ la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = -x^3 - 3x.$$

1. Etudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
2. Quelles sont les images par f des intervalles $I = [2, 3]$, $J = [-5, -3]$ et $K =]3, 4]$?

Exercice 15

$$\text{Soit } f : x \mapsto -\frac{1}{2}x + \sqrt{2x-1}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
4. Donner une valeur approchée par défaut à 0.1 près de α .

Exercice 16

Soit $f : x \mapsto x^3 + 4x + 1$.

1. Justifier la continuité de la fonction f sur \mathbb{R} .
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $[-1, 0]$.
3. Donner une valeur approchée par défaut à 0.1 près de α .

Exercice 17

Soit $f : x \mapsto -2x^3 - 7x + 4$.

1. Justifier la continuité de la fonction f sur \mathbb{R} .
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $[0, 1]$.
3. Donner une valeur approchée par défaut à 0.1 près de α .

Exercice 18

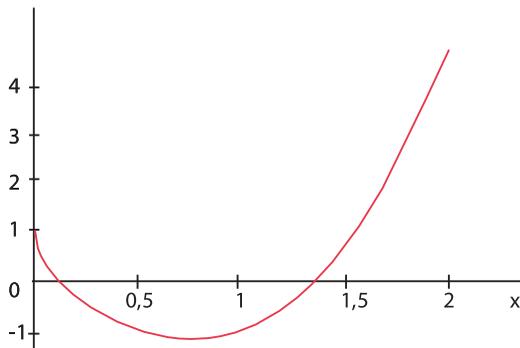
Soit $f : x \mapsto -2x^3 + 2x + 10$.

1. Justifier la continuité de la fonction f sur \mathbb{R} .
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α dans $[1, 2]$.
3. Donner une valeur approchée par défaut à 0.1 près de α .

Exercice 19

1. Dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on a représenté la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^3 - 3\sqrt{x} + 1.$$

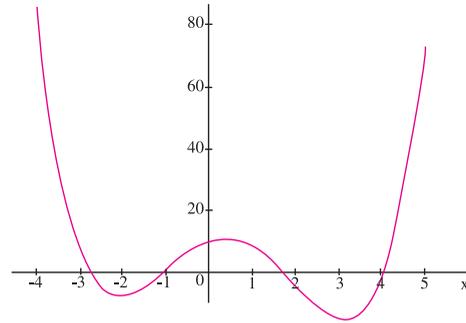


1. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
2. Déterminer graphiquement une valeur approchée à 0.5 près de chacune des solutions de l'équation $f(x) = 0$.
3. Donner une valeur approchée à 0.1 près par défaut de chacune de ces solutions.

Exercice 20

Dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on a représenté la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 6x^2 + 5x + 10.$$



1. Justifier la continuité de la fonction f sur \mathbb{R} .
2. Calculer $f(-3)$ et $f(-2)$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-3, -2]$.
3. Calculer $f(-1.5)$ et $f(-1)$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1.5, -1]$.
4. Calculer $f(1)$ et $f(2)$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1, 2]$.
5. Calculer $f(4)$ et $f(4.5)$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[4, 4.5]$.
6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans \mathbb{R} exactement quatre solutions distinctes.
7. Donner une valeur approchée à 0.1 près par défaut de chacune des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Avec l'ordinateur

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1, 2]$ par $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

On considère l'équation (E) : $f(x) = 0$. Comme $f(1).f(2) < 0$, il existe au moins une solution α dans $[1, 2]$ de l'équation (E).

Le but de la séquence, est de donner un encadrement de la racine α en utilisant la dichotomie.

	A	B	C	D	E	F
1	Dichotomie			$\alpha =$	1.83928657	
2	$f(x) =$	x^3-x^2-x-1			Epsilon=	0.0001
3	a	m	b	f(a)	f(m)	f(b)
4	1	1.5	2	-2	-1.375	1
5	1.5	1.75	2	-1.375	-0.453125	1
6	1.75	1.875	2	-0.453125	0.20117188	1
7	1.75	1.8125	1.875	-0.453125	-0.14331055	0.20117188
8	1.8125	1.84375	1.875	-0.14331055	0.02450562	0.20117188
9	1.8125	1.826125	1.84375	-0.14331055	-0.06049728	0.02450562
10	1.828125	1.8359375	1.84375	-0.06049728	-0.01827097	0.02450562
11	1.8359375	1.83984375	1.84375	-0.01827097	0.00304836	0.02450562
12	1.8359375	1.837890625	1.83984375	-0.01827097	-0.00762852	0.00304836
13	1.83789063	1.838867188	1.83984375	-0.00762852	-0.00229439	0.00304836
14	1.83886719	1.839355469	1.83984375	-0.00229439	0.00037591	0.00304836
15	1.83886719	1.839111328	1.839355469	-0.00229439	-0.00095951	0.00037591
16	1.83911133	1.839233398	1.839355469	-0.00095951	-0.00029187	0.00037591
17	1.83923334	1.839294434	1.839355469	-0.00029187	4.2004E-05	0.00037591
18	1.83923334	1.839263916	1.839294434	-0.00029187	-0.00012494	4.2004E-05
19	1.83926392	1.839279175	1.839294434	-0.00012494	-4.1467E-05	4.2004E-05
20	1.83927917	1.839286804	1.839294434	-4.1467E-05	2.6797E-07	4.2004E-05
21	1.83927917	1.83928299	1.839286804	-4.1467E-05	-2.06E-05	2.6797E-07
22	1.83928299	1.839284897	1.839286804	-2.06E-05	-1.0166E-05	2.6797E-07
23	1.8392849	1.839285851	1.839286804	-1.0166E-05	-4.949E-06	2.6797E-07
24	1.83928585	1.839286327	1.839286804	-4.949E-06	-2.3405E-06	2.6797E-07
25	1.83928633	1.839286566	1.839286804	-2.3405E-06	-1.0363E-06	2.6797E-07

Après avoir tapé a, m, b, f(a), f(m) et f(b) respectivement dans les cellules A2, B2, C2, D2, E2 et F2, on donne la valeur 1 au réel a et 2 au réel b.

- Dans la cellule B4, on inscrit la formule : $=(A4+C4)/2$.
- Dans la cellule D4, on écrit la formule : $=A4^3-A4^2-A4-1$.
- Dans la cellule F4, on écrit la formule : $=C4^3-C4^2-C4-1$.
- Dans la cellule E4, on écrit la formule : $=B4^3-B4^2-B4-1$.
- Dans la cellule A5, on écrit la formule : $=Si(D4*E4<=0;A4;B4)$ pour exprimer que si $f(a).f(m) \leq 0$, la borne « a » ne changera pas de valeur, sinon elle prendra pour valeur celle de B4.
- Dans la cellule C5, on écrit la formule : $=Si(D4*E4<=0;B4;C4)$ pour exprimer que si $f(a).f(m) \leq 0$, la borne « b » prendra pour valeur celle de B4, sinon elle ne changera pas de valeur.
- Enfin, sélectionner la plage A5 : F5 et la recopier vers le bas.
- Dans la cellule B25, on trouve une valeur approchée de α .

Math – culture

Lorsque nous lisons, nous n'apercevons qu'un seul point du livre sur toute demi-droite issue de notre œil.

La distance de notre œil à ce point est une fonction, par exemple de l'angle avec l'horizontale. Cette fonction, contrairement à ce que notre intuition suggère, n'est pas continue. Une infime variation de l'angle peut engendrer un saut qui mesure, par exemple, la distance entre le bord du livre et tout objet opaque situé derrière le livre.



Math – culture

Limites et continuité

« Tout le monde veut vivre au sommet de la montagne, sans soupçonner que le vrai bonheur est dans la manière de gravir la pente. »

Marquez

Chapitre 3

Pour commencer

Activité 1

Déterminer l'ensemble de définition et représenter la fonction $f : x \mapsto \frac{|x|}{x}$.

Activité 2

Déterminer l'ensemble de définition et représenter la fonction g telle que

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 1, \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Activité 3

1. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

a. $0 < |y+2| < \frac{1}{2}$.

b. $0 < |x-1| < 0.2$.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Représenter l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que

$$\begin{cases} 0 < |x-1| < 0.2, \\ 0 < |y+2| < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Cours

1. Limite finie en un réel

Activité 1

On considère la fonction f définie, pour tout réel x distinct de 1, par $f(x) = \frac{(x-1)^2}{|x-1|} + 2$.

La fonction f n'étant pas définie en 1, nous nous intéressons dans cette activité aux réels $f(x)$, lorsque x est proche de 1.

1. Recopier et compléter le tableau suivant.

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$						

Que peut-on conjecturer sur $f(x)$ lorsque x se rapproche de 1 ?

- a. Donner l'expression de $f(x)$, sans valeur absolue.
b. Représenter f dans un repère orthonormé.
- Déterminer graphiquement une condition suffisante sur x pour que $f(x)$ appartienne à $]1.9, 2.1[$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel a de I . On dit que $f(x)$ tend vers le réel L lorsque x tend vers a , si pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si x appartient à I et $0 < |x - a| < \alpha$, alors $|f(x) - L| < \beta$.

Théorème (admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , sauf peut-être en un réel a de I . Si f admet une limite en a alors cette limite est unique.

Notation et vocabulaire

Si $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers a , on écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ou $\lim_a f = L$ et on dit que f admet pour limite L en a .

2. Limite en un réel a d'une fonction continue en a .

Activité 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

- On suppose que f est continue en a .
 - Ecrire la définition de la continuité de f en a .
 - En déduire que f admet une limite en a , que l'on déterminera.
- On suppose que f admet pour limite en a le réel $f(a)$.
Montrer que f est continue en a .

On a donc obtenu le théorème ci-dessous.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .
 f est continue en a , si et seulement si, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en a .

1. $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$; $a = 2$.

2. $f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x - 1}$; $a = -2$.

3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$; $a = 1$.

3. Calcul de limites

Activité 1

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = |x|$.

1. Ecrire la définition de la continuité de g en 0 .

2. Soit f la fonction définie pour tout réel non nul x , par $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$.

a. Montrer que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \neq 0$.

b. En déduire que f admet une limite en 0 , que l'on déterminera.

Activité 2

Soit g une fonction définie sur un intervalle ouvert I et continue en un réel a de I .

1. Ecrire la définition de la continuité de g en a .

2. Soit f une fonction définie sur I , sauf peut-être en a et telle que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \neq a$.

Montrer que f admet une limite en a , que l'on déterminera.

On a donc obtenu le théorème ci-dessous.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel a de I et soit g une fonction définie sur l'intervalle I .

Si g est continue en a et si $g(x) = f(x)$ pour tout $x \neq a$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(a)$.

Activité 3

1. On considère les fonctions $f : x \mapsto \frac{x^3 + 1}{x + 1}$ et $g : x \mapsto x^2 - x + 1$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f ainsi que celui de g .

b. Montrer que $f(x) = g(x)$, pour tout $x \neq -1$.

c. En déduire $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

2. a. Montrer que pour tout réel $x \neq 2$, $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$.

b. En déduire que la fonction $h : x \mapsto \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ admet une limite en 2. Déterminer cette limite.

3. a. Montrer que pour tout réel $x \neq 0$, $\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1}$.

b. En déduire que la fonction $k : x \mapsto \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ admet une limite en 0. Déterminer cette limite.

4. Calculer la limite de la fonction f en a .

$$f(x) = \frac{x^4 - 16}{-x^2 + 4} ; \quad a = 2.$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3}}{x-1} ; \quad a = 1.$$

$$f(x) = \left| \frac{x^2 - 2x + 1}{x-1} \right| ; \quad a = 1.$$

4. Prolongement par continuité

Activité 1

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq 0$, par $f(x) = \frac{x^3 - x}{x}$ et la fonction g

définie par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0, \\ -1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Vérifier que $g(x) = x^2 - 1$, pour tout réel x .
2. En déduire que g est continue en 0.
3. Déterminer la limite de f en 0.

Activité 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf en un réel a de I .

On suppose que $\lim_a f = L$.

On considère la fonction F définie par $F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a, \\ L & \text{si } x = a \end{cases}$,

Montrer que F est continue en a .

On a donc obtenu le théorème ci-dessous.

Théorème et définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf en un réel a de I et admettant une limite L en a .

Alors la fonction F définie par $F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ L & \text{si } x = a \end{cases}$ est continue en a .

Vocabulaire

On dit que la fonction F est le prolongement par continuité en a de la fonction f .

On dit aussi que f est prolongeable par continuité en a .

5. Opérations sur les limites finies

Activité 1

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel a de I , telles que f et g admettent pour limites respectives L et L' en a .

On désigne par F et G les fonctions définies respectivement par

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ L & \text{si } x = a \end{cases}, \quad \text{et} \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq a \\ L' & \text{si } x = a \end{cases}$$

1. Justifier que F et G sont continues en a .

2. En déduire que $\lim_a (f + g) = L + L'$.

En utilisant un procédé analogue, on peut démontrer les résultats qui figurent dans le théorème ci-dessous.

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel a de I et telles que f et g admettent pour limites respectives L et L' en a . Alors

$$\lim_a (f+g) = L + L' \quad ; \quad \lim_a kf = kL, \text{ pour tout réel } k \quad ; \quad \lim_a (fg) = LL' \quad ; \quad \lim_a |f| = |L|.$$

$$\text{Si } L \neq 0 \text{ alors } \lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{L} \quad . \quad \text{Si } L' \neq 0 \text{ alors } \lim_a \frac{f}{g} = \frac{L}{L'}.$$

Activité 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en a .

1. $f(x) = \frac{x^3 - 2\sqrt{2}}{x - \sqrt{2}} + x \quad ; \quad a = \sqrt{2}$.

2. $f(x) = \left| \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} \right| - \frac{1}{5 - |x|} \quad ; \quad a = -3$.

6. Limite et ordre

Activité 1

Soit f une fonction définie sur intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel a de I et admettant une limite L en a .

1. Quelle est la limite de $|f|$ en a ?
2. On suppose que $f(x)$ est positif, pour tout réel x distinct de a et appartenant à I .
Dédurre de l'unicité de la limite que $L \geq 0$.
3. On suppose que $f(x)$ est négatif, pour tout réel x distinct de a et appartenant à I .
Montrer que $L \leq 0$.

On a donc obtenu le théorème ci-dessous.

Théorème

Soit f une fonction définie sur intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel a de I et admettant pour limite L en a .

Si $f(x)$ est positif pour tout réel x distinct de a , alors $L \geq 0$.

Si $f(x)$ est négatif pour tout réel de x distinct de a , alors $L \leq 0$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel a de I et admettant pour limite L en a .

Si $f(x)$ est positif pour tout réel x distinct de a , alors $\lim_a \sqrt{f} = \sqrt{L}$.

Activité 2

Déterminer la limite de la fonction f en a .

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2}{x + 2}} \quad ; \quad a = -2.$$

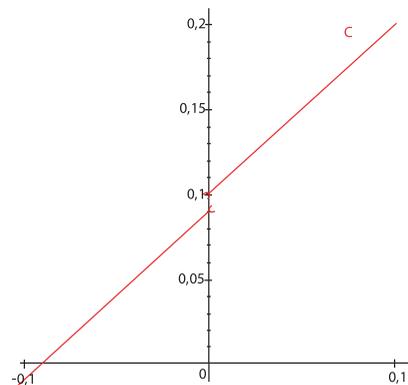
7. Limite à droite. Limite à gauche

Activité 1

Dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , C est la courbe représentative de la fonction h définie sur $[-0.1, 0.1] \setminus \{0\}$ par

$$h(x) = \begin{cases} x + 0.09 & \text{si } -0.1 \leq x < 0 \\ x + 0.1 & \text{si } 0 < x \leq 0.1. \end{cases}$$

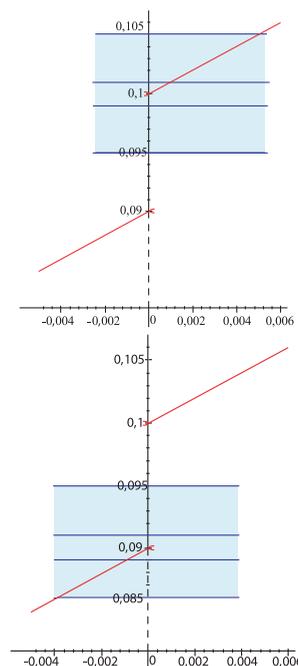
La fonction h n'est pas définie en 0 .



Dans cette activité nous nous intéressons aux réels $h(x)$ tels que x soit proche de 0.

1. En observant le graphique ci-contre, donner une condition suffisante sur x pour que $h(x)$ appartienne à $]0.095, 0.105[$.

2. En observant le graphique ci-contre, donner une condition suffisante sur x pour que $h(x)$ appartienne à $]0.085, 0.095[$.



Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel a de I . On dit que la fonction f admet pour limite L à droite en a , si pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si x appartient à I et $0 < x - a < \alpha$ alors $|f(x) - L| < \beta$.

On écrit $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ ou $\lim_{a^+} f = L$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = L$.

On dit que la fonction f admet pour limite le réel L à gauche en a , si pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si x appartient à I et $0 < a - x < \alpha$ alors $|f(x) - L| < \beta$.

On écrit $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ ou $\lim_{a^-} f = L$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = L$.

Le théorème qui suit résulte des définitions.

Théorème (admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel a de I .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, si et seulement si, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$.

8. Limite à droite (ou à gauche) en a et continuité à droite (ou à gauche) en a .

Activité 1

1. Montrer que si f est continue à droite en a , alors elle admet une limite à droite en a . Que vaut cette limite ?

2. Montrer que si f est continue à gauche en a , alors elle admet une limite à gauche en a .
Que vaut cette limite ?

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I .

La fonction f est continue à droite en a , si et seulement si, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

La fonction f est continue à gauche en a , si et seulement si, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Activité 2

Calculer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^-} 2x+5 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x-1}{x+1} .$$

Activité 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -1 , \\ 1 & \text{si } x > -1 . \end{cases}$$

1. Représenter f dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2. a. Calculer la limite à gauche en -1 de la fonction $x \mapsto x + 1$.
b. En déduire la limite de f à gauche en -1 .
3. Calculer la limite de f à droite en -1 .

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b[$ sauf peut-être en a et g une fonction définie sur un intervalle contenant $[a, b[$.

Si g est continue à droite en a et si $g(x) = f(x)$ pour tout x de $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g(a)$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, b]$ sauf peut-être en b et g une fonction définie sur un intervalle contenant $]a, b]$.

Si g est continue à gauche en b et si $g(x) = f(x)$ pour tout x de $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = g(b)$.

Activité 4

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 9}{\sqrt{(x-3)^2}}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Donner l'expression de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
3. a. Calculer la limite de f à droite en 3 .
b. Calculer la limite de f à gauche en 3 .
c. La fonction f admet-elle une limite en 3 ?

Activité 5

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{x+1}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Donner l'expression de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
3. a. Calculer la limite de f à droite en -1 .
b. Calculer la limite de f à gauche en -1 .
c. La fonction f admet-elle une limite en -1 ?

Activité 6

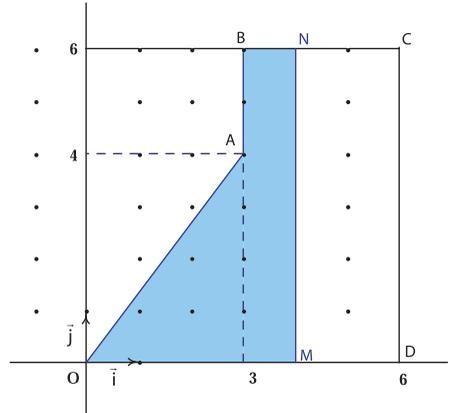
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Dans la figure, $OABCD$ est un polygone.

Pour tout réel x appartenant à $]0,6]$,

on désigne par M le point du segment $[OD]$ d'abscisse x .

La droite passant par M et parallèle à l'axe des ordonnées coupe la ligne brisée $OABC$ en un point N .



On désigne alors par $R(x)$ la région du plan délimitée par l'axe des abscisses, la droite (MN) et la ligne brisée $OABC$.

1. a. Représenter $R(x)$ pour x appartenant à $]0, 3]$.
b. Représenter $R(x)$ pour x appartenant à $]3, 6]$.
2. On note $p(x)$ et $a(x)$ le périmètre et l'aire de $R(x)$.
a. Calculer $a(3)$ et $p(3)$.
b. Montrer que

$$a(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^2 & \text{si } 0 < x \leq 3, \\ 6x - 12 & \text{si } 3 < x \leq 6 \end{cases} \quad \text{et} \quad p(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } 0 < x \leq 3, \\ 2x + 10 & \text{si } 3 < x \leq 6. \end{cases}$$

- c. Représenter les fonctions a et p .
- d. Etudier la continuité des fonctions a et p en 3 .

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Si f et g sont continues sur \mathbb{R} et $f(2) = g(2) = -2$, alors $\lim_{x \rightarrow 2} (fg)(x) =$

4 -2 0.

2. Si f et g sont continues sur \mathbb{R} et $f(2) = g(2) = -1$ alors $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f}{g}(x) =$

1 -1 -2.

3. Si f est continue sur \mathbb{R} et $f(2) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)(x^{100} + 4) =$

4 $2^{100} + 4$ 0.

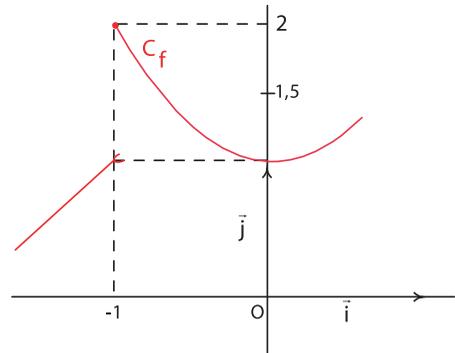
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^{2006} + 1}{(x+1)^{2005}} \right) =$

0 2006 1.

5. Dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , C_f est la courbe représentative de la fonction f .

Graphiquement on a $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

1 2 1.5.



VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si f n'est pas définie en a alors f n'admet pas de limite en a .
2. Si f n'admet pas de limite en a alors f n'est pas continue en a .
3. f admet une limite en a , si et seulement si, f admet une limite à droite en a ou à gauche en a .
4. Si $|f|$ admet une limite en a alors f admet une limite en a .
5. Si $|f|$ admet une limite égale à 0 en a alors f admet une limite égale à 0 en a .

Mobiliser ses compétences

Situation 1

Soit a un réel.

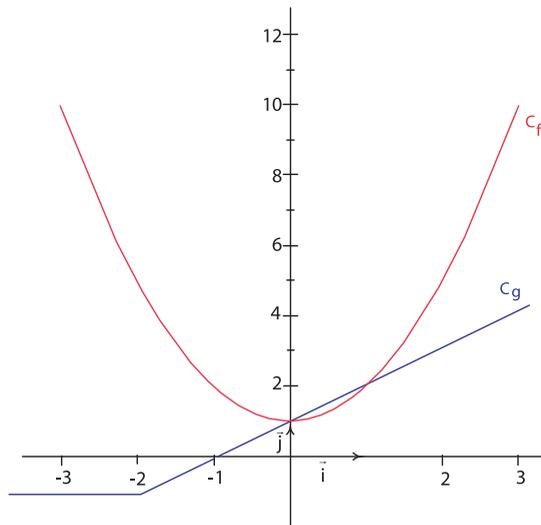
On considère la fonction f définie sur $[-2, +\infty[$ par $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1} & \text{si } x \neq -1, \\ a & \text{si } x = -1. \end{cases}$

Pour quelle valeur de a , la fonction f est-elle continue sur $[-2, +\infty[$?

Situation 2

Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , on a représenté graphiquement

les fonctions $f : x \mapsto x^2 + 1$ et $g : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq -2, \\ x+1 & \text{si } x > -2. \end{cases}$



1. On considère la fonction $h : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0, \\ g(x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$

- a. Donner l'expression de $h(x)$ sur \mathbb{R} .
- b. Etudier la continuité de la fonction h sur \mathbb{R} .

2. On considère la fonction $t : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0, \\ |g(x)| & \text{si } x < 0. \end{cases}$

- a. Représenter graphiquement la fonction t .
- b. Etudier la continuité de la fonction t sur \mathbb{R} .

Exercices et problèmes

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en a .

$$f(x) = x^8 - x^3 + x + 1 \quad ; \quad a = -1.$$

$$f(x) = \frac{6x^4 + x + 1}{x^2 - x + 1} \quad ; \quad a = 0.1.$$

$$f(x) = -x^5 - 2x(x-1) + 5x^3 - 4 \quad ; \quad a = -1.$$

$$f(x) = \frac{x}{10^{10}} - 10x^{21} + \frac{\sqrt{3}}{25}x - 3 \quad ; \quad a = 0.$$

$$f(x) = -3(-2x + 1)^5 \quad ; \quad a = 1.$$

$$f(x) = \frac{-10x^2}{x + 2} \quad ; \quad a = -3.$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+3} \quad ; \quad a = 0.1.$$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en a .

$$f(x) = \left| \frac{x^2 - \sqrt{2}}{2x + 1} \right| \quad ; \quad a = 0.$$

$$f(x) = \frac{-|x| + 50}{(x-10)^2} \quad ; \quad a = 20.$$

$$f(x) = \frac{3|x| + |x - \sqrt{2}|}{|x|^3 + \pi} \quad ; \quad a = 0.$$

$$f(x) = \frac{|-2x|}{3} - 5|x|^3 \quad ; \quad a = -2.$$

$$f(x) = \frac{|x|^5 + 3}{|x| + 1} \quad ; \quad a = -1.$$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en a .

$$f(x) = \sqrt{3x-5} \quad ; \quad a = 8.$$

$$f(x) = \sqrt{-2x+1} \quad ; \quad a = 0.02.$$

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 4} \quad ; \quad a = -1.23.$$

$$f(x) = (-x+5)^2 + \sqrt{2x^2 + 3x + 5} \quad ; \quad a = 0.$$

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 2} - 3 \frac{x^2 - 3x + 2}{x^4 - 8x + 1} \quad ; \quad a = -1.$$

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en a .

$$f(x) = \frac{x(x^2 - 2)}{x - \sqrt{2}} \quad ; \quad a = \sqrt{2}.$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \quad ; \quad a = 1.$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 5x + 6} \quad ; \quad a = 2.$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 1}{x + 2} \quad ; \quad a = -2.$$

$$f(x) = \left| \frac{x^3 + 27}{x + 3} \right| \quad ; \quad a = -3.$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+6} - \sqrt{6}}{\sqrt{x}} \quad ; \quad a = 0.$$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x} \quad ; \quad a = 0.$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \quad ; \quad a = 0.$$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $]-2, 1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ x & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

1. Justifier que f est continue sur chacun des intervalles $]-2, -1[$, $]-1, 0[$ et $]0, 1[$.

2. Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

3. En déduire que f est continue sur $]-1, 1[$ et que f n'est pas continue sur $]-2, 0[$.

Exercice 6

Soit f , g et h les fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad ; \quad g(x) = x - 1$$

$$\text{et } h(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

1. Déterminer les fonctions $f + g$; fg ; fh .

2. Etudier la continuité de chacune des fonctions f ; $f + g$; fg ; fh sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.
3. Etudier la continuité en 1 de chacune des fonctions f ; $f + g$; fg et fh .

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-3)^2}{|x-3|} & \text{si } x \neq 3, \\ 0 & \text{si } x = 3. \end{cases}$$

1. Représenter f dans le plan muni d'un repère.
2. Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 3.
3. La fonction f est-elle continue en 3 ?
4. La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ?

Exercice 8

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & \text{si } x \leq 2, \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 2.
2. La fonction f est-elle continue en 2 ?

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x} & \text{si } x > 0, \\ -1 - \sqrt{-x} & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 0.
2. La fonction f est-elle continue en 0 ?

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 0.
2. La fonction f est-elle continue en 0 ?
3. Etudier la continuité de f sur \mathbb{R} .

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3} \right\} \text{ par } f(x) = \frac{\sqrt{(3x+1)^2}}{3x+1}.$$

1. Déterminer la limite de f à droite en $-\frac{1}{3}$.
2. Déterminer la limite de f à gauche en $-\frac{1}{3}$.
3. La fonction f admet-elle une limite en $-\frac{1}{3}$?

Exercice 12

$$\text{On considère la fonction } f : x \mapsto \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}.$$

Calculer les limites de f en -2 et en 2 .

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x < 2, \\ \frac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

1. Déterminer la limite de f à droite en 2.
2. Déterminer la limite de f à gauche en 2.
3. La fonction f admet-elle une limite en 2 ?
4. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 2 ?

Exercice 14

On considère la fonction f définie sur $]-1, +\infty[\setminus \{0\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - x}.$$

1. Calculer la limite de f en 0.
2. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui définir ce prolongement.

Exercice 15

Etudier la continuité sur $[-1, 2]$ de la fonction

$$x \mapsto (x - 1)E(x), \text{ où } E(x) \text{ désigne la partie entière de } x.$$

Exercice 16

On considère la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0.5 & \text{si } x=0. \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $[-1, +\infty[$.

Exercice 17

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq 1, \\ x-1 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ \frac{x+1}{x-1} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Représenter f dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2. Etudier la continuité de f sur \mathbb{R} .

Exercice 18

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} telle que

- $f(-4) = 4$ et $f(-3) = 3$,
- $f(x) = \sqrt{x+2}$, si $x > -2$,
- la restriction de f à $] -\infty, -2[$ est une fonction affine,
- f est continue à gauche en -2 .

1. Représenter f dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2. Donner l'expression de $f(x)$ pour tout réel x .
3. Etudier la continuité de f en -2 .

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} & \text{si } x \neq 2, \\ a & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Pour quelle valeur de a , la fonction f est-elle continue en 2 ?

Exercice 20

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^3 - 2x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq -1 \text{ et } x \neq 1, \\ a & \text{si } x = 1, \\ b & \text{si } x = -1. \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en 1.
2. Déterminer la valeur de b pour que f soit continue en -1 .

Exercice 21

Soit P un polynôme défini par

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x) - P(0)}{x}$.

2. Appliquer le résultat précédent pour déterminer chacune des limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(x+1)^2 - 3}{x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3+2)(x-1)+2}{x} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^3 - 1}{x}.$$

Exercice 22

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par

$$f(x) = \frac{1}{x} (\sqrt{1+x^2} - 1).$$

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

Tout au long du XVIII^{ème} siècle, la définition de fonction était un sujet de débat parmi les mathématiciens. Au XIX^{ème} siècle, Cauchy fut le premier à donner une fondation logique stricte du calcul infinitésimal.

Ce n'est qu'en 1850, que le mathématicien allemand **Karl Weierstrass** poursuivant l'effort de rigueur entrepris par Cauchy, donne la définition de la limite d'une fonction en un point. Cette définition marquera la naissance de l'analyse moderne.



Weierstrass

Citation

«Homme toujours debout sur le cap Pensée, à s'écarquiller les yeux sur les limites»

Paul Valéry.

La distance parcourue par une navette spatiale, est déterminée par une expression $d(t)$, où d est une fonction de la variable t qui désigne le temps.

Pour déterminer la distance parcourue par la navette Columbia, depuis sa lancer jusqu'à l'instant t_f du crash, on calcule $\lim_{t \rightarrow t_f} d(t)$.



la navette Columbia

Limites et comportements asymptotiques

*« Seul deux choses sont infinies : l'univers et la bêtise humaine.
Mais je ne suis pas sûr pour l'univers. »*

Einstein

Chapitre 4

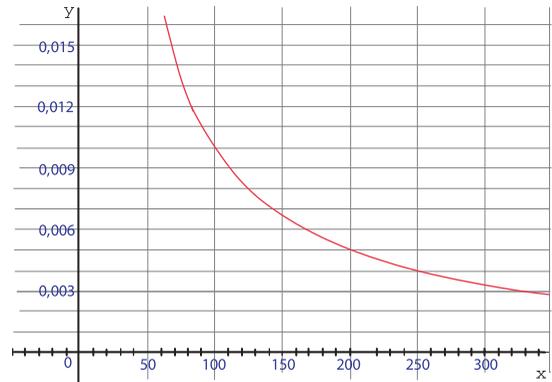
Pour commencer

Activité 1

Soit la fonction f définie pour tout réel $x > 0$

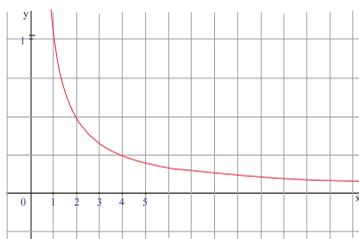
par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Représenter l'ensemble B des points $M(x, y)$ du plan tels que $0 < y < 5 \cdot 10^{-3}$.
2. Donner une condition suffisante sur x pour qu'un point $M(x, f(x))$ appartienne à B .

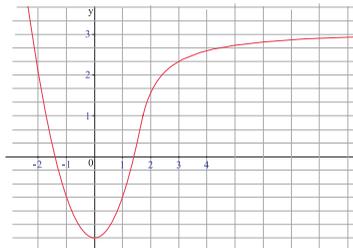


Activité 2

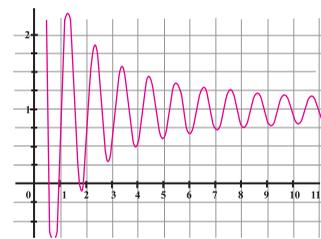
On donne ci-dessous les représentations graphiques C_f , C_g et C_h de trois fonctions f , g et h .



C_f



C_g



C_h

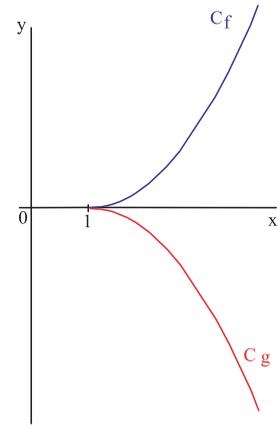
Donner une condition suffisante sur x pour que

a. $0 < f(x) < \frac{1}{2}$; b. $-2 < g(x) < 1$; c. $|h(x) - 1| < \frac{1}{4}$.

1. Limites infinies en $+\infty$

Activité 1

On a représenté ci-contre les fonctions f et g définies sur $[1, +\infty[$ respectivement par $f(x) = (x - 1)^2$ et $g(x) = -(x - 1)^2$.

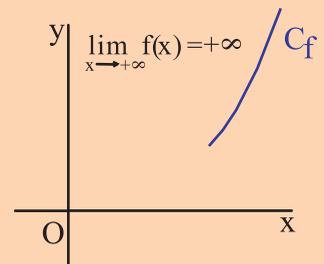


1. a. Que peut-on conjecturer sur $f(x)$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes ?
 - b. Donner une condition suffisante sur x , pour que $f(x) > 10^{40}$.
 - c. Soit $A > 0$. Donner une condition suffisante sur x , pour que $f(x) > A$.
2. a. Que peut-on conjecturer sur $g(x)$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes ?
 - b. Donner une condition suffisante sur x , pour que $g(x) < -10^{40}$.
 - c. Soit $A > 0$. Donner une condition suffisante sur x , pour que $g(x) < -A$.

Définition

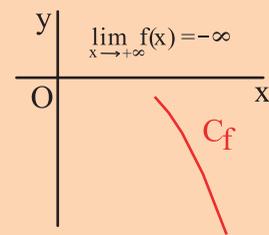
Soit a un réel et f une fonction définie sur $[a, +\infty[$.
 On dit que f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si, pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$ tel que si $x \geq a$ et $x > B$ alors $f(x) > A$.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = +\infty$.



On dit que f admet pour limite $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si, pour tout $A < 0$, il existe $B > 0$ tel que si $x \geq a$ et $x > B$ alors $f(x) < A$.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{+\infty} f = -\infty$.



Vocabulaire

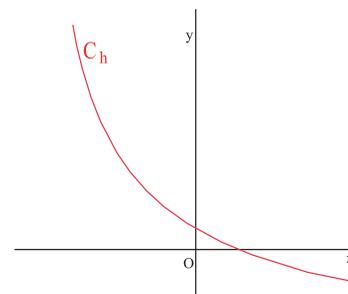
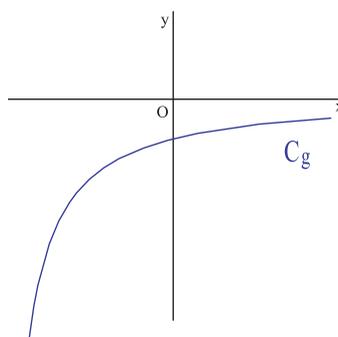
Lorsque $\lim_{+\infty} f = +\infty$, on dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, ou $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, ou encore f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Lorsque $\lim_{+\infty} f = -\infty$, on dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$, ou $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$, ou encore f tend vers $-\infty$ en $+\infty$.

Activité 2

Dans le plan muni d'un repère, on a représenté les courbes C_g et C_h des fonctions g et h .

Vérifier qu'aucune de ces fonctions ne tend vers $+\infty$ en $+\infty$.



Activité 3

On considère les fonctions f , g et h définies sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ et $h(x) = \sqrt{x}$.

1. Soit $A > 0$ et $x \geq 1$.

- Donner une condition suffisante sur x pour que $f(x) > A$ et $g(x) > A$.
- Donner une condition suffisante sur x pour que $h(x) > A$.

2. En déduire le comportement de chacune des fonctions f , g et h au voisinage de $+\infty$.

Lorsqu'on étudie la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, il suffit d'étudier le comportement de $f(x)$, lorsque x est positif et prend de grandes valeurs. On dit alors que l'on étudie le comportement de f au voisinage de $+\infty$.

Activité 4

Soit f et g deux fonctions définies sur $[2, +\infty[$ et telles que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$. Justifier chacune des affirmations ci-dessous.

- Il existe $B > 2$ tel que $f(x) > 1$, pour tout $x > B$.
- Il existe $B > 2$ tel que $g(x) < -1$, pour tout $x > B$.
- La fonction f n'est pas majorée sur $[2, +\infty[$.
- La fonction g n'est pas minorée sur $[2, +\infty[$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ alors il existe un réel $B > 0$ tel que $f(x) > 0$, pour tout $x > B$.

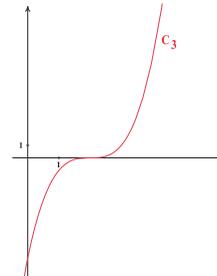
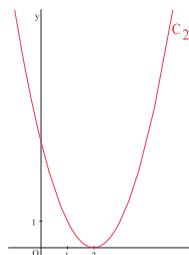
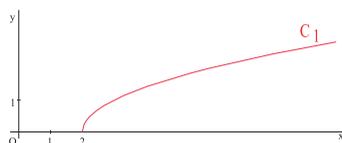
Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$ alors il existe un réel $B > 0$ tel que $f(x) < 0$, pour tout $x > B$.

Activité 5

Le plan est muni d'un repère.

Les courbes C_1 , C_2 et C_3 sont les représentations graphiques respectives des fonctions.

$x \mapsto \sqrt{x-2}$, $x \mapsto (x-2)^2$ et $x \mapsto (x-2)^3$.

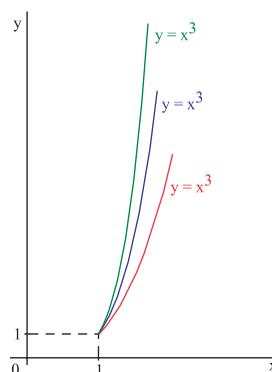


- Donner l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.
- Déterminer graphiquement les limites de chacune de ces fonctions en $+\infty$.

Activité 6

Soit k la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $k(x) = x^n$, où n est un entier supérieur ou égal à 1.

1. Soit $A > 0$ et $x \geq 1$. Donner une condition suffisante sur x , pour que $k(x) > A$.
2. Déterminer la limite de k lorsque x tend vers $+\infty$.



Théorème

Pour tout réel a et tout entier naturel n non nul, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-a} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-a)^n = +\infty$.

2. Limites infinies en $-\infty$

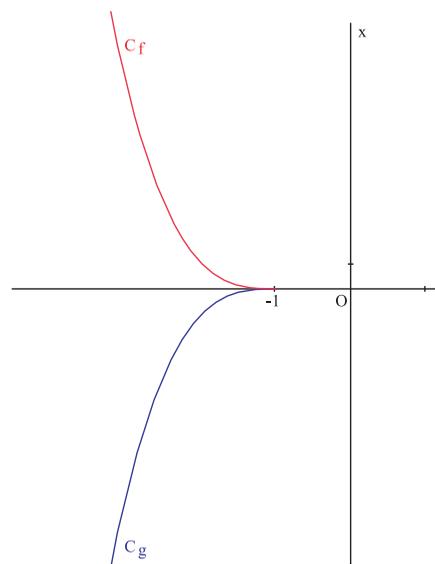
Activité 1

Le plan est muni d'un repère.

On a représenté ci-contre les fonctions f et g définies sur $]-\infty, -1]$ respectivement par

$$f(x) = (x+1)^2 \text{ et } g(x) = -(x+1)^2.$$

1. Soit $A > 0$ et $x \leq -1$. Donner une condition suffisante sur x , pour que $f(x) > A$.
2. Soit $A < 0$ et $x \leq -1$. Donner une condition suffisante sur x , pour que $g(x) < A$.



Définition

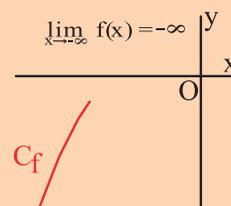
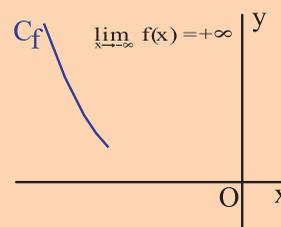
Soit a un réel et f une fonction définie sur $]-\infty, a]$.

On dit que f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si, pour tout $A > 0$, il existe $B < 0$ tel que si $x \leq a$ et $x < B$ alors $f(x) > A$.

On note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = +\infty$.

On dit que f admet pour limite $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si pour tout $A < 0$, il existe $B < 0$ tel que si $x \leq a$ et $x < B$ alors $f(x) < A$.

On note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = -\infty$.



Vocabulaire

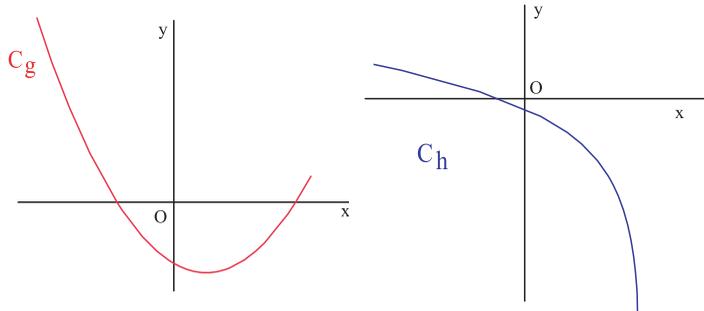
Lorsque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$, on dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, ou $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, ou encore f tend vers $+\infty$ en $-\infty$.

Lorsque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$, on dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$, ou $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$, ou encore f tend vers $-\infty$ en $-\infty$.

Activité 2

Dans le plan muni d'un repère, on a représenté les courbes C_g et C_h des fonctions g et h .

Vérifier qu'aucune de ces fonctions ne tend vers $-\infty$ en $-\infty$.



Activité 3

On considère les fonctions définies sur $]-\infty, -1]$ par $f: x \mapsto x^2$; $g: x \mapsto x^3$ et $h: x \mapsto \sqrt{-x}$.

- Soit $A > 0$ et $x \leq -1$.
 - Donner une condition suffisante sur x pour que $f(x) > A$ et $g(x) < -A$.
 - Donner une condition suffisante sur x pour que $h(x) > A$.
- En déduire le comportement de chacune des fonctions f , g et h au voisinage de $-\infty$.

Lorsqu'on étudie la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$, il suffit d'étudier le comportement de $f(x)$, lorsque x est négatif et tel que $|x|$ prend de grandes valeurs.

On dit alors que l'on étudie le comportement de f au voisinage de $-\infty$.

Activité 4

Soit f et g deux fonctions définies sur $]-\infty, -1]$ et telles que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$. Justifier chacune des affirmations ci-dessous.

Il existe $B < -1$ telle que $f(x) > 1$, pour tout $x < B$.

Il existe $B < -1$ telle que $g(x) < -1$, pour tout $x < B$.

La fonction f n'est pas majorée sur $]-\infty, -1]$.

La fonction g n'est pas minorée sur $]-\infty, -1]$.

Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$ alors il existe un réel $B < 0$ tel que $f(x) > 0$, pour tout $x < B$.

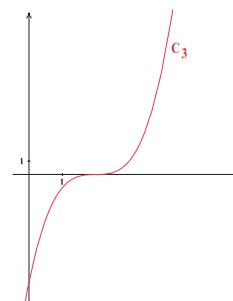
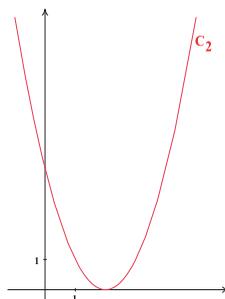
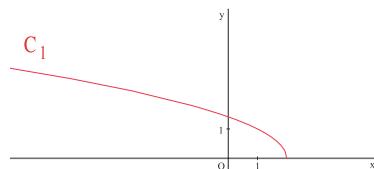
Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ alors il existe un réel $B < 0$ tel que $f(x) < 0$, pour tout $x < B$.

Activité 5

Le plan est muni d'un repère.

Les courbes C_1 , C_2 et C_3 sont les représentations graphiques respectives des fonctions

$x \mapsto \sqrt{2-x}$, $x \mapsto (x-2)^2$ et $x \mapsto (x-2)^3$.

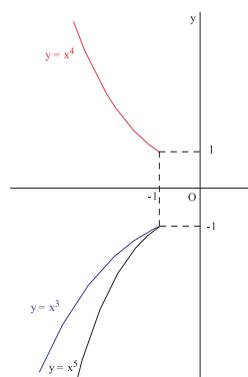


1. Donner l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.
2. Déterminer graphiquement, les limites de chacune de ces fonctions en $-\infty$.

Activité 6

Soit h la fonction définie sur $]-\infty, -1]$ par $h(x) = x^n$, où n est un entier supérieur ou égal à 1.

Discuter suivant la parité de n , la limite de h lorsque x tend vers $-\infty$.



Théorème

Pour tout réel a et tout entier naturel n non nul,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{a-x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-a)^{2n} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-a)^{2n-1} = -\infty .$$

3. Limites finies en $+\infty$ ou en $-\infty$

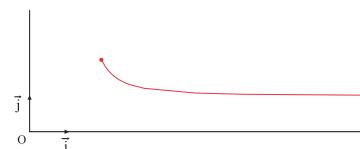
Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On a représenté ci-contre la fonction f définie sur $[2, +\infty[$

par $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + 1$.

1. Que peut-on conjecturer sur $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?
2. a. Donner une condition suffisante sur les réels x , pour que $|f(x) - 1| < 10^{-200}$.
b. Soit $\beta > 0$. Donner une condition suffisante sur les réels x , pour que $|f(x) - 1| < \beta$.
3. Soit M le point de coordonnées $(x, f(x))$ et P le point de coordonnées $(x, 1)$.
Que peut-on dire de la distance PM lorsque x tend vers $+\infty$?

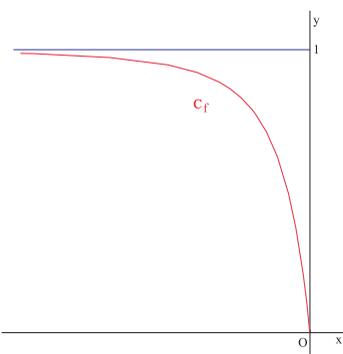


Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Nous avons représenté ci-contre la fonction f définie sur $]-\infty, 0]$

$$\text{par } f(x) = \frac{1}{(x-1)^3} + 1.$$



1. Que peut-on conjecturer sur $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$?
2. a. Donner une condition suffisante sur x , pour que $|f(x) - 1| < 10^{-300}$.
b. Soit $\beta > 0$. Donner une condition suffisante sur x , pour que $|f(x) - 1| < \beta$.
3. Soit M le point de coordonnées $(x, f(x))$ et P le point de coordonnées $(x, 1)$.
Que peut-on dire de la distance PM lorsque x tend vers $-\infty$?

Définition

Soit a un réel et f une fonction définie sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

On dit que f admet pour limite L quand x tend vers $+\infty$, si pour tout $\beta > 0$, il existe un réel $B > 0$, tel que si $x \geq a$ et $x > B$ alors $|f(x) - L| < \beta$.

Définition

Soit a un réel et f une fonction définie sur l'intervalle $]-\infty, a]$.

On dit que f admet pour limite L quand x tend vers $-\infty$, si pour tout $\beta > 0$, il existe un réel $B < 0$, tel que si $x \leq a$ et $x < B$ alors $|f(x) - L| < \beta$.

Théorème (admis)

Si une fonction admet une limite L en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) alors cette limite est unique.

On note $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{+\infty} f = L$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{-\infty} f = L$).

Vocabulaire

Lorsque $\lim_{+\infty} f = L$, on dit que f tend vers L quand x tend vers $+\infty$, ou $f(x)$ tend vers L quand x tend vers $+\infty$, ou encore f tend vers L en $+\infty$.

Lorsque $\lim_{-\infty} f = L$, on dit que f tend vers L quand x tend vers $-\infty$, ou $f(x)$ tend vers L quand x tend vers $-\infty$, ou encore f tend vers L en $-\infty$.

Activité 3

1. Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$.
Que peut-on dire de la limite de $\frac{1}{f}$ en $+\infty$?
2. Si on suppose que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$, que peut-on dire de limite de $\frac{1}{f}$ en $-\infty$?
3. Que peut-on dire de la limite de $\frac{1}{f}$ dans le cas où f tend vers $-\infty$ en $+\infty$ ou $-\infty$?

Théorème (admis)

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f} = 0$.	Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f} = 0$.
Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f} = 0$.	Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f} = 0$.

Activité 4

Déduire du théorème précédent les résultats ci-dessous

Pour tout réel a et tout entier non nul n ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{a-x}} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-a)^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x-a)^n} = 0 .$$

4. Asymptotes horizontales

Activité 1

Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

Soit C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) ,
 M le point de coordonnées $(x, f(x))$ et P le point de coordonnées (x, L) .

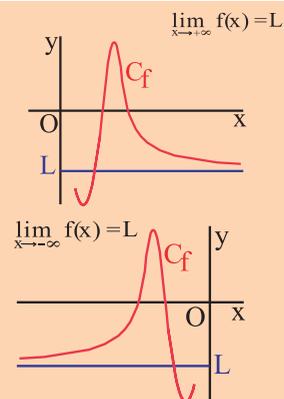
Montrer que la distance PM tend vers 0.

Définition

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère.

Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, on dit que la droite d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

Lorsque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, on dit que la droite d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$.



Activité 2

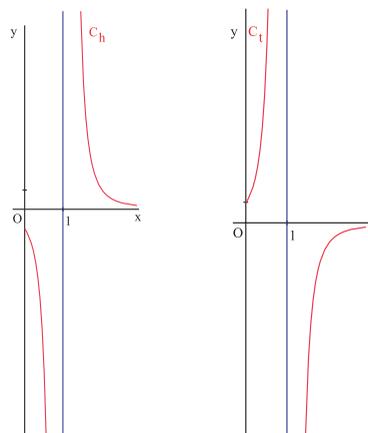
1. Représenter chacune des fonctions $f : x \mapsto 2 + \frac{1}{x+1}$ et $g : x \mapsto -\frac{1}{2} + \frac{1}{x+2}$.
2. On désigne par C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
Préciser les asymptotes horizontales à ces courbes, au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

5. Limites infinies en un réel

Activité 1

Le plan est muni d'un repère. On a représenté ci-contre, les fonctions h et t définies sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$

respectivement par $h(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ et $t(x) = \frac{-1}{(x-1)^3}$.



1. Déterminer le signe de chacune des fonctions h et t .
2. a. Que peut-on dire de $h(x)$ lorsque x se rapproche de 1, en restant supérieur à 1 ?
b. En déduire le comportement de h lorsque x tend vers 1 à droite.
3. a. Que peut-on dire de $h(x)$ lorsque x se rapproche de 1, en restant inférieur à 1 ?
b. En déduire le comportement de h lorsque x tend vers 1 à gauche.
4. Etudier le comportement de t lorsque x tend vers 1.

Définition

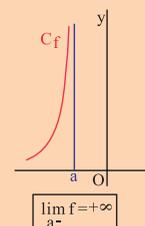
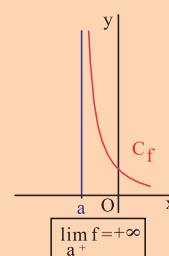
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf en un réel a de I .

On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$, à droite en a si, pour tout $A > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si x appartient à I et $0 < x - a < \alpha$ alors $f(x) > A$.

On note $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{a^+} f = +\infty$.

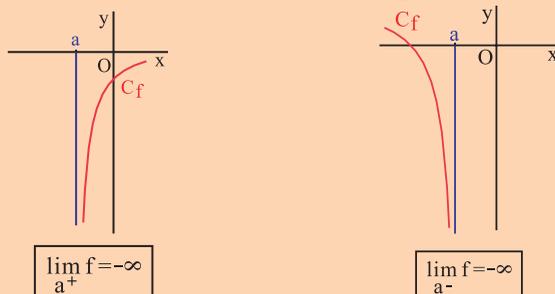
On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$, à gauche en a si, pour tout $A > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si x appartient à I et $0 < a - x < \alpha$ alors $f(x) > A$.

On note $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{a^-} f = +\infty$.



Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf en un réel a de I .
On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$, à droite en a (respectivement à gauche en a) si la fonction $-f$ a pour limite $+\infty$, à droite en a (respectivement à gauche en a).



Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf en un réel a de I .

On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ en a si $\lim_{x \rightarrow a^-} f = \lim_{x \rightarrow a^+} f = +\infty$. On note $\lim_{x \rightarrow a} f = +\infty$.

On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ en a si $\lim_{x \rightarrow a^-} f = \lim_{x \rightarrow a^+} f = -\infty$. On note $\lim_{x \rightarrow a} f = -\infty$.

Activité 2

Soit une fonction f définie sur un intervalle I , sauf peut être en un réel a de I , telle que $f(x) \neq 0$, $x \neq a$.

- On suppose que f est positive sur I et $\lim_{x \rightarrow a^-} f = 0$. Que peut-on conjecturer sur $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{f}$?
 - On suppose que f est négative sur I et $\lim_{x \rightarrow a^-} f = 0$. Que peut-on conjecturer sur $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{f}$?
- Reprendre les mêmes questions dans le cas où $\lim_{x \rightarrow a^+} f = 0$.

Activité 3

Utiliser l'activité précédente pour justifier les résultats ci-dessous.

Pour tout réel a et tout entier naturel n non nul, on a

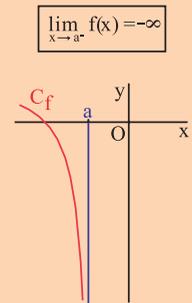
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^{2n}} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x-a)^{2n-1}} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x-a)^{2n-1}} = +\infty .$$

6. Asymptotes verticales

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf en un réel a de I et C_f sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Si la limite de f , à droite en a (respectivement à gauche en a), est infinie, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe C_f , à droite en a (respectivement à gauche en a).



Activité 1

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (x-1)^2$.

1. a. Que vaut la limite de g à droite en 1 ?
b. Que vaut la limite de g à gauche en 1 ?
2. Déterminer la limite de $\frac{1}{g}$ à droite et à gauche en 1.

Que représente la droite d'équation $x = 1$, pour la courbe de $\frac{1}{g}$?

Activité 2

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{(x+4)^4} + 2$ et $g : x \mapsto \frac{1}{(x+4)^5} - 0.75$.

Etudier le comportement de chacune des fonctions aux bornes de son ensemble de définition, en précisant les asymptotes à leurs courbes représentatives.

7. Opérations sur les limites

Nous admettons les résultats qui suivent et qui concernent les limites en un réel ou en l'infini, de la somme, du produit et du quotient et de la valeur absolue.

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f+g)$
L	L'	$L + L'$
L	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	L'	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f \times g)$
L	L'	$L \times L'$
$+\infty$	$L' > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$L' < 0$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim f$	$\lim g$	$\lim \frac{f}{g}$
L	$L' \neq 0$	$\frac{L}{L'}$
$+\infty$	$L' > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$L' < 0$	$-\infty$
L	$+\infty$	0
L	$-\infty$	0
$L \neq 0$	0	∞ (et on applique la règle des signes).

$\lim f$	$\lim f $
L	$ L $
$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$

Activité 1

Calculer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{1}{x^2} - 1 \right) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x^2} - 1 \right) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{(x-2)^2} - 1 \right) ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \sqrt{1-x} + 1 \right) ; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(x + \frac{1}{(x-2)^3} + \frac{3}{(x-2)^2} - 1 \right) ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} \right).$$

Activité 2

Calculer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} -\sqrt{x+2} \left(\frac{1}{(x-2)^2} - 1 \right) ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 \left(\frac{1}{(x-2)^3} - \frac{3}{(x-2)^2} - \sqrt{x-0.5} \right) ; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{x+1} - x \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} + x \right).$$

Activité 3

Calculer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} \right) ; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x\sqrt{x-2}} ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2 \sqrt{x+3}} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x\sqrt{-x}} + \frac{1}{x^2} + 3x \right) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x\sqrt{x-100} + 1} + x \right) ; \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} \left(\frac{-5}{(x-1)^2 \sqrt{x+3}} - 1 \right) ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x+2}}{x-2} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \left| \frac{5}{x^3(x+2)} \right| ; \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} \left| -3 + \frac{1+x}{\sqrt{x+3}} \right| ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| (x-1) \left(\frac{1}{x^2} - 2 \right) \right| ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| x^3 + \frac{1}{x^4} + 2 \right|.$$

8. Limites d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle

Activité 1

1. a. Vérifier que pour tout réel non nul x , $x^3 - x + 1 = x^3 \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)$.

b. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$.

2. Soit f la fonction polynôme définie par $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ où $a_n \neq 0$.

On se propose de montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n$.

a. Vérifier que $f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right)$, pour tout réel non nul x .

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right)$.

c. Conclure.

3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n$.

La limite d'une fonction polynôme, quand la variable tend vers l'infini, est la même que celle de son terme de plus haut degré.

Activité 2

Calculer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 2x - 1); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^2 - 4x + 1)^6; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} ((5x^2 - x - 1)^3 - 125x^6); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^{101} - x)^{30}.$$

Activité 3

1. Soit f la fonction rationnelle définie par $f(x) = \frac{3x^4 - x^3 + 1}{-2x^2 + x}$.

a. Vérifier que $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 Q(x)$; avec $Q(x) = \frac{1 - \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x^4}}{1 - \frac{1}{2x}}$.

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Soit f la fonction rationnelle définie par

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}; \quad \text{où } a_n \neq 0 \text{ et } b_m \neq 0.$$

a. Vérifier que $f(x) = \frac{a_n x^n}{b_m x^m} Q(x)$; avec $Q(x) = \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_m x} + \dots + \frac{b_1}{b_m x^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m x^m}}$.

b. En déduire le résultat ci-dessous.

La limite d'une fonction rationnelle, quand la variable tend vers l'infini est la même que celle du quotient des termes de plus haut degré.

Activité 4

Calculer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{(2x + 5)^{10}}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^3 - 1)^{3000}}{x^2 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 - x - 1)^{20}}{x^3 + x + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-5x^3 - 1)^{3000}}{x^2 + 1}.$$

Activité 5

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

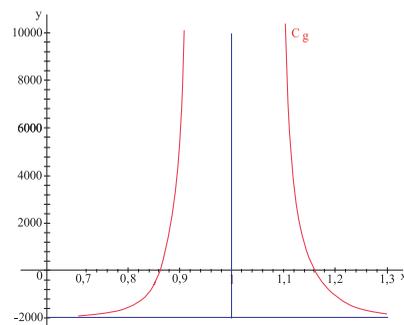
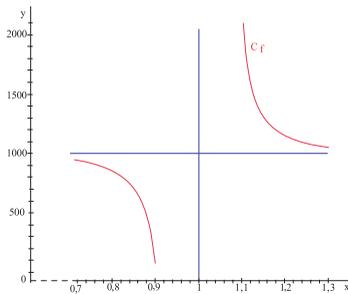
On considère la fonction h définie par $h(x) = \frac{2x^2 + 2}{x^2 - 1}$.

Etudier les limites de h aux bornes de son ensemble de définition, en précisant les asymptotes à sa courbe représentative.

Activité 6

Dans le plan muni d'un repère, C_f et C_g sont les représentations graphiques respectives des

fonctions $f : x \mapsto \frac{x}{(x-1)^3} + 1000$ et $g : x \mapsto \frac{x^2}{(x-1)^4} - 2000$.



1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les asymptotes à C_f .
3. Reprendre les mêmes questions pour la fonction g .

Activité 7

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x|x-1|}$.

1. Donner l'expression de $f(x)$ lorsque $x > 1$, puis lorsque $x < 1$.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les asymptotes à sa courbe représentative.

Activité 8

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - 3x - 4}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, en précisant les asymptotes à sa courbe représentative.

9. Limites de \sqrt{f}

Nous admettrons le théorème ci-dessous qui nous donne la limite de \sqrt{f} lorsqu'on connaît la limite de f .

Soit f une fonction positive, a fini ou infini et L un réel.

Si $\lim_a f = L$ alors $\lim_a \sqrt{f} = \sqrt{L}$. Si $\lim_a f = +\infty$ alors $\lim_a \sqrt{f} = +\infty$.

Activité 1

Calculer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{-x^3}} - \frac{1}{x^2} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{-x^3 + 2x^2}} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5x^4 + 10x^2 + 1} .$$

Activité 2

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(x-1)}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f , on le note D .

2 a. Montrer que $f(x) = \frac{1}{(x-1)(\sqrt{1+x}+1)}$, pour tout réel x de D .

b. En déduire les limites de f aux bornes de D .

c. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0 , que l'on déterminera.

3. Préciser les asymptotes à la courbe représentative de f .

Activité 3

On considère la fonction f définie par $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x} - x - 1$.

1. Montrer que pour tout réel positif x , $f(x) = (x+1)\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1\right)$.

2. En déduire la limite de f en $+\infty$.

10. Asymptotes obliques

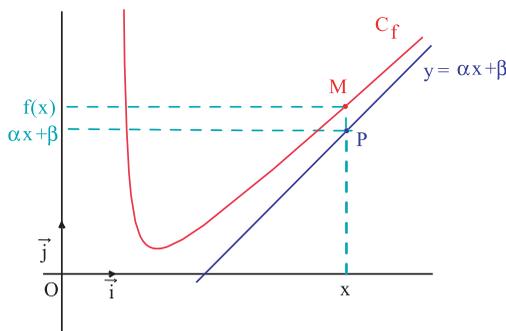
Activité 1

Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Soit C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère une droite D d'équation $y = \alpha x + \beta$.

On désigne par M le point de coordonnées $(x, f(x))$ et P le point de coordonnées $(x, \alpha x + \beta)$.

Montrer que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$ alors la distance PM tend vers 0 .



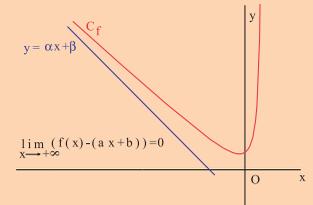
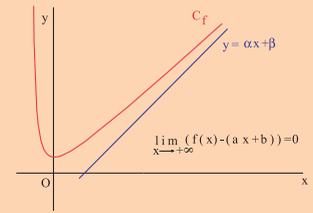
Définition

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$, on dit que la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est une asymptote oblique à la courbe C_f de f au voisinage de $+\infty$.

Lorsque $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$, on dit que la droite d'équation

$y = \alpha x + \beta$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$.



Activité 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{3x^2 - 2x - 3}{x - 2}$ et on note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. a. Donner son ensemble de définition D .
b. Calculer les limites de f aux bornes de D .
2. Vérifier que, pour tout $x \neq 2$, $f(x) = 3x + 4 + \frac{5}{x - 2}$.
3. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x - 4)$.
b. Expliquer pourquoi la droite Δ d'équation $y = 3x + 4$ est asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
c. Etudier la position de C par rapport à Δ .

Activité 3

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 4x + 3}$ et on note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. a. Donner son ensemble de définition D .
b. Calculer les limites de f aux bornes de D .
2. a. Déterminer la forme canonique du trinôme $x^2 + 4x + 3$.
b. Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + (x + 2))$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + 2))$.
- c. En déduire que C admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et une autre au voisinage de $-\infty$.

QCM - VRAI - FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

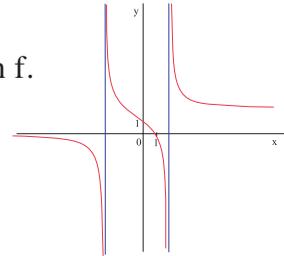
1. Dans la figure ci-contre on a représentée graphiquement une fonction f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) =$$

0

$+\infty$

-3 .



2. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{7}{(x-2)^2} =$

$-\infty$

0

$+\infty$.

3. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -5$ alors

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 5) = 0$

$x = -5$ est une asymptote à C_f

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 5) = 0$.

4. Sachant que pour tout réel x , on a $f(x) \geq x^3 - x$, on peut conclure que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} =$

$+\infty$

0

5.

VRAI - FAUX

1. Si f est une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 1 alors f tend vers l'infini au voisinage de l'infini.
2. Si f est une fonction strictement positive sur $[1, +\infty[$, alors f tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.
3. Si f est une fonction qui tend vers $-\infty$, au voisinage de $+\infty$ alors f est strictement négative pour les grandes valeurs de x .
4. Si f est une fonction qui tend vers a en $+\infty$ alors f tend vers a en $-\infty$.
5. Si f est une fonction qui tend vers a en $+\infty$ alors $|f|$ tend vers a en $+\infty$.

Mobiliser ses compétences

Situation 1 Asymptote oblique

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

- a. Déterminer son ensemble de définition D.
b. Calculer les limites de f aux bornes de D.
- Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \neq -1$, on a $f(x) = ax + b + \frac{1}{x+1}$.

- On désigne par C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

- Expliquer pourquoi la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

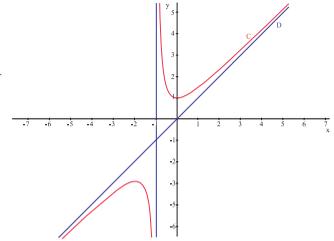
Etudier la position de C par rapport à Δ .

- Soit x un réel différent de -1 ; on désigne par M et P les points respectifs de C et Δ d'abscisse x.

Si l'on veut que la distance MP soit inférieure 0.001, suffit-il de prendre $|x| > 11$?

$|x| > 101$? $|x| > 1001$? Justifier votre réponse.

- Déterminer, sans faire de calcul, une approximation de $f(3000)$ et un majorant de l'erreur ainsi commise.



Situation 2 courbe asymptote

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$.

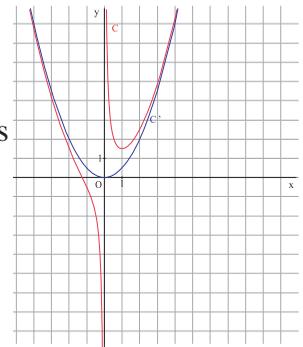
- Déterminer son ensemble de définition D.
- Calculer les limites de f aux bornes de D.
- On considère la fonction $g : x \mapsto \frac{x^2}{2}$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x))$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note C et C' les courbes représentatives respectives de f et g.

Soit x un réel non nul ; on désigne par M et N les points respectifs de C et C' d'abscisse x.

- Calculer MN en fonction de x.
b. Vérifier que cette distance a tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$.
On dit que C' est asymptote à C au voisinage de $+\infty$.
On dit aussi que la fonction g est une approximation de f au voisinage de $+\infty$.
- Etudier la position de C par rapport à C' sur $]0, +\infty[$.
- Expliquer pourquoi C' est asymptote à C au voisinage de $-\infty$.
- Etudier la position de C par rapport à C' sur $]-\infty, 0[$.



- Déterminer, sans faire de calcul, l'erreur commise en remplaçant $f(5 \cdot 10^{99})$ par $\frac{(5 \cdot 10^{99})^2}{2}$.

Exercices et problèmes

Exercice 1

Calculer dans chacun des cas ci-dessous la limite de la fonction f en $+\infty$.

$$f(x) = \frac{-5}{(x-1000)^3} ; f(x) = -2(x+100)^{100} ;$$

$$f(x) = \sqrt{x-2006} ; f(x) = \frac{-3}{\sqrt{x-2006}}.$$

Exercice 2

Calculer dans chacun des cas ci-dessous les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$f(x) = x^2 + |x| ; f(x) = x^2 + x|x| + 2 ;$$

$$f(x) = -2(x+100)^{100} - 3x^5 ; f(x) = (-2x+1)^3 + 8x^3 ;$$

$$f(x) = (-2x+1)^{10} + |x^{11}|.$$

Exercice 3

Calculer dans chacun des cas ci-dessous les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$f(x) = \frac{-5x+1}{(x-1000)^3} ; f(x) = \frac{x^4+3x^2-1}{(2x-5)^{17}} ; f(x) = \left| \frac{2x^2-3x}{x-2} \right| ;$$

$$f(x) = \frac{|x|(1-x)}{1+x^2} ; f(x) = x^3 - \frac{x^2}{x+1} ; f(x) = \frac{x^2+|x|+1}{|x|-2}.$$

Exercice 4

Calculer dans chacun des cas ci-dessous les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions f , g , $f+g$, $f-g$, fg et $\frac{f}{g}$.

$$a- f(x) = -\frac{1}{x^2} ; g(x) = 3x^3 + 2x - 1.$$

$$b- f(x) = \frac{x^2}{x+1} ; g(x) = \frac{2x-1}{x^3-1}.$$

$$c- f(x) = \frac{-3x^3+2}{x^2+x^3} ; g(x) = \frac{x^4-6x^3}{1-x^5}.$$

Exercice 5

Calculer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x}{(x-3)(2x+5)} ; \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x}{(x-3)(2x+5)} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-3x^2+1}{2x+4} ; \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-3x^2+1}{2x+4}.$$

Exercice 6

Calculer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-3x+9}{x^2-2x-3} ; \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x^3+1} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)\sqrt{\frac{x}{x-1}} ; \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+3)(x-2)}{|x-2|}.$$

Exercice 7

Calculer dans chacun des cas ci-dessous, la limite éventuelle de f à gauche respectivement à droite en a .

$$f(x) = \frac{-4}{(x-2)^3} ; a = 2.$$

$$f(x) = \frac{2}{(3-x)^4} + 2\sqrt{x} ; a = 3.$$

$$f(x) = \frac{2x-x^3}{\sqrt{x^2+2x}} ; a = -2.$$

Exercice 8

Calculer dans chacun des cas ci-dessous les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

$$f(x) = \frac{-x-5}{x} ; f(x) = \frac{3x-1}{2-5x} ;$$

$$f(x) = \frac{1-x^3}{2x+3} ; f(x) = \frac{-3x^2+x}{-5x+10}.$$

Exercice 9

Calculer dans chacun des cas ci-dessous les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

$$f(x) = \frac{-2x+3}{x^2-5} ; f(x) = \frac{-x^4+2x}{x^2+2} ;$$

$$f(x) = \frac{x^3-2x^2+1}{x^2+3x} ; f(x) = \frac{-3x^3+x+1}{x^2+x-2}.$$

Exercice 10

Calculer dans chacun des cas ci-dessous les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

$$f(x) = \left| \frac{x^3-3}{x+2} \right| ; f(x) = \left| \frac{x+2}{x^2-5} \right| ;$$

$$f(x) = \frac{|x|(2-x)}{1-|x|} ; f(x) = \frac{x^2-|x|-1}{|-2x|-3}.$$

Exercice 11

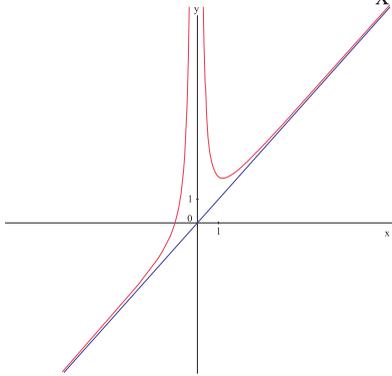
Calculer dans chacun des cas ci-dessous les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + |x|} - 1 \quad ; \quad f(x) = x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad ;$$

$$f(x) = -\frac{1}{x-4} + \sqrt{\frac{3x}{(x-1)^3}} \quad ; \quad f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{(-x+2)^6}}.$$

Exercice 12

Dans le plan muni d'un repère, on a tracé la courbe représentative C , de la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{x^2}$.



- Déterminer son ensemble de définition.
- Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- Montrer que C admet une asymptote verticale dont on donnera une équation.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$. On désigne par C sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Déterminer la limite de f en $-\infty$.
- a-Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$.

b-En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 14

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2x^2 - 4x + 6}{x^2 - 3x + 2}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Factoriser le trinôme $x^2 - 3x + 2$.

3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, en précisant les asymptotes à C .

4. Déterminer le signe de $f(x) - 2$.

En déduire la position de C par rapport à son asymptote en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur

$$\mathbb{R} \setminus \{2\} \quad \text{par} \quad f(x) = \frac{x^2 + x - 10}{(x-2)^2}.$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- Vérifier que pour tout $x \neq 2$, $f(x) = 1 + \frac{5x-14}{(x-2)^2}$.
- En déduire les asymptotes à C .
- Préciser la position de C par rapport à son asymptote en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Exercice 16

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- a. Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Etudier la parité de f .
- a. Montrer que pour tout réel x non nul, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1}$.
- En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0.
- a. Montrer que pour tout réel

$$x > 0, \quad f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} - \frac{1}{x}.$$

- En déduire que f admet une asymptote D d'équation $y = 1$ en $+\infty$.
- Etudier la position de C par rapport à D .
- Etudier la limite de f en $-\infty$ en précisant l'asymptote à C en $-\infty$.

Etudier la position de C par rapport à cette asymptote.

Exercice 17

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Étudier la parité de f .

2. Vérifier que pour tout $x \geq 1$, $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^6}}$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3}$, puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3}$.

3. Déterminer les asymptotes à C .

4. Préciser la position de C par rapport à son asymptote en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{2x}.$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. a. Montrer que la droite D d'équation $y = \frac{x}{2} - 1$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$.

b. Étudier la position de C par rapport à D .

Exercice 19

On considère la fonction $f : x \mapsto -x + 1 + \frac{x-1}{(x-2)^2}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par C la courbe représentative de f .

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Soit Δ la droite d'équation $y = -x + 1$.

a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de C et Δ .

b. Étudier la position de C par rapport à Δ .

4. Soit x un réel différent de 2. On désigne par M et N les points respectifs de C et Δ d'abscisse x .

a. Calculer en fonction de x , la distance MN .

b. Calculer la limite de $f(x) - (-x + 1)$ quand x tend vers l'infini.

c. Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 20

Soit la fonction $f : x \mapsto ax + b + \frac{1}{3-x}$, où a et b sont deux réels.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on désigne par C la courbe représentative de f .

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

2. Sachant que $f(2) = 1$ et $f(4) = -3$, déterminer a et b .

3. a. Montrer que C admet une asymptote verticale D , dont on donnera une équation.

b. Soit D' la droite d'équation $y = -x + 2$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de D et D' .

On note I ce point.

4. On se propose de montrer que I est un centre de symétrie de la courbe C .

Pour tout point $M(x, y)$, on note $N = S_I(M)$.

a. Exprimer les coordonnées de N en fonction de celles de M .

b. Soit $M(x, f(x))$ où $x \neq 3$. Vérifier que

N est un point de C , si et seulement si,

$6 - x \neq 3$ et $f(6 - x) = -2 - f(x)$.

c. Conclure.

Exercice 21

On considère la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c - \frac{1}{x+1}$, où a , b et c sont trois réels.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On suppose que $f(0) = 0$, $f(1) = \frac{1}{2}$ et $f(2) = \frac{8}{3}$.

1. Déterminer les réels a , b et c .

2. On désigne par P la parabole d'équation $y = x^2 - x + 1$.

a. Étudier la position de la parabole P par rapport à la courbe C .

b. Soit x un réel différent de -1 , M un point de C et N un point de la parabole P , de même abscisse x .

Calculer en fonction de x , la distance MN .

c. Calculer la limite de $f(x) - (x^2 - x + 1)$ quand x tend vers l'infini.

d. A quelle condition la distance MN est-elle inférieure ou égale à 0.01 ?

Avec l'ordinateur

On se donne un rectangle ABCD tel que $AB = a$ et $BC = b$.

Soit MNP un triangle isocèle de sommet principal P et ABCD un rectangle tels que :

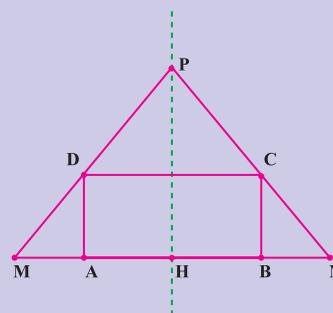
- A et B appartiennent à [MN],
- C appartient [PN]
- D appartient [PM].

Soit H le projeté orthogonal de P sur (MN) et on note $PH = x$.

On désigne par $A(x)$ l'aire du triangle MNP.

1. Montrer $MH = \frac{ax}{2(x-b)}$.

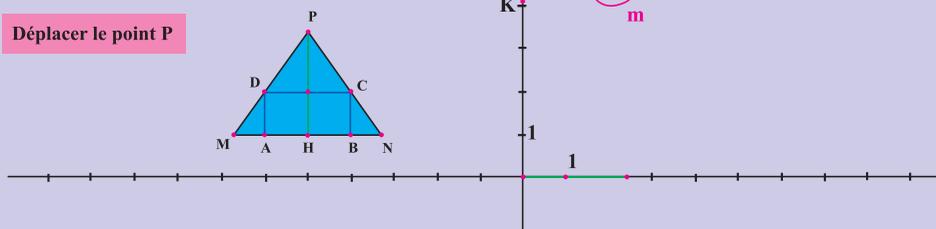
2. En déduire que $A(x) = \frac{ax^2}{2(x-b)}$.



On se propose dans cette séquence, d'étudier le comportement de l'aire $A(x)$ du triangle MNP lorsque P varie sur la perpendiculaire à (AB) en H.

- Ouvrir un nouveau fichier cabri et faire apparaître les axes.
- Construire le rectangle ABCD (On pourra prendre $AB = 2$ et $BC = 1$)
- La médiatrice de [AB] coupe [CD] en I.
- Placer un point variable P (point sur objet) sur la demi droite opposée à [IH).
- Reporter sur l'axe des abscisses la longueur PH.
- Reporter sur l'axe des ordonnées la longueur MH.
- Placer sur l'axe des ordonnées le point K tel que $OK = PH \cdot MH$ puis le point m de coordonnées (PH, OK).
- Déplacer le point P et conjecturer le comportement de $A(x)$.

Déplacer le point P



Aborder la notion d'infini en mathématiques peut se faire de plusieurs façons. La première et la plus simple consiste à poser un élément dénommé infini et à le caractériser par certaines de ses propriétés. Un tel élément n'a cependant aucun lien *a priori* avec la notion courante d'infini.

Georg Cantor est le premier à donner une caractérisation de cette notion en termes formels :

Un ensemble est infini s'il est en bijection biunivoque avec l'une de ses parties strictes.

Ainsi l'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs, est infini car l'application le met en bijection avec l'ensemble des entiers pairs.

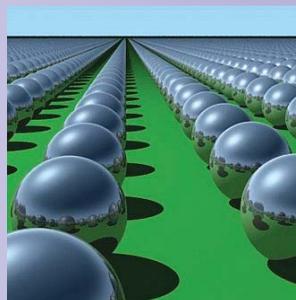


Georg Cantor

L'image primitive d'infini est l'idée d'un très grand nombre : les étoiles dans le ciel, les gouttes d'eau de la mer.

L'antiquité ne disposait pas de moyen commode d'exprimer les grands nombres, aussi ils pouvaient paraître infinis

Au XIX^{ème} siècle, Cauchy(1789-1857) et Weierstrass (1815-1897) ont réussi à donner une définition claire du concept de limite, en abandonnant l'idée de mouvement pour prendre celle d'approximation aussi fine que l'on veut. Ainsi une fonction qui tend vers l'infini est une fonction qui peut prendre des valeurs arbitrairement grandes.



Nombre dérivé

Chapitre 5

« Il ne dépend que de nous de suivre la route qui monte et d'éviter celle qui descend. »

Platon

Pour commencer

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit les points $A(2, -1)$, $B(5, 2)$ et $C(1, 3)$.

1. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB) .
2. Déterminer une équation de la droite passant par C et parallèle à la droite (AB) .

Activité 2

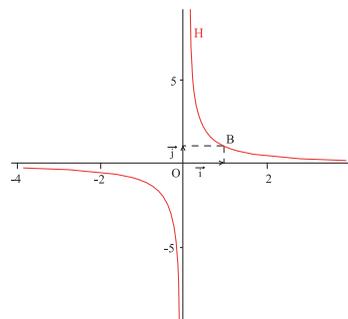
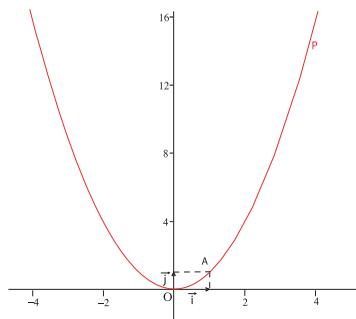
On considère les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x - 3}$ et $g : x \mapsto \frac{2x - 1}{x + 3}$.

1. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de $f(3.001)$.
2. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de $g(-3.001)$.

Activité 3

Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , on a représenté la parabole P

d'équation $y = x^2$, l'hyperbole H d'équation $y = \frac{1}{x}$, le point A de P d'abscisse 1 et le point B de H d'abscisse 1.



1. On note E le point de P d'abscisse 1.5.
 - a. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AE) .
 - b. Tracer la droite (AE) .
2. On note F le point de H d'abscisse -0.5 .
 - a. Déterminer une équation cartésienne de la droite (BF) .
 - b. Tracer la droite (BF) .

1. Nombre dérivé

Activité 1

Un mobile se déplace sur un axe (xx') muni d'un repère (O, \vec{i}) (1 unité = 1m).
L'abscisse $x(t)$ du mobile est donnée en fonction du temps t (en seconde), par la loi horaire du mouvement $x(t) = 3t - 10$.

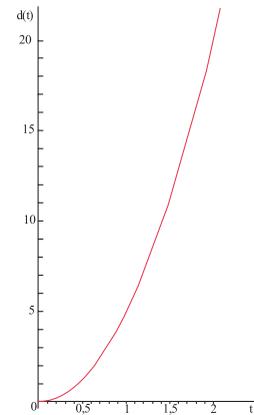
- Déterminer la vitesse moyenne du mobile entre les instants t_0 et $t_0 + h$.
- Quelle est la vitesse du mobile à l'instant $t_0 = 2$?

La vitesse moyenne entre les instants t_0 et $t_0 + h$ est le quotient de la distance parcourue par la durée h .

Activité 2

La distance (en mètre) parcourue par un mobile à l'instant t (en seconde) est donnée par la fonction $d : t \mapsto 5t^2, t \geq 0$.
On a représenté dans le plan muni d'un repère orthogonal la fonction d .

- Déterminer la distance parcourue par le mobile aux instants $t = 1, t = 2, t = 3, t = 4$ et $t = 5$.
 - Calculer la vitesse moyenne du mobile sur chacun des intervalles de temps $[0, 1], [1, 2], [3, 4]$ et $[4, 5]$.
- On se propose de déterminer la valeur exacte de la vitesse instantanée à l'instant $t_0 = 4$.
 - Soit h un nombre réel. Déterminer la vitesse moyenne entre les instants 4 et $4 + h$.
 - En déduire la valeur exacte de la vitesse instantanée à l'instant $t_0 = 4$.

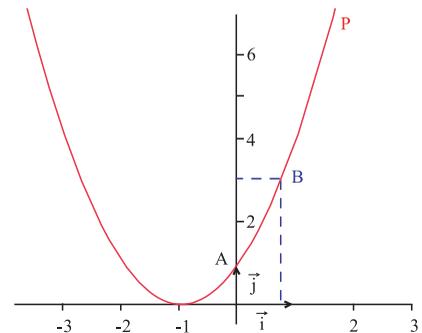


La vitesse instantanée à l'instant t_0 est la limite lorsque h tend vers zéro de la vitesse moyenne entre les instants t_0 et $t_0 + h$.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .
La parabole P est la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto (1 + x)^2$.

- On considère les points $A(0, 1)$ et $B(b, (1+b)^2), b \neq 0$.
- Calculer le coefficient directeur $m(b)$ de la droite (AB) .
 - Calculer la limite L de $m(b)$ lorsque b tend vers zéro.
 - Que devient l'équation de la droite (AB) lorsque B se rapproche de A ?
 - On désigne par T la droite d'équation $y = Lx + 1$.



Reproduire le graphique. Tracer la droite T et les droites (AB) pour $b = 1$ et $b = 0.5$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .
On dit que f est dérivable en a , s'il existe un nombre réel ℓ tel que

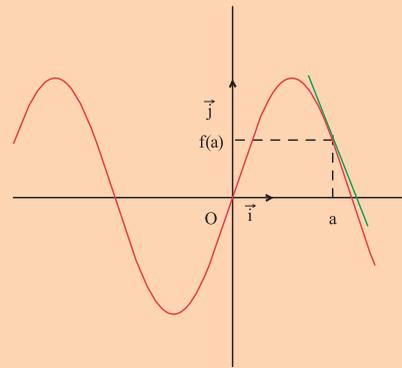
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell \quad \text{ou encore} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell.$$

Le réel ℓ est alors appelé le nombre dérivé de f en a et il est noté $f'(a)$.

Conséquence

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I
 et a un réel de I .
 f est dérivable en a , si et seulement si, la courbe
 représentative de f admet au point $M(a, f(a))$ une
 tangente de pente un nombre réel.
 Cette tangente est d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Un vecteur directeur de cette tangente est $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$.



Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère la droite D d'équation $y = -\frac{1}{2}x$ et le point $F(0, \frac{1}{2})$.

La droite D est la directrice de la parabole P et le point F est son foyer.

Soit $M(x, y)$ un point et H son projeté orthogonal sur D .

- Calculer les distances MF et MH .
 - En déduire que $MF = MH$, si et seulement si, $y = \frac{1}{2}x^2$.
- Quel est l'ensemble des points M tels que $MF = MH$?
- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ est dérivable en tout réel a .
- Soit $A(2, 2)$ un point de la parabole P d'équation $y = \frac{1}{2}x^2$,
 A' son projeté orthogonal sur la droite D et T la tangente à la parabole P en A .
 - Donner une équation de la tangente T .
 - Que représente la droite T pour le segment $[FA']$?
- Soit a un réel et $M(a, \frac{1}{2}a^2)$ un point de la parabole P et H' son projeté orthogonal sur D .
 Que représente la tangente à P en M pour le segment $[FH']$?
- En déduire un procédé pour construire la tangente à la parabole au point M .

Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On désigne par H l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ et $M(a, \frac{1}{a})$ un point de H avec $a \neq 0$.

- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable en tout réel non nul a .
- Ecrire une équation de la tangente T à H au point M .
- La droite T coupe l'axe des abscisses en N et l'axe des ordonnées en N' .
 Déterminer les coordonnées de N et de N' en fonction de a .
- Calculer l'aire du triangle ONN' .

2. Approximation affine d'une fonction

Activité 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

On suppose que f est dérivable en a .

On pose $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.
2. Vérifier que $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)g(x)$ et en déduire que f est continue en a .

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

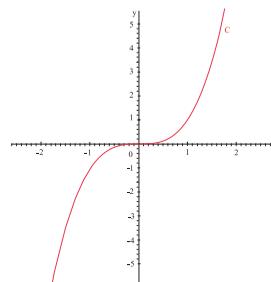
Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Activité 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on a représenté la courbe C représentative de la fonction $f : x \mapsto x^3$.

On désigne par A le point de la courbe C d'abscisse 1.

1. a. Montrer que la fonction f est dérivable en 1.
b. Déterminer l'équation de la tangente D à la courbe C au point d'abscisse 1.
2. On désigne par M_1 le point de C d'abscisse 1.1 et par A_1 le point de D d'abscisse 1.1.
 - a. Vérifier que $M_1A_1 \leq 10^{-1}$.
 - b. En déduire, sans faire de calcul, une valeur approchée à 10^{-1} près de $(1.1)^3$.



Définition

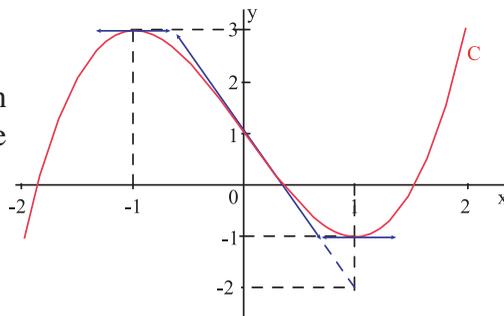
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

Si f est dérivable en a , alors le réel $f(a) + f'(a)h$ est une approximation affine de $f(a+h)$ et on écrit $f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)h$, pour h voisin de zéro.

Activité 3

Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , on a tracé la courbe représentative C d'une fonction f , ainsi que les tangentes à la courbe C en chacun de ses points d'abscisses $-1, 0$ et 1 .

1. Déterminer graphiquement $f'(-1)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.
2. Déterminer les équations des tangentes à la courbe C , en chacun de ses points d'abscisses respectives $-1, 0$ et 1 .
3. Donner des approximations affines de $f(-1.001)$, $f(0.0001)$ et $f(1.1)$.



Activité 4

En faisant réagir deux substances chimiques A et B on obtient un produit C dont la quantité en fonction du temps est $q(t) = 2 - \frac{1}{t}$, $t \geq 1$.

1. Tracer, dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe représentative de la fonction $q : t \mapsto q(t)$.
2. Calculer le taux de production moyen entre les instants $t = 1$ et $t = 3$.
3. a. Soit h un réel non nul. Calculer $\frac{q(3+h) - q(3)}{h}$.
b. En déduire le taux de production instantané à l'instant $t_0 = 3$ et une approximation affine de $q(3.001)$.

Le taux de production moyen entre les instants t_0 et $t_0 + h$ est le rapport $\frac{q(t_0+h) - q(t_0)}{h}$.

Le taux de production instantané à l'instant t_0 est la limite, lorsque h tend vers zéro, du taux de production moyen entre les instants t_0 et $t_0 + h$.

3. Nombre dérivé de fonctions usuelles

Activité 1

Soit a un réel.

1. Soit β un réel. Montrer que la fonction constante $f : x \mapsto \beta$ est dérivable en a et calculer $f'(a)$.
2. Montrer que la fonction $g : x \mapsto x$ est dérivable en a et calculer $g'(a)$.
3. Soit α et β deux réels. Montrer que la fonction $h : x \mapsto \alpha x + \beta$ est dérivable en a et calculer $h'(a)$.
4. Soit α et β deux réels. Montrer que la fonction $k : x \mapsto (x - \alpha)^2 + \beta$ est dérivable en a et calculer $k'(a)$.

Activité 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

I. 1. Soit un réel $a > -1$.

a. Calculer $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, $h \neq 0$ et $a + h > -1$.

b. En déduire que f est dérivable en a . Que vaut $f'(a)$?

2. Calculer $f'(a)$ pour $a < -1$.

II. Soit α et β deux réels avec α non nul. On considère la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\alpha x + \beta}$.

3. Soit un réel $a > -\frac{\beta}{\alpha}$.

a. Calculer $\frac{g(a+h) - g(a)}{h}$, $h \neq 0$ et $a + h > -\frac{\beta}{\alpha}$.

b. En déduire que g est dérivable en a . Que vaut $g'(a)$?

4. Calculer $g'(a)$ pour $a < -\frac{\beta}{\alpha}$.

Activité 3

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Soit a un nombre réel strictement positif.

1. Montrer que $\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$, pour tout réel h tel que $h \neq 0$ et $a+h > 0$.

2. En déduire que f est dérivable en a . Que vaut $f'(a)$?

Dans les activités précédentes, on a établi les résultats suivants.

Théorème

Toute fonction constante est dérivable en tout réel a .

La fonction $x \mapsto x$ est dérivable en tout réel a .

La fonction $x \mapsto \alpha x + \beta$ est dérivable en tout réel a .

La fonction $x \mapsto (x - \alpha)^2 + \beta$ est dérivable en tout réel a .

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\alpha x + \beta}$ est dérivable en tout réel $a \neq -\frac{\beta}{\alpha}$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en tout réel $a > 0$.

Le tableau ci-dessous donne les nombres dérivés de quelques fonctions usuelles.

fonction f	$f'(a)$
$f : x \mapsto \beta$	$f'(a) = 0, a \in \mathbb{R}$
$f : x \mapsto \alpha x + \beta$	$f'(a) = \alpha, a \in \mathbb{R}$
$f : x \mapsto (x - \alpha)^2 + \beta$	$f'(a) = 2(a - \alpha), a \in \mathbb{R}$
$f : x \mapsto \frac{1}{\alpha x + \beta}$	$f'(a) = \frac{-\alpha}{(\alpha a + \beta)^2}, a \neq -\frac{\beta}{\alpha}$
$f : x \mapsto \sqrt{x + \alpha}$	$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a + \alpha}}, a > -\alpha$
$f : x \mapsto \frac{\alpha x + \beta}{\lambda x + \gamma}$	$f'(a) = \frac{\alpha \gamma - \lambda \beta}{(\lambda a + \gamma)^2}, a \neq -\frac{\gamma}{\lambda}$

Activité 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

1. En utilisant le nombre dérivé de f en 1, estimer $\frac{1}{2.5}$, $\frac{1}{2.1}$, $\frac{1}{2.05}$, $\frac{1}{2.001}$, $\frac{1}{1.999}$.

2. Comparer les résultats obtenus avec ceux affichés par la calculatrice.

Activité 5

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. En utilisant le nombre dérivé de f en 25, 100, 10 000, estimer $\sqrt{27}$, $\sqrt{24}$, $\sqrt{101}$, $\sqrt{98}$, $\sqrt{10013}$.

2. Comparer les résultats obtenus avec ceux affichés par la calculatrice.

4. Opérations algébriques sur les fonctions dérivables en a

Les règles de dérivation suivantes résultent de la définition du nombre dérivé d'une fonction.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I , a un réel de I , α et β deux réels.

• Si f et g sont dérivables en a alors les fonctions $f + g$, fg , $\alpha f + \beta g$ sont dérivables en a et on a

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a),$$

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a),$$

• Soit k un entier naturel strictement supérieur à 1.

Si la fonction f est dérivable en a alors la fonction f^k est dérivable en a et on a

$$(f^k)'(a) = k f'(a) f^{k-1}(a).$$

• Si a est un réel et f est une fonction polynôme définie par

$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_k x^k$ alors f est dérivable en a et on a

$$f'(a) = b_1 + 2b_2 a + \dots + k b_k a^{k-1}.$$

Soit f et g deux fonction définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

Si f et g sont deux fonctions dérivables en a et si f ne s'annule pas en a alors les fonctions

$\frac{1}{f}$ et $\frac{g}{f}$ sont dérivables en a et on a

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = \frac{-f'(a)}{(f(a))^2},$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(a) = \frac{g'(a)f(a) - g(a)f'(a)}{(f(a))^2}.$$

Activité 1

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = x^3 - x^2 - 6x + 4$.

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer le nombre dérivé en 1.

f , g , $f+3g$, $5fg$, f^4 , $\frac{1}{f}$ et $\frac{g}{f}$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - x$ et C sa courbe représentative.

1. Justifier la dérivabilité de f en tout réel a .
2. Déterminer les points de C où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
3. Déterminer les points de C où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.

5. Fonction \sqrt{f}

Nous admettons le théorème suivant.

Théorème

Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

Si f est une fonction dérivable en a et si $f(a) > 0$, alors la fonction \sqrt{f} est dérivable en a et on a

$$(\sqrt{f})'(a) = \frac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}}.$$

Activité 1

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer le nombre dérivé en a .

1. $f(x) = \sqrt{3x+5}$; $a = 1$.
2. $g(x) = \sqrt{-2x+4}$; $a = 0$.
3. $h(x) = \sqrt{x^2-2x+2}$; $a = 0$.

Activité 2

On considère la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+1}$.

1. En utilisant le nombre dérivé de f en 0, estimer $\sqrt{1.1}$, $\sqrt{1.01}$, $\sqrt{1.001}$, $\sqrt{1.0001}$.
2. Comparer les résultats obtenus avec ceux affichés par la calculatrice.

6. Nombre dérivé à droite – Nombre dérivé à gauche

Activité 1

On considère la fonction $f : x \mapsto |x|$.

1. Représenter la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2. Que peut-on conjecturer sur la dérivabilité de la fonction f en zéro ?
3. a. Calculer $\varphi(h) = \frac{f(h)-f(0)}{h}$, $h \neq 0$.
 - b. Déterminer $\lim_{h \rightarrow 0^+} \varphi(h)$.
 - c. Déterminer $\lim_{h \rightarrow 0^-} \varphi(h)$.
4. Justifier votre conjecture.

Définition

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $] b, a]$.

On dit que f est dérivable à gauche en a , si le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0^- .

Cette limite est alors notée $f'_g(a)$ et est appelée le nombre dérivé de f à gauche en a .

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, b [$.

On dit que f est dérivable à droite en a , si le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0^+ .

Cette limite est alors notée $f'_d(a)$ et est appelée le nombre dérivé de f à droite en a .

Activité 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

Montrer que f est dérivable en a , si et seulement si, f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

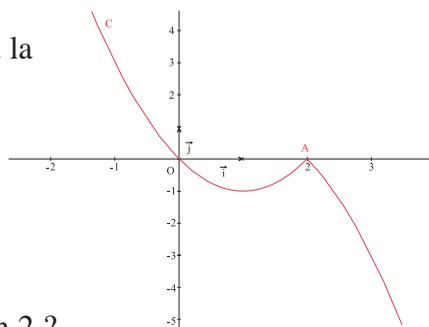
La fonction f est dérivable en a si, et seulement si, f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$. On a alors $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

7. Demi-tangente à une courbe

Activité 1

Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) , C est la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \leq 2, \\ 2x - x^2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$



On considère le point $A(2, 0)$.

1. Calculer $f'_g(2)$ et $f'_d(2)$. La fonction f est-elle dérivable en 2 ?
2. Soit h un réel strictement positif et M un point de C d'abscisse $(2+h)$. Montrer que lorsque M se rapproche de A , les coefficients directeurs des demi-droites $[AM]$ tendent vers le coefficient directeur de la demi-droite $[AT_1]$ où $T_1(3, -2)$.
3. Soit h un réel strictement positif et N un point de la courbe C d'abscisse $(2-h)$. Montrer que lorsque N se rapproche de A , les coefficients directeurs des demi-droites $[AN]$ tendent vers le coefficient directeur de la demi-droite $[AT_2]$ où $T_2(1, -2)$.

Conséquence

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

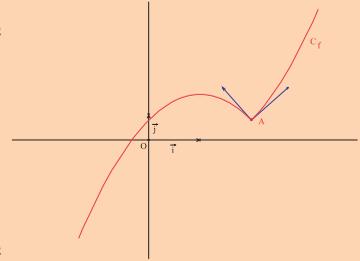
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

- f est dérivable à droite en a , si et seulement si, la courbe représentative de f admet au point $A(a, f(a))$ une demi-tangente déterminée par $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$, $x \geq a$.

Un vecteur directeur de cette demi-tangente est $\vec{u}_d \begin{pmatrix} 1 \\ f'_d(a) \end{pmatrix}$.

- f est dérivable à gauche en a , si et seulement si, la courbe représentative de f admet au point $A(a, f(a))$ une demi-tangente déterminée par $y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$, $x \leq a$.

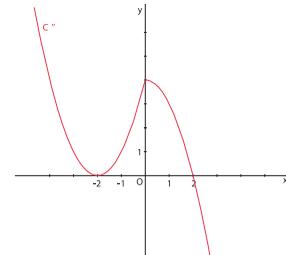
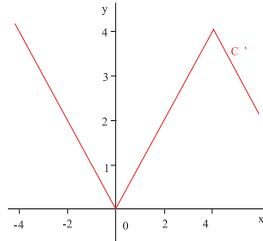
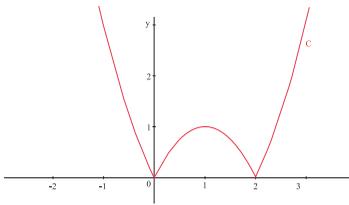
Un vecteur directeur de cette demi-tangente est $\vec{u}_g \begin{pmatrix} -1 \\ -f'_g(a) \end{pmatrix}$.



Activité 2

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a tracé les courbes respectives C , C' et C'' des fonctions f , g et h définies sur \mathbb{R} , par

$$f : x \mapsto |x^2 - 2x| ; \quad g : x \mapsto \begin{cases} |x| & \text{si } x \leq 4 \\ -x+8 & \text{si } x > 4 \end{cases} ; \quad h : x \mapsto \begin{cases} (x+2)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + 4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Pour chacune des fonctions f , g et h , identifier les points où elle n'est pas dérivable, donner les équations des demi-tangentes en ces points et les représenter.

8. Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

Définition

- Soit a et b finis ou infinis.

On dit que la fonction f est dérivable sur $]a, b[$ si f est dérivable en tout réel de $]a, b[$.

- Soit a un réel et b fini ou infini.

On dit que la fonction f est dérivable sur $]a, b[$ si f est dérivable sur $]a, b[$ et si elle est dérivable à droite en a .

- Soit a fini ou infini et b un réel.

On dit que la fonction f est dérivable sur $]a, b[$ si f est dérivable sur $]a, b[$ et si elle est dérivable à gauche en b .

- Soit a et b deux réels.

On dit que la fonction f est dérivable sur $]a, b[$ si f est dérivable sur $]a, b[$ et si elle est dérivable à droite en a et si elle est dérivable à gauche en b .

Activité 1

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I .

1. $f : x \mapsto 3x + 1$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$, $I =]-1, 1[$.
3. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 2}$, $I = \mathbb{R}$.
4. $f : x \mapsto 3x + 5$, $I = [2, 5]$.
5. $f : x \mapsto x\sqrt{x}$, $I = [0, +\infty[$.
6. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$, $I =]-\infty, 1]$.

Activité 2

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} -x(x+2) & \text{si } x \leq 0, \\ x(x+2) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Etudier la dérivabilité de f sur l'intervalle $]-\infty, 0]$.
2. Etudier la dérivabilité de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. La fonction f est-elle dérivable sur \mathbb{R} ?

Activité 3

On considère la fonction $f : x \mapsto |2x + 1| + |x - 2|$.

1. Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, -\frac{1}{2}[$, $]-\frac{1}{2}, 2[$ et $]2, +\infty[$.
2. Etudier la dérivabilité de f en $-\frac{1}{2}$ et en 2 .

10. Demi-tangente verticale

Activité 1

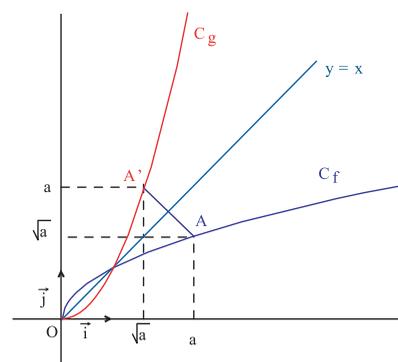
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On a tracé les représentations graphiques C_f et C_g des fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$.

Soit un réel $a > 0$ et les points $A(a, \sqrt{a})$ et $A'(\sqrt{a}, a)$.

1. Vérifier que A appartient à C_f et que A' appartient à C_g .
2. Soit I le milieu du segment $[AA']$.

- a. Montrer que I appartient à la première bissectrice d'équation $y = x$.
- b. Montrer que les droites (OI) et (AA') sont perpendiculaires.
- c. En déduire que les points A et A' sont symétriques par rapport à la première bissectrice.



3. a. Ecrire l'équation de la tangente D à C_f au point A.
 b. Ecrire l'équation de la tangente D' à la courbe de C_g au point A'.
 c. Montrer que D et D' sont symétriques par rapport à la première bissectrice.
4. a. Montrer que C_g admet une demi-tangente au point O, déterminée par $y = 0, x \geq 0$.
 b. Peut-on tracer une demi-tangente à C_f au point O ?
 c. Calculer la limite de $\frac{f(h) - f(0)}{h}$ quand h tend vers 0^+ .

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

Si $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = +\infty$ (ou $-\infty$) alors la courbe représentative de f admet au point

M (a, f(a)) une demi-tangente verticale.

Si $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = +\infty$ (ou $-\infty$) alors la courbe représentative de f admet au point

M (a, f(a)) une demi-tangente verticale.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -\sqrt{|x|}$.

1. Tracer C la courbe représentative de g.
2. Etudier la limite de $\frac{g(h) - g(0)}{h}$ quand h tend vers 0.
3. Tracer les demi-tangentes à C au point d'abscisse 0.

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on désigne par C, la courbe représentative d'une fonction f dérivable en 1 et telle qu'une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = \frac{1}{2}x + 3$. Alors $f'(1) =$

$\frac{7}{2}$

$\frac{1}{2}$

3.

2. Dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on désigne par C, la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$.

Alors la tangente à C au point d'abscisse -1 a pour équation

$y = -3x - 1$

$y = 3(x + 1) - 1$

$y = (x + 1) - 1$.

3. Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe représentative C de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - x$ admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur

3

-1

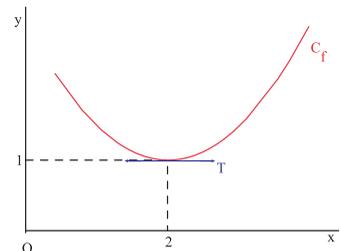
0.

4. Dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , C_f est la courbe représentative d'une fonction f et T est la tangente à C_f au point d'abscisse 2. Graphiquement on a $f'(2) =$

0

2

1.



5. Dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , on désigne par C la courbe représentative de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors il existe une tangente à C parallèle à

l'axe (O, \vec{i})

la droite $y = 2x + 3$

la droite $y = -2x + 3$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si f est une fonction dérivable à droite et à gauche en a, alors f est dérivable en a.

2. La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable en 0.

3. La fonction $x \mapsto \sqrt{2x+3}$ est dérivable à droite en $-\frac{3}{2}$.

4. Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.

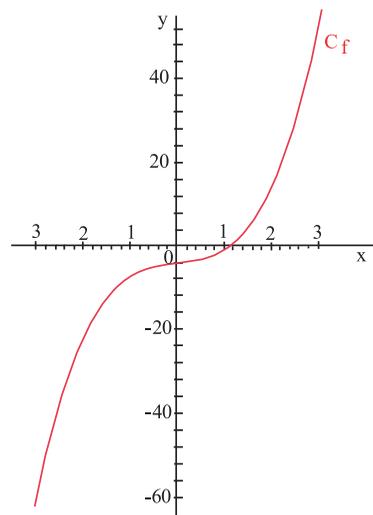
5. Si f est une fonction impaire dérivable en 0 alors $f'(0) = 0$.

Mobiliser ses compétences

Situation 1

Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) on a représenté la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^3 + x - 4$.

1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
2. On désigne par α la solution de l'équation $f(x) = 0$.
Montrer que $\alpha \in [1, 2]$.
3. On se propose de déterminer des valeurs approchées de α par excès en appliquant la méthode de Newton.
 - a. Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
Vérifier que $\alpha \in [1, x_1]$.
 - b. Déterminer l'abscisse x_2 du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe au point d'abscisse x_1 .
Vérifier que $\alpha \in [1, x_2]$.
 - c. Réitérer le procédé en considérant la tangente au point d'abscisse x_2 .
En déduire un encadrement plus précis de α .



Situation 2

Soit f la fonction définie pour tout réel x différent de 1 par $f(x) = \frac{1-x^{10}}{1-x}$.

1. Montrer que pour tout réel x différent de 1, $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^9$.
2. Soit a un réel différent de 1, calculer de deux manières différentes le réel $f'(a)$.
3. En déduire la somme $1 + 2a + 3a^2 + \dots + 9a^8$.

Exercices et problèmes

Exercice 1

Calculer le nombre dérivé de la fonction f en a .

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 5 \quad ; \quad a = 1.$$

$$f(x) = \frac{4}{2x+3} \quad ; \quad a = -1.$$

$$f(x) = \frac{3x+5}{-2x+3} \quad ; \quad a = \frac{1}{3}.$$

$$f(x) = \frac{-3}{x^2+3} \quad ; \quad a = 2.$$

$$f(x) = (2x+3)^3 \quad ; \quad a = \frac{1}{2}.$$

$$f(x) = \sqrt{4x+5} \quad ; \quad a = 0.$$

$$f(x) = x\sqrt{4x} \quad ; \quad a = 1.$$

$$f(x) = \sqrt{-x^2+5x-4} \quad ; \quad a = 3.$$

Exercice 2

Pour chacune des fonctions ci-dessous, étudier la continuité, la dérivabilité à droite, la dérivabilité à gauche et la dérivabilité en a .

$$f : x \mapsto |x|\sqrt{x} \quad ; \quad a = 0.$$

$$g : x \mapsto |x-1| \quad ; \quad a = 1.$$

Exercice 3

Calculer, dans chaque cas, la limite de f en a , en utilisant le nombre dérivé en a d'une fonction que l'on déterminera.

$$f(x) = \frac{x^2-16}{x+4} \quad , \quad a = -4.$$

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x+5} - 1}{x+4} \quad , \quad a = -4.$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \quad , \quad a = 1.$$

$$f(x) = \frac{(x+1)^{2006} - 1}{x} \quad , \quad a = 0.$$

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 4x - 7$.

- Déterminer le nombre dérivé de f en 1.
- On désigne par C la courbe représentative de f et par T la tangente à C au point d'abscisse 1.
 - Déterminer une équation de T .
 - Tracer T et C .

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit la fonction f définie sur $[-4, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+4}$.

- Déterminer le nombre dérivé de f en 0.
- On désigne par C la courbe représentative de f et par T la tangente à C au point d'abscisse 0.
 - Déterminer une équation de T .
 - Tracer T et C .

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$.

- Montrer que pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f(x) = 3 + \frac{4}{x-1}$.
- Déterminer le nombre dérivé de f en 3.
- On désigne par C la courbe représentative de f et par T la tangente à C au point d'abscisse 3.
 - Déterminer une équation de T .
 - Tracer T et C .

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$f(x) = ax^2 + bx + c$ et telle que

- la courbe représentative de f passe par le point $A(-1, -8)$,
- la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 3$.

- Déterminer les réels a , b et c .
- Représenter la fonction f ainsi que la tangente T .

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On désigne par P et P' les paraboles d'équations

respectives $y = x^2$ et $y = -\frac{1}{3}x^2 + 1$.

- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de P et de P' , on notera A le point d'abscisse négative et B le point d'abscisse positive.

2. Soient T et T' les tangentes respectives à P et P' au point A .

a. Déterminer une équation de chacune des droites T et T' .

b. En déduire que les droites T et T' sont perpendiculaires.

3. Soient D et D' les tangentes respectives à P et P' au point B .

a. Déterminer une équation de chacune des droites D et D' .

b. En déduire que les droites D et D' sont perpendiculaires.

4. Tracer P, P', T, T', D et D' .

Exercice 9

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on désigne par C et C' , les courbes représentatives respectives des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \text{ et } g(x) = x^3 + 3x^2 + 1.$$

1. Vérifier que f et g sont dérivables sur \mathbb{R} .

2. Calculer le nombre dérivé de f respectivement de g en tout réel a .

3. Soit a un réel. Montrer que les tangentes respectives à C et à C' au point d'abscisse a sont parallèles.

Exercice 10

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on désigne par C , la courbe représentative de la fonction

$$f \text{ définies sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = \frac{5}{2x^2 + 3}.$$

1. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} .

2. Calculer le nombre dérivé de f en tout réel a .

3. En déduire, lorsqu'elles existent

a. les tangentes à C qui sont parallèles à l'axe (O, \vec{i}) ,

b. les tangentes à C qui sont parallèles à l'axe (O, \vec{j}) .

c. les tangentes à C qui sont parallèles à la première bissectrice d'équation $x = y$.

d. les tangentes à C qui sont parallèles à la deuxième bissectrice d'équation $x = -y$.

Exercice 11

Le plan étant muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) ,

on désigne par C , la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$.

1. Vérifier que f est dérivable sur \mathbb{R} .

2. Calculer le nombre dérivé de f en tout réel a .

3. Soit A et B les points de C d'abscisses respectives -1 et 2 .

a. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB) .

b. Déterminer les points de C en lesquels la tangente à C est parallèle à la droite (AB) .

Exercice 12

Le plan étant muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) ,

on désigne par C la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^5 - 3x^3$.

1. Montrer que f est impaire.

2. a. Vérifier que f est dérivable sur \mathbb{R} .

b. Calculer le nombre dérivé de f en tout réel a .

3. Soit a un réel. Montrer que les tangentes à C respectivement aux points d'abscisses a et $-a$ sont parallèles.

Exercice 13

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) ,

on désigne par C et C' , les courbes représentatives respectives des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 \text{ et } g(x) = -x^2 - 6x - 9.$$

1. Montrer que C et C' se coupent en un seul point que l'on notera A .

2. Montrer que les courbes C et C' admettent au point A la même tangente T dont on déterminera une équation.

3. Montrer que C est au-dessus de T et que C' est en dessous de T .

4. Tracer C, C' et T .

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^4 + 4x - 5$.

1. Déterminer le nombre dérivé de f en 1 .

2. Estimer $f(1,0001)$ et $f(0,999999)$.

3. Comparer les résultats obtenus avec ceux affichés par la calculatrice.

Exercice 15

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x+5}$.

1. Déterminer le nombre dérivé de f en 10 .

2. Estimer $\sqrt{25,0002}$, $\sqrt{25,000002}$.

3. Comparer les résultats obtenus avec ceux affichés par la calculatrice.

Exercice 16

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?

2. Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 0 .

3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 17

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = |x^2 - 4|$.

1. La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R} ?
2. a. Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en -2 .
b. La fonction f est-elle dérivable en -2 ?
c. Déterminer des équations des demi-tangentes à C en -2 .
3. a. Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 2 .
b. La fonction f est-elle dérivable en 2 ?
c. Déterminer des équations des demi-tangentes à C en 2 .
4. Tracer C , ainsi que les demi-tangentes à C respectives au points d'abscisse 2 et -2 .

Exercice 18

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on désigne par C la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-6} & \text{si } x \geq 3 \\ x^2 - 3x & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en 3 ?
2. a. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 3 .
b. Déterminer une équation de la demi-tangente à C en 3 .
3. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 3 .
b. En déduire que C admet une demi-tangente verticale à droite en 3 .
c. La fonction f est-elle dérivable en 3 ?
4. Tracer C , ainsi que les demi-tangentes à C au point d'abscisse 3 .

Exercice 19

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Tracer la représentation graphique d'une fonction f qui a les caractéristiques suivantes

- f est définie et continue sur $[-2, 4]$.
- la courbe de f admet en 1 une tangente d'équation $y = 3$.
- la courbe de f admet en 4 une demi-tangente d'équation $y = -2$.
- la courbe de f admet en -2 une demi-tangente verticale.
- l'équation $f(x) = 0$ admet -2 et 3 pour solutions.
- f est décroissante sur $[1, 4]$.
- f est positive sur $[-2, 3]$.

Exercice 20

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Tracer la représentation graphique d'une fonction f qui a les caractéristiques suivantes

- f est définie et continue sur $[-1, 1]$,
- f est paire,
- f est croissante sur $[0, 1]$,
- f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$.

A-t-on une unique fonction qui vérifie ces conditions ?

2. Vérifier, à l'aide du graphique, que la fonction f est dérivable à gauche en 0 . Que vaut $f'_g(0)$?
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

1. Montrer que f est paire.
2. Déterminer les équations des demi-tangentes aux points d'abscisses -1 et 1 .

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

3. On se propose de montrer que C_f est le demi-cercle C de centre O et de rayon 1 situé au dessus de l'axe des abscisses.

a. Soit M un point de C_f d'abscisse x . Déterminer OM et en déduire que M appartient au demi-cercle C .

b. Soit N un point de C d'abscisse x . Déterminer l'ordonnée de N en fonction de x et en déduire que N appartient à C_f .

c. Conclure.

4. Tracer C_f ainsi que les demi-tangentes aux points d'abscisses -1 et 1 .

5. Soit A le point de C_f d'abscisse $\frac{3}{5}$.

a. Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point A .

b. La droite T coupe l'axe des abscisses en P . Déterminer les coordonnées de P puis calculer OP et PA .

c. En déduire que la droite T est perpendiculaire à la droite (OA) .

Avec l'ordinateur

Soit C la parabole représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 2x - 3$ et A le point de C d'abscisse 1.

A tout point M de C distinct de A, on désigne par m le coefficient directeur de la sécante (AM).

On se propose dans cette séquence, d'étudier à l'aide d'un tableur, le comportement des réels m lorsque M varie sur la parabole C privée du point A.

Dans la cellule A1, on tape $f(x) = x^2 + 2x - 3$ puis on fusionne A1 et B1.

On choisit une valeur initiale de x_0 , dans B2 (par exemple 1) et dans B3 on calcule $f(x_0)$.

	A	B	C	D
1	f(x)= x^2+2x-3			
2	x0=	1		
3	f(x0)=	0		
4				
5				$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
6	h	x=x0+h	f(x)	
7	0,2	1,2	0,84	4,2
8	0,1	1,1	0,41	4,1
9	0,05	1,05	0,2025	4,05
10	0,025	1,025	0,100625	4,025
11	0,0125	1,0125	0,05015625	4,0125
12	0,00625	1,00625	0,025039063	4,00625
13	0,003125	1,003125	0,012509766	4,003125
14	0,0015625	1,0015625	0,006252441	4,0015625
15	0,00078125	1,00078125	0,00312561	4,00078125
16	0,00039063	1,000390625	0,001562653	4,000390625
17	0,00019531	1,000195313	0,000781288	4,000195313
18	9,7656E-05	1,000097656	0,000390635	4,000097656
19	4,8828E-05	1,000048828	0,000195315	4,000048828
20	2,4414E-05	1,000024414	9,76568E-05	4,000024414
21	1,2207E-05	1,000012207	4,88283E-05	4,000012207
22	6,1035E-06	1,000006104	2,44141E-05	4,000006103
23				

L'écart initial entre x et x_0 étant égal à 0,2 ; on le réduit à chaque étape à sa moitié. Ainsi dans la cellule A7, on tape 0,2 et dans la cellule A8 on écrit la formule A7/2, puis on la recopie vers le bas (jusqu'à A22). Dans la cellule B7 on inscrit la formule =B\$2+A7 puis dans C7, on écrit la formule =B7^2+2*B7-3 et enfin dans D7, on écrit la formule =(C7-B3)/A7.

Recopier la plage A8D8 vers le bas jusqu'à A22D22.

Que peut-on conjecturer sur la limite en x_0 de f ?

Sur les chronophotographies ci-contre, on repère les positions successives de la balle au cours du temps

Par dérivation numérique, on peut obtenir les différentes valeurs des vitesses.

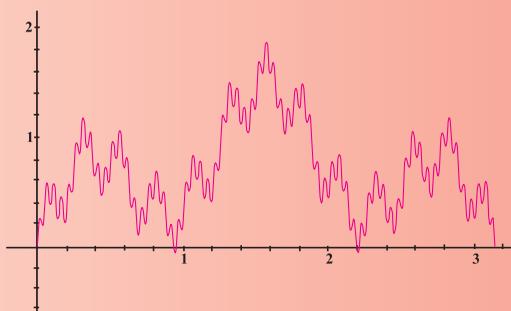
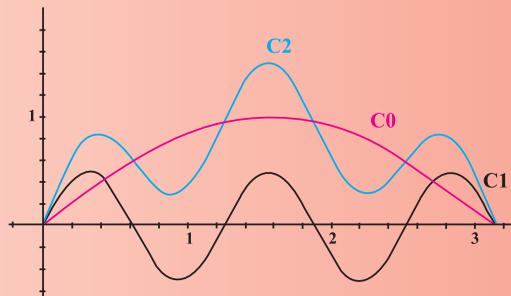


Au XVIII^e siècle, Jean d'Alembert introduit la définition du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement sous une forme semblable à celle qui est utilisée et enseignée de nos jours, et c'est seulement avec les travaux de Weierstrass au milieu du XIX^e siècle que le concept de nombre dérivé sera entièrement formalisé.

La première fonction continue partout mais dérivable nulle part a été construite par Weierstrass. Cette fonction a aidé à clarifier les notions de continuité et de dérivabilité, et a obligé les mathématiciens à en donner des définitions précises : auparavant, ceux-ci se contentaient des définitions " intuitives ", et pensaient qu'une fonction continue était toujours dérivable sauf éventuellement en quelques points : la construction de Weierstrass est venue contredire cette idée intuitive.

L'idée de Weierstrass est de partir d'une fonction f_0 qui est parfaitement dérivable, puis on perturbe cette première fonction en lui ajoutant une deuxième fonction, notée f_1 , de façon que la courbe de $f_1 + f_0$, zig-zague autour de celle de f_0 .

Par itération de ce procédé, on obtient la courbe de Weierstrass, courbe d'une fonction partout continue et nulle part dérivable.



Fonction dérivée

Chapitre 6

" Ne lise pas mes principes qui n'est pas mathématicien "

De Vinci

Pour commencer**Activité 1**

Résoudre dans \mathbb{R} , les inéquations ci-dessous.

$$x^4 + 2x^2 + 1 > 0 ;$$

$$x^2 - 3x + 1 < 0 ;$$

$$\frac{x^3 - 1}{(x + 2)^2} > 0 .$$

Activité 2

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} , par $f(x) = x^3 + 3x$.

1. Montrer que f est croissante sur \mathbb{R} .
2. La fonction f admet-elle un maximum sur \mathbb{R} ?
3. La fonction f admet-elle un minimum sur \mathbb{R} ?

Activité 3

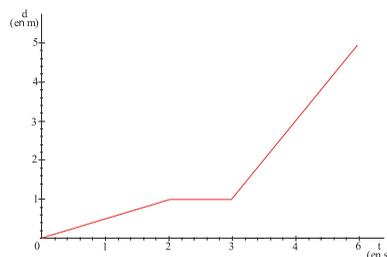
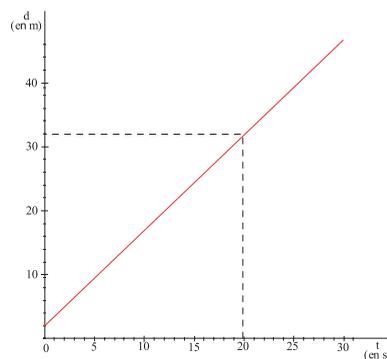
Soit a et b deux réels distincts et f une fonction définie sur $[a, b]$.

Montrer que si f est monotone sur $[a, b]$ alors elle admet un maximum et un minimum sur $[a, b]$.

1. Fonction dérivée

Activité 1

- Le mouvement d'un mobile est décrit par le graphique ci-contre, où $d(t)$ désigne la distance parcourue à l'instant t .
Montrer que le mobile se déplace à vitesse constante.
- Le mouvement d'un mobile est décrit par le graphique ci-contre, où $d(t)$ désigne la distance parcourue à l'instant t .
 - Quelle est la distance parcourue entre $t = 0$ et $t = 2$?
 - Quelle est la vitesse moyenne entre $t = 0$ et $t = 2$?
 - Déterminer la vitesse instantanée $v(t)$, sur chacun des intervalles $[0, 2[$, $]2, 3[$ et $]3, 5[$?



Activité 2

Un mobile se déplace sur un axe (xx') muni d'un repère (O, \vec{i}) (1 unité = 1 m).

L'abscisse $x(t)$ du mobile est donnée en fonction du temps t (en seconde), par la loi horaire du mouvement $x(t) = t^2 - 2t - 3$, $t \in [0, 5]$.

- Exprimer la vitesse instantanée $v(t)$ du mobile, à l'instant t .
- A quel instant t_0 , la vitesse instantanée s'annule-t-elle ?
Quelle est alors la position du mobile ?
- A quel instant t_1 , le mobile passe-t-il par le point O ?
Quelle est alors sa vitesse instantanée ?
- Représenter la fonction $v : t \mapsto v(t)$, $t \in [0, 5]$.

Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I . On appelle fonction dérivée de f et on note f' , la fonction qui à tout réel x appartenant à I , associe le nombre dérivé $f'(x)$, de f en x .

Soit a et b deux réels, f une fonction définie sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Si f admet un nombre dérivé à droite en a (respectivement à gauche en b), en adoptant ce nombre dérivé pour $f'(a)$ (respectivement $f'(b)$) on peut définir la fonction dérivée de f sur $[a, b[$ (respectivement $]a, b]$).

2. Opérations sur les fonctions dérivées

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I , α et β deux réels.

• Les fonctions $f+g$, fg , $\alpha f + \beta g$ sont dérivables sur I et on a

$$(f + g)' = f' + g' \quad ; \quad (fg)' = f'g + g'f \quad ; \quad (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' .$$

• Pour tout entier naturel $k \geq 2$, la fonction f^k est dérivable sur I et on a $(f^k)' = kf' f^{k-1}$.

En particulier toute fonction polynôme est dérivable sur \mathbb{R} .

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que f ne s'annule pas sur I .

• Les fonctions $\frac{1}{f}$ et $\frac{g}{f}$ sont dérivables sur I et on a

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2} \quad ; \quad \left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2} .$$

• Pour tout entier naturel $k \geq 1$, la fonction $\frac{1}{f^k}$ est dérivable sur I et on a

$$\left(\frac{1}{f^k}\right)' = \frac{-kf'}{f^{k+1}} .$$

Activité 3

Soit les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2x^2 + 2$ et $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes, ainsi que sa fonction dérivée.

$$f + g \quad ; \quad fg \quad ; \quad \frac{1}{2}f - 3g \quad ; \quad f^5 \quad ; \quad \frac{1}{f} \quad ; \quad \frac{1}{f} + g .$$

3. Dérivée de la fonction \sqrt{f}

Soit f une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I . Alors la fonction \sqrt{f} est dérivable sur I et on a $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$.

Activité 4

Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$.

1. $f(x) = \sqrt{2x+1}$.

2. $f(x) = \sqrt{3x^2+1}$.

3. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$.

4. Dérivée de la fonction $x \mapsto f(\alpha x + \beta)$

Activité 1

1. Vérifier que la fonction $f : x \mapsto \frac{3}{x^2}$ est dérivable en tout réel non nul et calculer $f'(x)$.

2. On considère la fonction $g : x \mapsto f(2x + 3)$.

Montrer que g est dérivable en tout réel x différent de $-\frac{3}{2}$ et que $g'(x) = 2f'(2x+3)$, pour tout x différent de $-\frac{3}{2}$.

Théorème (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit α et β deux réels. Alors la fonction $g : x \mapsto f(\alpha x + \beta)$ est dérivable en tout réel x tel que $\alpha x + \beta$ appartient à I . De plus la fonction g' est définie par $g'(x) = \alpha f'(\alpha x + \beta)$.

5. Sens de variation

Activité 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , a un élément de I et φ la fonction définie par $\varphi(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, pour tout $h \neq 0$ tel que $a + h$ appartient à I .

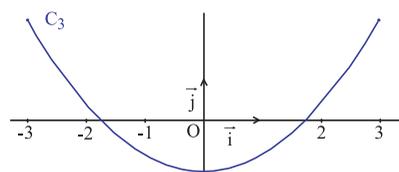
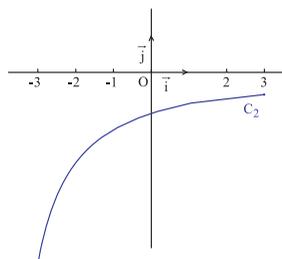
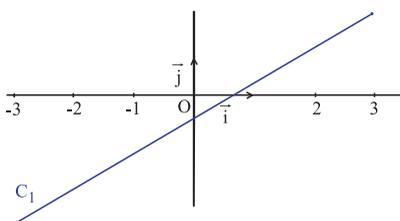
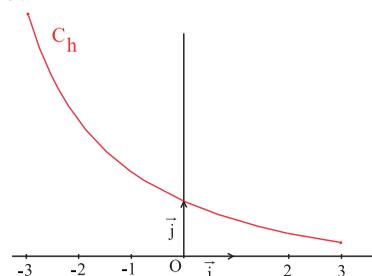
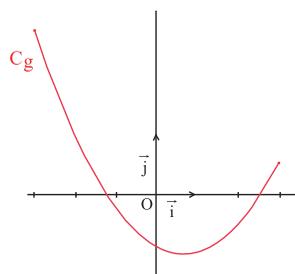
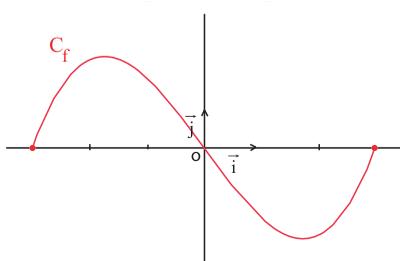
1. Montrer que si f est croissante sur I alors $\varphi(h) \geq 0$. En déduire le signe de $f'(a)$.
2. Que peut-on dire du signe de f' lorsque f est croissante sur I ?
3. Donner une condition suffisante sur les variations de f pour que $f'(x)$ soit négatif, pour tout x de I .

Activité 2

Le plan est muni d'un repère.

On a représenté les fonctions f, g et k ainsi que leurs fonctions dérivées f', g' et k' .

Identifier pour chaque fonction la courbe de sa fonction dérivée.



Activité 3

Représenter une fonction f définie et dérivable sur $[-1, 3]$ telle que f' est négative sur $[-1, 0[$ et positive sur $[0, 3]$.

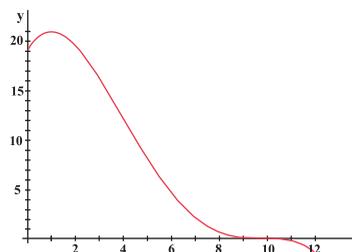
Activité 4

Une météorologiste affirme que, dans sa ville, la température (en $^{\circ}\text{C}$), une journée de printemps, peut être évaluée approximativement à

l'aide de la fonction T définie par $T(x) = -\frac{1}{100}(x-10)^3(x+2)$

où x est le nombre d'heures qui se sont écoulées depuis midi et

$0 < x < 12$. On a représenté ci-contre, la fonction T .

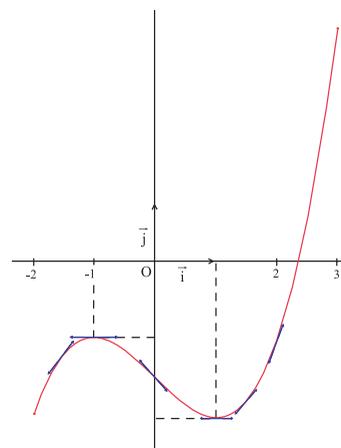


1. Calculer le taux de variation instantané T' de la température.
2. a. Déterminer l'intervalle de temps sur lequel $T'(t)$ est positif.
b. Lire graphiquement les variations de la température sur cet intervalle.
3. a. Déterminer l'intervalle de temps sur lequel $T'(t)$ est négatif.
b. Lire graphiquement les variations de la température sur cet intervalle.

Activité 5

On a représenté dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , une fonction f définie et dérivable sur $[-2, 3]$.

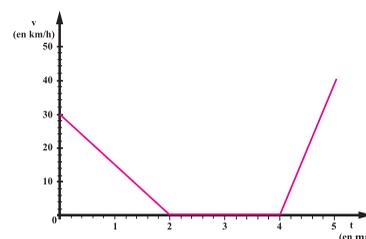
1. Donner les valeurs de $f'(-1)$ et $f'(1)$.
2. a. Déterminer graphiquement les variations de f sur $[-2, -1]$.
b. Déterminer graphiquement le signe de $f'(x)$, pour x appartenant à $[-2, -1]$.
3. a. Déterminer graphiquement les variations de f sur $[-1, 1]$.
b. Déterminer graphiquement le signe de $f'(x)$, pour x appartenant à $[-1, 1]$.
4. a. Déterminer graphiquement les variations de f sur $[1, 3]$.
b. Déterminer graphiquement le signe de $f'(x)$, pour x appartenant à $[1, 3]$.
5. Etablir le lien entre les variations de f et le signe de f' .



Activité 6

On a représenté la variation pendant 5 minutes de la vitesse d'une rame de métro.

1. La rame de métro a marqué un arrêt dans une station.
Retrouver graphiquement, la période d'arrêt.
2. Décrire le mouvement de la rame.



Activité 7

1. Tracer la courbe représentative d'une fonction f définie sur \mathbb{R} , telle que la tangente en chacun de ses points soit de pente nulle.
2. Que peut-on conjecturer sur f ?

Théorème (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

La fonction f est constante sur I , si et seulement si, pour tout x appartenant à I , $f'(x) = 0$.

La fonction f est croissante sur I , si et seulement si, pour tout x appartenant à I , $f'(x) \geq 0$.

La fonction f est décroissante sur I , si et seulement si, pour tout x appartenant à I , $f'(x) \leq 0$.

Activité 8

Soit un réel $\alpha > 0$.

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $]-\alpha, \alpha[$.

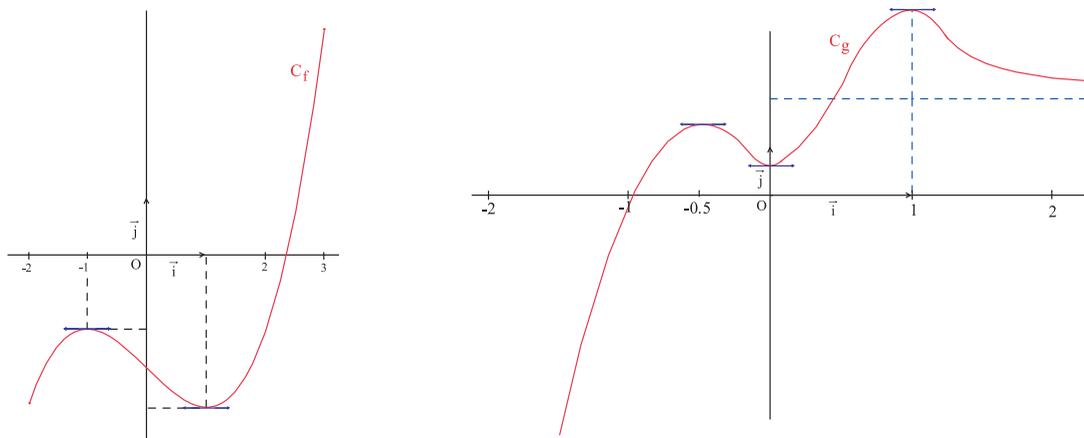
1. Montrer que si f est paire alors f' est impaire.
2. Montrer que si f est impaire alors f' est paire.

6. Extrema

Activité 1

Le plan est muni d'un repère.

Les courbes ci-dessous représentent des fonctions f et g dérivables sur \mathbb{R} .



1. On considère la restriction f_1 de f à l'intervalle $]-2, 2[$.
 - a. Identifier les réels en lesquels la fonction f_1 admet un maximum ou un minimum.
 - b. Donner la valeur de la dérivée de f_1 en ces réels.
 - c. Etudier le signe de f'_1 à droite et à gauche de chacun de ces réels a.
 - d. On désigne par M le maximum de f_1 sur $]-2, 2[$; M est-il un maximum de f sur \mathbb{R} ?
2. Reprendre les mêmes questions, pour la fonction g_1 , restriction de g à $]-1, 1[$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I .

On dit que f admet un maximum local en a , s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que $f(x) \leq f(a)$, $x \in J$.

On dit que f admet un minimum local en a , s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I , tel que $f(x) \geq f(a)$, $x \in J$.

Lorsque f admet un minimum ou un maximum local en a on dit que f admet un extremum local en a .

Théorème (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , et a un élément de I .

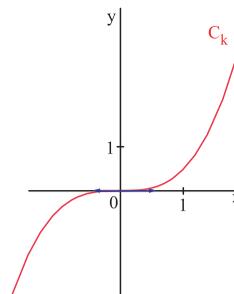
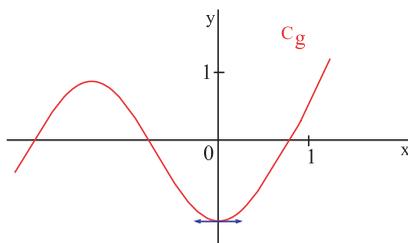
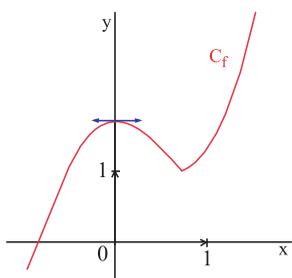
Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère.

Les courbes ci-dessous représentent des fonctions f , g et k dérivables sur \mathbb{R} .

On a représenté pour chaque fonction la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.



1. Que valent $f'(0)$, $g'(0)$ et $k'(0)$?
2. Quelles sont les courbes qui présentent un extremum local en 0 ?
3. a. Déterminer le signe de $k'(x)$ pour $x > 0$.
b. Déterminer le signe de $k'(x)$ pour $x < 0$.

Dans l'activité précédente les fonctions proposées ont toutes des dérivées qui s'annulent en zéro. Cependant, une des fonctions ne possède pas un extremum local en 0.

Dans ce qui suit on se propose de déterminer une condition suffisante pour qu'une fonction dérivable admette un extremum local.

Activité 3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I . Soit h un réel strictement positif tel que l'intervalle $]a-h, a+h[$ soit inclus dans I . On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $]a-h, a+h[$.

1. On suppose que

$$g'(a) = 0,$$

$$g'(x) > 0, a-h < x < a,$$

$$g'(x) < 0, a < x < a+h.$$

a. Montrer que g admet un maximum en a .

b. Donner une condition suffisante pour que f admette un maximum local.

2. On suppose que

$$g'(a) = 0,$$

$$g'(x) < 0, a-h < x < a,$$

$$g'(x) > 0, a < x < a+h.$$

a. Montrer que g admet un minimum en a .

b. Donner une condition suffisante pour que f admette un minimum local.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , a un réel de I et $h > 0$ tel que $]a-h, a+h[\subset I$.
Si f' s'annule en a en changeant de signe alors f admet un extremum local en a .

7. Tableau de variation

Activité 1

On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2, +\infty[$.

On a synthétisé dans le tableau ci-contre, dit tableau de variation, les limites aux bornes et les variations de la fonction f .

1. Donner les limites de f aux bornes de $[-2, +\infty[$.
2. Décrire les variations de f .
3. Donner le signe de f' et compléter le tableau.
4. Identifier les extrema locaux de f .
5. Déterminer le minimum de f sur $[-2, +\infty[$.

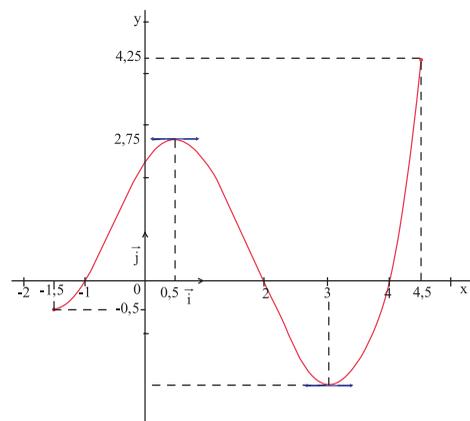
	x	-2	0	3	$+\infty$
signe de $f'(x)$					
f		1	5	-4	$+\infty$

Activité 2

Le plan est muni d'un repère.

On a représenté ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[-1.5, 4.5]$.

1. a. Dresser le tableau de variation de la fonction f .
b. En déduire le signe de la dérivée f' sur $[-1.5, 4.5]$.
2. On suppose que la fonction f est la fonction dérivée d'une fonction g définie et dérivable sur $[-1.5, 4.5]$.
a. Donner le signe de la fonction f sur $[-1.5, 4.5]$.
b. Dresser le tableau de variation de la fonction g .



8. Problèmes

Activité 1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Vérifier que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $f'(x)$. Etudier le signe de f' .
3. a. Dresser le tableau de variation de f .
b. Déterminer les extrema locaux de f .
c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois racines.
d. Donner pour chacune des racines un encadrement à 10^{-1} près.
4. Discuter suivant les valeurs du réel m , le nombre des solutions de l'équation $f(x) = m$.

Activité 2

1. a. Montrer que $1 - x \leq \frac{1}{1+x}$, pour tout $x \geq 0$.
b. En déduire que $1 - x \leq \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, pour tout $x \geq 0$.
2. Montrer que $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$, pour tout $x \geq 0$.
3. Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \sqrt{1+x}$.
a. Déterminer la dérivée f' de f .
b. Utiliser la question 1, pour déduire le signe de f' .
c. En déduire que $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 \leq \sqrt{1+x}$, pour tout $x \geq 0$.
4. Vérifier que $1 + \frac{10^{-15}}{2}$ est une valeur approchée de $\sqrt{1+10^{-15}}$ à 10^{-30} près.

Activité 3

Soit un entier $k \geq 1$.

1. Montrer que $x^k \geq k(x-1)$, pour tout $x \geq 1$.
2. En déduire que $x^k \geq k(x-1)$, pour tout $x \geq 0$.

Activité 4

Soit a_1, a_2, \dots, a_n des réels et f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \dots + (a_n - x)^2.$$

En quel réel x la fonction f atteint-elle son minimum ?

Activité 5

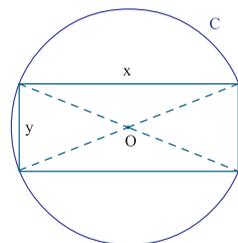
De tous les rectangles de périmètre 20 cm, quel est celui qui a la plus grande aire ?

Activité 6

Soit C un cercle de rayon 1.

On se propose de construire un rectangle inscrit dans C de périmètre maximal.

On modélise la situation par la figure ci-contre.



1. Exprimer y en fonction de x et en déduire l'expression du périmètre $p(x)$ du rectangle.
2. Etudier sur l'intervalle $]0, 2[$ les variations de la fonction p qui à x associe $p(x)$.
3. En déduire les dimensions du rectangle de périmètre maximal inscrit dans le cercle.
Faire une figure dans ce cas.

Activité 7

Une compagnie loue, à des groupes de 15 personnes ou plus, des bus d'excursion dont la capacité est de 80 personnes. Si un groupe compte exactement 15 personnes, chacune d'elles doit payer 90 dinars. Pour les groupes plus nombreux, le tarif par personne est réduit de n dinars lorsque n personnes s'ajoutent aux premières.

On se propose de déterminer l'effectif d'un groupe pour que la location d'un bus rapporte un revenu maximal.

Soit n le nombre de personnes s'ajoutant aux quinze premières d'un groupe. On désigne par $R(n)$ le revenu de la compagnie en fonction de n .

1. Vérifier que $R(n) = (15 + n)(90 - n)$.
2. On désigne par $f : x \mapsto (15 + x)(90 - x)$, la fonction qui modélise la situation.
 - a. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, 65]$.
 - b. En déduire le réel x_0 de l'intervalle $[0, 65]$ en lequel la fonction f atteint son maximum local.
Que vaut $f(x_0)$?
 - c. Donner un encadrement de x_0 entre deux entiers successifs m et $m + 1$.
Puis comparer $f(m)$, $f(m + 1)$ et $f(x_0)$.
 - d. Conclure.

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 5x^4 - 3x + 1$ a pour dérivée la fonction f' définie par

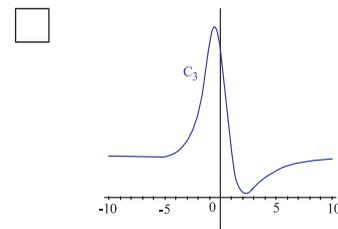
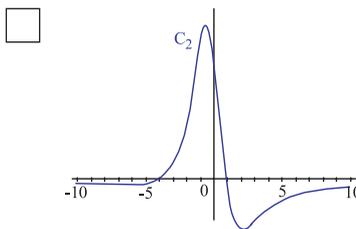
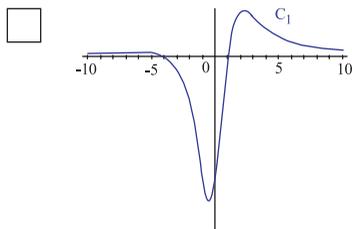
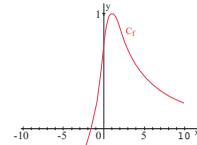
$f'(x) = 5x^4 - 2$

$f'(x) = 20x^3 - 3$

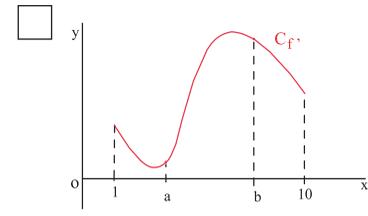
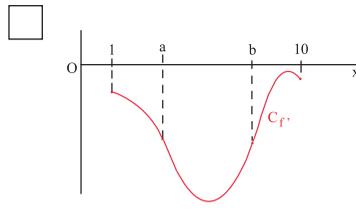
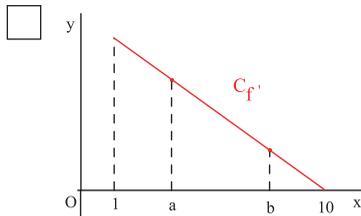
$f'(x) = 20x^3$.

2. On a représenté dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} .

L'une des courbes ci-dessous laquelle est la représentation graphique de la fonction dérivée de f . Laquelle ?



3. On a représenté dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , la fonction dérivée f' d'une fonction dérivable f sur $]1, 10[$. Dans quel cas a-t-on $f(a) > f(b)$?



4. La fonction $x \mapsto x^4 + 3x^2 + 1$, admet pour minimum

0

1

-1.

5. La fonction $x \mapsto \frac{-1}{x+1}$ est

décroissante sur $]-\infty, -1[$

décroissante sur $]-1, +\infty[$

croissante sur $]-\infty, -1[$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur \mathbb{R} .

2. La fonction $x \mapsto \sqrt{-2x+1}$ est dérivable sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$.

3. Si $f'(a) = 0$ alors f admet un minimum en a .

4. Si les fonctions dérivées de deux fonctions f et g sont égales sur un intervalle ouvert I alors $f = g$ sur I .

5. Soit f une fonction définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et a et b deux réels strictement positifs. Si f' est positive sur $[a, b]$ et $f(b) = 0$ alors f est négative sur $[a, b]$.

Mobiliser ses compétences

Situation 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit le point $M(1, 1)$ et α un réel différent de 0 et de 1.

On désigne par D_α la droite passant par M et de coefficient directeur α .

1. Vérifier que D_α a pour équation $y = \alpha x + (1 - \alpha)$.
2. On désigne par A et B , les points d'intersection de D_α respectivement avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
 - a. Déterminer les coordonnées des points A et B en fonction de α .
 - b. Exprimer AB^2 en fonction de α .
 - c. Déterminer α pour que la distance AB soit minimale.

Situation 2

1. Soit a un réel, on considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x - a}$.
 - a. Vérifier que f est dérivable en tout réel x différent de a .
 - b. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x différent de a .
 - c. On note f'' la dérivée de f' ; on note $f^{(3)}$ la dérivée de f'' et pour tout entier $k \geq 2$, $f^{(k)}$ la dérivée de $f^{(k-1)}$.
Calculer $f^{(k)}(x)$, $k \geq 2$.
2. On considère la fonction $g : x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$.
 - a. Vérifier que $g(x) = -1 + \frac{2}{1-x}$.
 - b. Montrer que g est dérivable en tout réel x différent de 1 et calculer sa dérivée.
 - c. Calculer $g^{(k)}(x)$, $k \geq 2$.

Exercices et problèmes

Exercice 1

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition, étudier la dérivabilité puis calculer la dérivée de chacune des fonctions f , f^3 , $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{f^2}$ et \sqrt{f} .

a. $f(x) = x^2 + 2$.

b. $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$.

c. $f(x) = 1 - x^2$.

d. $f(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 2

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition, étudier la dérivabilité puis calculer la dérivée de chacune des fonctions f , g , $f+g$, fg et $\frac{f}{g}$.

a. $f(x) = x^3 - 2$ et $g(x) = \frac{1}{x^2 + 2}$.

b. $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $g(x) = \frac{1-2x}{(x-1)^2}$.

c. $f(x) = \sqrt{x} + 1$ et $g(x) = x\sqrt{x}$.

Exercice 3

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$.

$$f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x - 1.$$

$$f(x) = -x^6 + x^4 + \sqrt{2x}.$$

$$f(x) = (-3x^2 + 1)^3.$$

$$f(x) = 2x^2(-x^3 + 1)^3.$$

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{x+1}.$$

$$f(x) = \frac{-5}{(2x+2)^5}.$$

$$f(x) = \frac{1}{x+3} - (3x+2)^3.$$

Exercice 4

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$.

$$f(x) = \sqrt{2x+3}.$$

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 3}.$$

$$f(x) = 3x\sqrt{2x+1}.$$

$$f(x) = \frac{-4}{(\sqrt{3x})^3}.$$

Exercice 5

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer son ensemble de définition, étudier ses limites aux bornes de son ensemble de définition, calculer sa dérivée, puis dresser son tableau de variation et déterminer ses extrema éventuels.

1. $f(x) = 4x - 3 + \frac{1}{x-5}$.

2. $g(x) = \frac{x^2 - 1}{4 - x^2}$.

3. $h(x) = 2x^4 - x^2 + 5$.

4. $s(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^3 + 3x$ où a est un réel.

On suppose que la fonction f admet deux extrema locaux en 1 et -1 .

1. Calculer la valeur de a .

2. Dresser le tableau de variation de f et préciser la nature de chacun des extrema de f .

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{a-x}{x^2-a} \text{ où } a \text{ est un réel.}$$

On suppose que la fonction f admet un extremum local en 1.

1. Calculer la valeur de a .

2. Dresser le tableau de variation de f et préciser la nature de chacun des extrema de f .

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - ax}{x^2 + 1} & \text{si } x > 1, \\ \frac{1 - ax^2}{x - 2} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

où a est un réel.

On suppose que f est continue en 1.

- Déterminer la valeur de a .
- Etudier la dérivabilité de f en 1.
- Dresser le tableau de variation de f et préciser la nature de chacun des extrema de f .

Exercice 9

On se propose de comparer les réels

$$A = \frac{(5.012013014015016)^2 + 3}{3.012013014015016} \quad \text{et}$$

$$B = \frac{(5.012013014015017)^2 + 3}{3.012013014015017}$$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 2}$.

- Quelles sont les images par f des réels 5.012013014015016 et 5.012013014015017 ?
- Calculer la dérivée de f .
- Dresser le tableau de variation de f .
- Conclure.

Exercice 10

Dans une usine, une étude statistique a montré qu'un ouvrier produit, au cours d'une matinée,

$q(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t$ unités, où t désigne le nombre d'heures de travail.

Le rendement moyen entre les instants t_0 et t_0+h est

$$\text{le rapport } \frac{q(t_0 + h) - q(t_0)}{h}.$$

Le rendement instantané à l'instant t_0 est la limite lorsque h tend vers zéro du rendement moyen entre les instants t_0 et t_0+h .

1. On désigne par r la fonction définie sur $[0, 4]$, qui à t associe le rendement instantané $r(t)$ d'un ouvrier. Donner l'expression de $r(t)$.

- A quel instant le rendement instantané s'annule-t-il ?
- Etudier le signe de la fonction r .

En déduire les variations de la quantité produite.

Exercice 11

Démontrer l'inégalité suivante

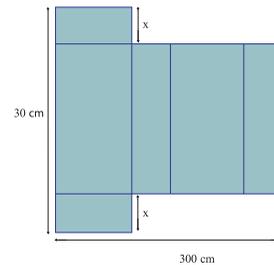
$$\sqrt{1 + x^3} \leq 1 + \frac{1}{2} x^3, \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

Exercice 12

Montrer que de tous les triangles rectangles d'hypoténuse 4 cm, le triangle isocèle est celui qui a le plus grand périmètre.

Exercice 13

Un fabricant envisage la production de boîtes de lait en carton obtenues selon le patron ci-dessous.



1. Calculer les dimensions de la boîte et son volume lorsque $x = 10$ cm.

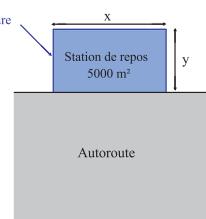
On suppose que $0 < x < 15$ et on désigne par $V(x)$ le volume de la boîte correspondante.

- Exprimer $V(x)$ en fonction de x .
- Etudier les variations de la fonction V qui à x associe $V(x)$ sur $]0, 15[$.
- En déduire la valeur de x pour laquelle le volume d'une boîte est maximal. Quel est ce volume ?

Exercice 14

On projette d'aménager une station de repos en bordure d'une autoroute. Le terrain devra être rectangulaire, d'aire 5000 m^2 et clôturé sur trois de ses côtés comme l'indique le schéma ci-dessous.

On se propose de déterminer les dimensions du terrain de sorte que la longueur de la clôture soit minimale.



- Exprimer y en fonction de x , puis en déduire l'expression de la longueur $L(x)$ de la clôture en fonction de x .
- Etudier les variations de la fonction L qui à x associe $L(x)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- En déduire les dimensions du terrain de sorte que la longueur de la clôture soit minimale. Préciser cette longueur.

Exercice 15

Un fabricant de bicyclettes doit acheter 5000 pneus par année d'un distributeur sachant que toutes les commandes contiennent le même nombre de pneus. Il veut déterminer la taille de chaque commande de sorte que le coût total soit minimal.

Il estime que pour une commande de n pneus, le coût total $c(n)$ (en dinars) est donné par $c(n) = 0.48n + \frac{124000}{n} + 1200$.

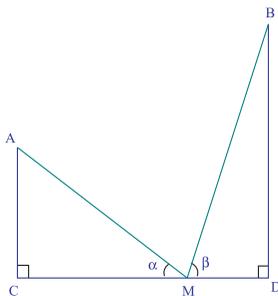
On désigne par $c : x \mapsto 0.48x + \frac{124000}{x} + 1200$

la fonction qui modélise la situation.

1. Etudier les variations de la fonction c sur l'intervalle $[1, 5000]$.
2. En déduire pour quelle valeur x_0 de l'intervalle $[1, 5000]$, la fonction c atteint-elle son minimum local. Que vaut $c(x_0)$?
3. Donner un encadrement de x_0 entre deux entiers successifs m et $m + 1$.
Puis comparer $f(m)$, $f(m + 1)$ et $f(x_0)$.
4. Conclure.

Exercice 16

On considère la figure ci-dessous où $CD = 5$, $AC = 3$, $BD = 4$ et M est un point variable sur le segment $[CD]$.



On se propose de montrer que si la somme des distances AM et BM est minimale alors les angles α et β sont égaux.

On pose $x = CM$ et $f(x) = AM + BM$.

1. Exprimer $f(x)$ en fonction de x .
2. a. Montrer que la fonction f admet un minimum que l'on déterminera.
b. Montrer que dans ce cas $\tan \alpha = \tan \beta$.
- c. Conclure.

Exercice 17

1. Le mouvement d'une particule qui se déplace sur un axe (xx') muni d'un repère (O, \vec{i}) est décrit par la loi horaire du mouvement $x(t) = t^3 - 12t + 17$, $t \geq 0$.

- a. Déterminer la vitesse instantanée de la particule.
- b. Dresser le tableau de variation de la fonction qui à t associe $x(t)$.
- c. Répondre aux questions ci-dessous.

- A quel instant la particule s'arrête-t-elle ?
- Sur quel intervalle de temps, la particule s'approche-t-elle de l'origine ?
- Sur quel intervalle de temps, la particule s'éloigne-t-elle de l'origine ?
- A quel instant la particule se trouve-t-elle à une distance minimale de l'origine ? Quelle est cette distance ?

2. Le mouvement d'une particule qui se déplace sur un axe (xx') muni d'un repère (O, \vec{i}) est décrit par la loi horaire du mouvement $x(t) = t^3 - 8$, $t \geq 0$.

- a. Déterminer la vitesse instantanée de la particule.
 - b. Dresser le tableau de variation de la fonction qui à t associe $x(t)$.
 - c. Répondre aux questions ci-dessous.
- A quel instant la particule s'arrête-t-elle ?
 - Décrire la position de la particule par rapport à l'origine.

Exercice 18

Les compagnies d'électricité doivent être en mesure de prévoir de façon assez précise la demande puisqu'elles n'ont aucun moyen de stocker l'énergie qu'elles produisent.

Une certaine compagnie utilise la relation suivante pour prévoir la demande d'électricité entre 12:00 et 18:00 pendant une journée d'hiver :

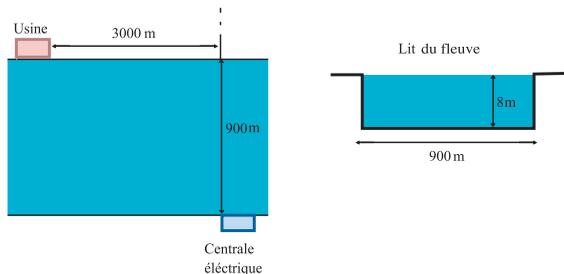
$$d(t) = -27t^4 + 252t^3 + 540t^2 + 9400 \text{ mégawatts}$$

où $0 \leq t \leq 6$.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction $d : t \mapsto d(t)$.
2. A quel moment la demande d'électricité devrait-elle atteindre son minimum ?
3. A quel moment la demande d'électricité devrait-elle atteindre son maximum ?

Exercice 19

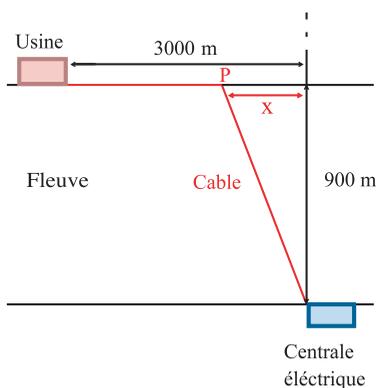
On veut relier une usine en bordure d'un fleuve, de profondeur 8 m et de 900 m de largeur, à une centrale électrique située sur la rive opposée comme l'indique le schéma ci-dessous.



Il en coûte $5^D/m$ pour installer le câble sous l'eau, et $4^D/m$ pour l'installer au dessus de l'eau.

On se propose de déterminer le parcours que doit suivre le câble pour que le coût d'installation soit minimal.

On modélise la situation par le schéma ci-dessous.



On désigne par $C(x)$ (en dinars) le coût d'installation du câble en fonction de x .

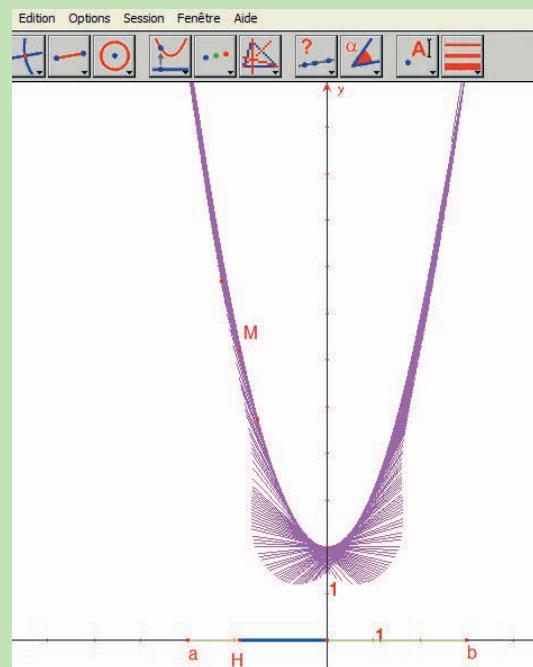
1. Vérifier que $C(x) = 80 + 5 \sqrt{900^2 + x^2} + 4(3000 - x)$.
2. Etudier les variations de la fonction C qui à x associe $C(x)$ sur l'intervalle $[0, 3000]$.
3. En déduire à quelle distance doit-on placer le piquet P, pour que le coût d'installation du câble soit minimal. Quel est ce coût ?

Avec l'ordinateur

Soit f la fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ par $f(x) = x^2 + 2$.

On se propose d'illustrer à l'aide du logiciel CABRI, que lorsque x varie dans l'intervalle $[a, b]$, les droites de coefficients directeurs $2x$ et passant par $M(x, f(x))$ enveloppe la parabole C courbe de f .

- Dans une nouvelle figure CABRI, après avoir montré les axes, on trace un segment $[a, b]$, en choisissant deux points a et b sur l'axe des abscisses, puis un point H (point sur objet) de $[a, b]$.
- A l'aide de la calculatrice, on calcule l'image de l'abscisse x du point H , que l'on rapporte (Report de mesure) sur l'axe des ordonnées pour obtenir le point $M(x, f(x))$.
- A l'aide de la calculatrice, on calcule $2 \cdot x$ et on rapporte le résultat sur l'axe des ordonnées et on place le point $N(x, 2x)$. Le segment $[TT']$ de milieu M et parallèle à (ON) est tangent à C en M .
- On fait varier le point H pour faire apparaître la courbe décrite par M .
- Avec le mode trace, on illustre comment $[TT']$ enveloppe C .



Bulles d'air

La bulle de savon est une fine pellicule d'eau et de savon, qui renferme un certain volume d'air. A l'équilibre, le savon doit minimiser sa surface, sous la contrainte de volume fixé. C'est pour ça que la bulle prend une forme sphérique.

Forme	Nombre de faces	Volume	Surface
tétraèdre	4	16 cm ³	46 cm ²
cube	6	16 cm ³	39 cm ²
octaèdre	8	16 cm ³	37 cm ²
dodécaèdre	12	16 cm ³	34 cm ²
sphère	infini	16 cm ³	31 cm ²



Elyssa et la fondation de Carthage

Lorsque Elyssa arriva en Afrique, elle demande à Iarbas, roi de Numidie une concession de terrain ne couvrant que la peau d'un bœuf, ce qui est royalement accordé. Elle fait alors découper la peau en très fines lanières et le fait mettre bout à bout, délimitant ainsi un territoire assez vaste pour y établir une cité sur une colline, Byrsa ("Peau de bœuf" en grec).

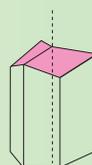


Les alvéoles d'abeilles

Ce qui est vraiment surprenant, c'est la forme plus que singulière de ces alvéoles. Contrairement à ce qu'on pourrait supposer, l'autre extrémité de ces cellules n'est pas un hexagone régulier, mais un emboîtement de trois losanges identiques, appelés rhombes.



Pour un même volume, le raccordement par ces trois losanges minimise la surface de raccordement des prismes.



Exemples d'étude de fonctions

" La connaissance s'acquiert par l'expérience, tout le reste n'est que de l'information. "

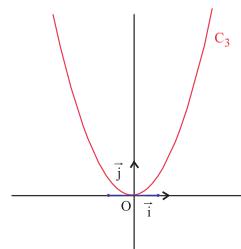
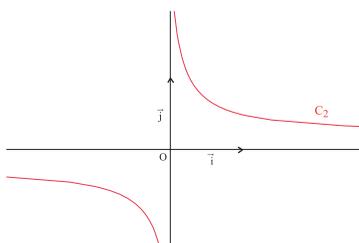
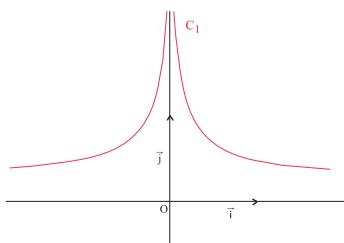
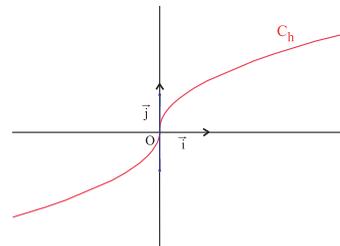
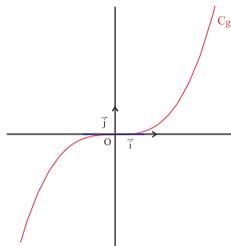
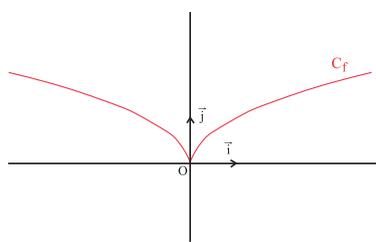
Einstein

Pour commencer

Activité 1

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . On a représenté graphiquement trois fonctions f , g et h ainsi que leurs fonctions dérivées f' , g' et h' .

Associer à chaque courbe celle de sa fonction dérivée.

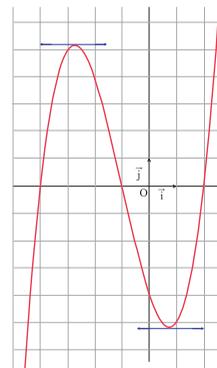


Activité 2

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit f une fonction dérivable sur $[-5, 3]$.

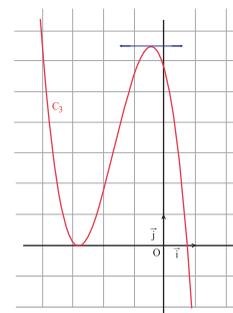
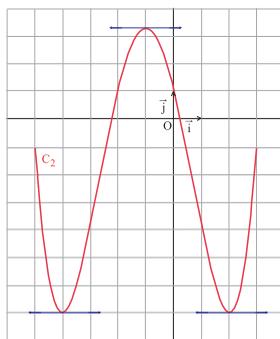
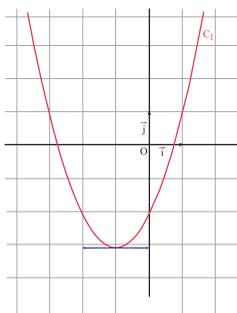
On a tracé ci-contre la courbe représentative de sa fonction dérivée f' .



1. a. Déterminer graphiquement $f'(0)$, $f'(-4)$ et $f'(-1)$.

b. Interpréter graphiquement ces nombres.

2. Une parmi les courbes ci-dessous, est la représentation graphique de f , laquelle ?



Cours

1. Éléments de symétries d'une courbe

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On a tracé la courbe représentative C de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{2x^2 - 4x + 3}{(x - 1)^2}.$$

On se propose de montrer que la droite Δ d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de C .

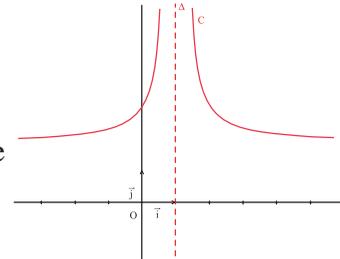
Pour tout point $M(x, y)$, on note $N = S_{\Delta}(M)$.

1. Exprimer les coordonnées de N en fonction de celles de M .

2. Soit $M(x, f(x))$ où $x \neq 1$. Vérifier que

N est un point de C , si et seulement si, $2 - x \neq 1$ et $f(2 - x) = f(x)$.

3. Conclure.



Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit f une fonction définie sur un ensemble D de courbe représentative C et Δ la droite d'équation $x = a$.

La droite Δ est un axe de symétrie de C , si et seulement si, pour tout x appartenant à D , $2a - x$ appartient à D et $f(2a - x) = f(x)$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On a tracé la courbe représentative C de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}(x - 2)^3(x^2 - 4x) - 1.$$

On se propose de montrer que le point $O'(2, -1)$ est un centre de symétrie de C .

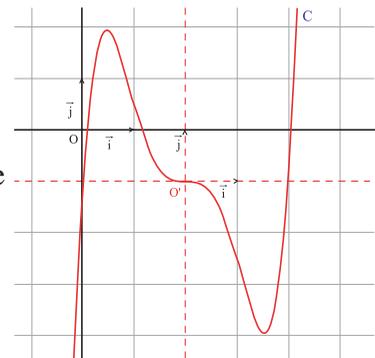
Pour tout point $M(x, y)$, on note $N = S_{O'}(M)$.

1. Exprimer les coordonnées de N en fonction de celles de M .

2. Soit $M(x, f(x))$. Vérifier que

N est un point de C , si et seulement si, $f(4 - x) = -2 - f(x)$.

3. Conclure.



Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soit f une fonction définie sur un ensemble D de courbe représentative C et O' le point de coordonnées (a, b) .

Le point O' est un centre de symétrie de C , si et seulement si, pour tout x appartenant à D , $2a - x$ appartient à D et $f(2a - x) = 2b - f(x)$.

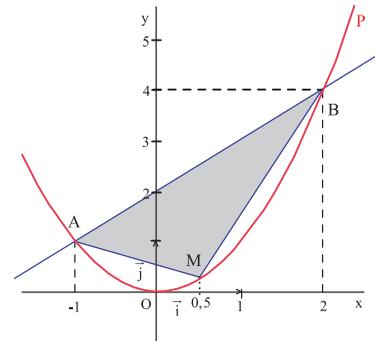
2. Exemples de fonctions polynômes

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit P la parabole, d'équation $y = x^2$ et Δ la droite d'équation $y = x + 2$.

- Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B de Δ et de P.
- Soit C le point de P d'abscisse 1.
Déterminer l'aire du triangle ABC.
- Soit x un réel de $] -1, 2[$ et M le point de P d'abscisse x .
 - Exprimer l'aire $S(x)$ du triangle AMB.
 - Représenter dans un repère orthogonal la fonction $S : x \mapsto S(x)$ et déterminer la valeur x_0 en laquelle S atteint son maximum.



Activité 2

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$.

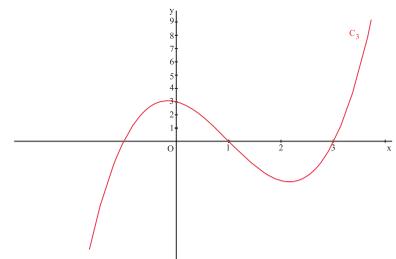
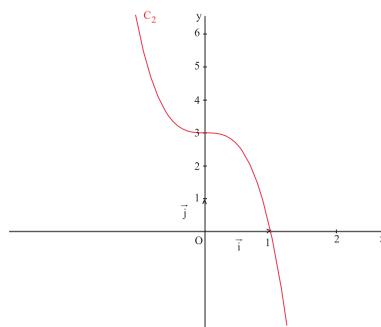
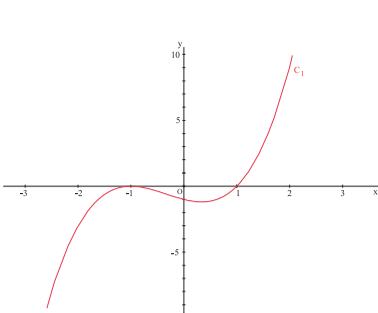
- Justifier la continuité de f sur \mathbb{R} .
- Calculer les réels $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$ et $f(3)$.
 - En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions. On désigne par α , β et γ ces solutions et on suppose que $\alpha < \beta < \gamma$.
- Déterminer le signe de f sur chacun des intervalles $] -\infty, \alpha[$, $] \alpha, \beta[$, $] \beta, \gamma[$ et $] \gamma, +\infty[$.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On a représenté ci-dessous les fonctions f , g et h définies sur \mathbb{R} par $f(x) = -3x^3 + 3$, $g(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ et $h(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

Associer à chacune de ces fonctions, sa courbe représentative.



Activité 4

Soit un entier $n \geq 2$. On considère la fonction $f : x \mapsto x^n$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
2. Discuter suivant la parité de n , $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Théorème

Soit f une fonction polynôme de degré n , $n \geq 2$. Alors $\frac{f(x)}{x}$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini.

On dit que la courbe représentative C de f dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) admet une branche parabolique de direction (O, \vec{j}) , au voisinage de l'infini.

Activité 5

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. On se propose d'étudier f et de représenter C .
 - a. Vérifier que O est un centre de symétrie de C .
 - b. Déterminer les limites de f aux bornes de $[0, +\infty[$.
 - c. Étudier la continuité et la dérivabilité de f et déterminer sa fonction dérivée sur $[0, +\infty[$.
En déduire le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$.
 - d. Vérifier que C admet une branche parabolique de direction (O, \vec{j}) au voisinage de $+\infty$.
 - e. Tracer C .
2. En déduire les représentations graphiques des fonctions $|f|$, $g : x \mapsto f(x) - 2$ et $h : x \mapsto f(|x|)$.

Pour l'étude et la représentation graphique d'une fonction f :

- Déterminer son ensemble de définition D .
- Il est parfois possible de réduire l'ensemble d'étude de f à une partie de D , c'est le cas par exemple, si f est paire ou impaire, il suffirait d'étudier f pour les réels positifs de D .
- Étudier la continuité et la dérivabilité de f et déterminer sa fonction dérivée ainsi que son signe.
 - Dresser alors le tableau de variation de f en effectuant les études de limites nécessaires.
 - Tracer la courbe représentative C de f dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) en étudiant éventuellement les asymptotes ou les branches paraboliques.

Activité 6

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 3x$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Vérifier que O est un centre de symétrie de C .

2. Etudier f .
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C et de l'axe des abscisses.
4. a. Déterminer une équation de la tangente T_0 à C en O et étudier la position de C par rapport à T_0 .
b. Tracer T_0 et C .
5. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x^3 + 3x^2 - 2$.
On désigne par C' sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
a. Montrer que pour tout x réel, $g(x) = f(x + 1)$.
b. En déduire la construction de C' .

Activité 7

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Représenter les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = 6x^2 - 2$ et $g(x) = x^3$.
2. On pose $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
a. Montrer que $h(x) = 0$ admet exactement trois solutions.
b. Donner une valeur approchée de chacune de ces solutions à 0.5 près.
c. Etudier et représenter la fonction h .
d. Déterminer suivant les valeurs du réel m le nombre de solutions de l'équation $h(x) = m$.

Activité 8

On a montré que le taux de croissance du nombre de bactéries dans une culture donnée, t heures après le début de l'expérience est de $24(t^2 + t - 5)$ bactéries par heure.

On suppose que le nombre de bactéries est de 1000 au début de l'expérience.

1. Vérifier que le nombre de bactéries après t heures est $N(t) = 24t(t^2 + t - 5) + 1000$.
2. Etudier et représenter la fonction $N : t \mapsto N(t)$.
3. Donner une estimation du temps nécessaire pour que le nombre de bactéries atteigne 5000, 10000, 15000 bactéries.

Activité 9

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^4$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Etudier et représenter la fonction f .
2. En déduire les représentations graphiques des fonctions $g : x \mapsto f(x) + 1$ et $h : x \mapsto |x| x^3$.

Activité 10

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $ax^4 + bx^2 + c$ où $a \neq 0$.

1. Montrer que si x_0 est solution de l'équation $f(x) = 0$ alors $-x_0$ est aussi solution de cette équation.
2. On suppose que $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions.
a. Montrer que $c = 0$ et que $ab < 0$.
b. Déterminer alors en fonction de a et b les solutions de l'équation.

Activité 11

Une équipe de biologistes a effectué plusieurs expériences avec une certaine espèce d'insectes. L'analyse des données a montré que, t semaines après le début des expériences, le nombre d'insectes était de $N(t) = -t^4 + 8t^2 + 9$.

2. Etudier et représenter la fonction $N : t \mapsto N(t)$.
3. La courbe de N passe par les points $A(0, 9)$ et $B(3, 0)$. Qu'est-ce que cela signifie dans le contexte donné ?
4. Estimer le temps nécessaire pour que le nombre d'insectes atteigne son maximum.
Donner une valeur approchée à l'unité de ce maximum.

3. Exemples de fonctions rationnelles

Activité 1

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{2x - 2}{x - 2}$.

1. On se propose de déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x - 2}$, $x \neq 2$.
 - a. Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)f(x)$.
 - b. Vérifier que $(x - 2)f(x) = a(x - 2) + b$, $x \neq 2$.
 - c. En déduire la valeur de b .
 - d. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et en déduire la valeur de a .
2. Etudier f .
3. En déduire les variations de chacune des fonctions $-f$, $|f|$ et $g_k : x \mapsto f(x) + k$ où k est un réel.

Activité 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, par $f(x) = \frac{x^2 + 7x + 2}{x^2 + x}$ et on désigne par

C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. On se propose de déterminer les réels a , b et c tels que $f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x + 1}$, pour tout x différent de 0 et de -1 .
 - a. Calculer $\lim_{x \rightarrow -1} (x + 1)f(x)$ et en déduire la valeur de c .
 - b. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} xf(x)$ et en déduire la valeur de b .
 - c. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et en déduire la valeur de a .
2. Etudier f .
3. Tracer C .
4. Pour tout réel m , on considère l'équation $E_m : (1 - m)x^2 + (7 - m)x + 2 = 0$.
 - a. Discuter suivant les valeurs de m , le nombre de solutions de E_m .
 - b. En déduire le nombre de points d'intersection de C avec la droite $y = m$.
5. a. Représenter la fonction $g : x \mapsto f(-|x|)$.
b. En déduire son tableau de variation.

Activité 3

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{6x - 3}{2x^2 - 2x + 1}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

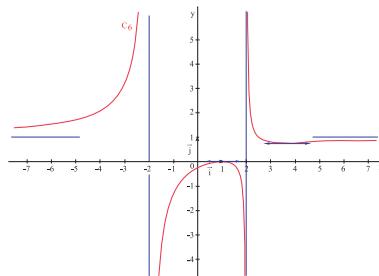
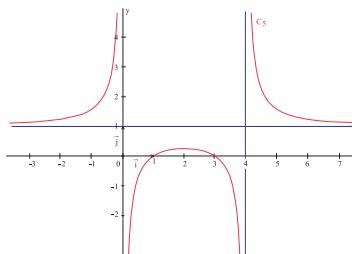
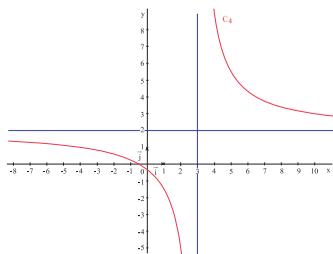
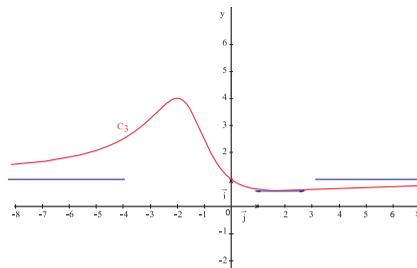
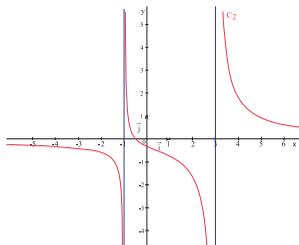
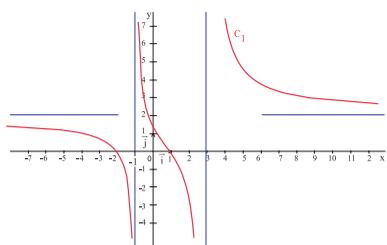
1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Etudier f .
3. Soit I le point de C d'abscisse $\frac{1}{2}$.
 - a. Montrer que I est un centre de symétrie de C .
 - b. Déterminer une équation de la tangente T à C en I .
 - c. Etudier la position relative de T et de C .
4. Tracer C et T .

Activité 4

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . On a représenté graphiquement les fonctions

$$f : x \mapsto \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x}, \quad g : x \mapsto \frac{x^2 + 4}{x^2 + 3x + 4}, \quad h : x \mapsto \frac{(x-1)^2}{x^2 - 4},$$

$$u : x \mapsto \frac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 - 2x - 3}, \quad v : x \mapsto \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3} \quad \text{et} \quad w : x \mapsto \frac{2x + 1}{x^2 - 2x - 3}.$$



Associer à chaque fonction sa courbe.

Activité 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, par $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- On se propose de déterminer les réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$, $x \neq -2$.
 - Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire la valeur de a .
 - Déterminer la valeur de c .
 - Calculer $f(0)$ et en déduire la valeur de b .
- Etudier f .
- Montrer que C admet une asymptote D au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) d'équation $y = x - 1$.
 - Etudier la position relative de C et de D .
- Tracer C et D .
- Représenter la fonction $g : x \mapsto f(-x)$.
 - Dresser son tableau de variation.

Activité 6

Le volume initial d'un ballon est de 1m^3 , on laisse l'air s'en échapper et on estime que, t secondes après, le volume décroît au taux de $\frac{5}{4(t+1)^2} \text{m}^3/\text{s}$.

- Vérifier que le volume de la balle après t secondes est $v(t) = 1 - \frac{5t}{4(t+1)^2}$.
- Combien de temps faut-il pour que le ballon soit vide ?
- Etudier et représenter la fonction $v : t \mapsto v(t)$.
- Donner une estimation du temps nécessaire pour que le volume du ballon atteigne la moitié du volume initial.

4. Fonction \sqrt{f}

Activité 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{ax + b}$, $a \neq 0$.

- On suppose que $a > 0$.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

- On suppose que $a < 0$.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Théorème

Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{ax+b}$, $a \neq 0$. Alors $\frac{f(x)}{x}$ tend vers zéro quand x tend vers l'infini.

On dit que la courbe représentative C de f dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) admet une branche parabolique de direction (O, \vec{i}) au voisinage de l'infini.

Activité 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{-2x+4}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Etudier f .
- a. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 2.
b. En déduire que C admet une demi-tangente verticale T au point d'abscisse 2.
- Tracer C et T .
- En déduire les représentations graphiques de chacune des fonctions $-f$ et $g : x \mapsto f(x-1) - 2$.

Activité 3

On considère les fonctions

$$f : [1, +\infty[\mapsto \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : [-4, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 - 2x - 3 \quad \quad \quad x \mapsto \sqrt{x+4} + 1$$

On désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Tracer C_f et C_g .
- On se propose de montrer que C_f et C_g sont symétriques par rapport à la première bissectrice Δ d'équation $y = x$.
Pour tout point $M(x, y)$, on note $N = S_{\Delta}(M)$.
 - Exprimer les coordonnées de N en fonction de celles de M .
 - Soit $M(x, f(x))$ où $x \geq 1$. Vérifier que N est un point de C_g .
 - Réciproquement, soit $N(x, g(x))$ où $x \geq -4$. Vérifier que M est un point de C_f .
 - Conclure.

Activité 4

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x - 6}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Etudier f .
- a. Etudier la dérivabilité de f à gauche en -2 et à droite en 3 .
b. En déduire que C admet deux demi-tangentes verticales que l'on précisera.

4. a. Déterminer la forme canonique de $x^2 - x - 6$.
 - b. Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - x + \frac{1}{2} \right)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) + x - \frac{1}{2} \right)$.
 - c. En déduire que la courbe C admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et une autre au voisinage de $-\infty$.
5. Tracer C et ses deux asymptotes.
 6. En déduire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto f(|x|)$.

Activité 5

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
 2. Etudier f.
 3. Soit Δ la droite d'équation $x = 2$. Montrer que Δ est un axe de symétrie de C.
 4. a. Déterminer la forme canonique de $x^2 - 4x + 5$.
 - b. Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 2)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x - 2)$.
 - c. En déduire que la courbe C admet une asymptote oblique D au voisinage de $+\infty$ et une autre D' au voisinage de $-\infty$.
 - d. Vérifier que D et D' sont symétriques par rapport à Δ .
5. Tracer C, D et D'.

Activité 6

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier f.
3. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 et à gauche en 1 .
- b. En déduire que C admet deux demi-tangentes verticales que l'on précisera.
4. Tracer C.
5. En déduire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{-x^2 - 2x}$.

Activité 7

On considère les fonctions f, g et h définies sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \sqrt{8x + 4}, \quad g(x) = 2 + 2x - x^2 \quad \text{et} \quad h(x) = 2 + 2x - x^2 + x^3.$$

On désigne par C_f , C_g et C_h leurs courbes représentatives dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Etudier chacune des fonctions f, g et h.
2. Montrer que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, $x \in [0, 1]$.
3. Tracer C_f , C_g et C_h .
4. Déterminer une valeur approchée à 10^{-18} près de $\sqrt{4.000008}$.

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Le plan est muni d'un repère. La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}$ admet pour centre de symétrie le point

$O(0, 0)$

$A(-2, 0)$

$B(2, 0)$.

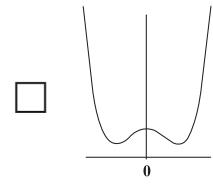
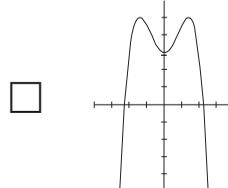
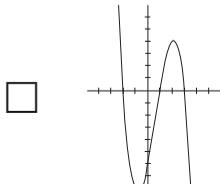
2. Le plan est muni d'un repère orthogonal. La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2(1-x)^2$ admet pour axe de symétrie la droite d'équation

$x = 0$

$x = \frac{1}{2}$

$x = 1$.

3. Le plan est muni d'un repère. La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^4 - 2x^2 + 15$ est



4. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{3x^2 - 5x + 3}{x-1}$ et les réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$, $x \neq 1$.

$a = 3$

$c = -1$

$a = 0$.

5. Le plan est muni d'un repère. Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4+x^2}$ et D la droite d'équation $y = x$. La courbe représentative de la fonction f

 est au dessus de D
 est en dessous de D
 coupe D .

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Si $f(2a - x) = f(x)$ alors la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de C .

2. Si f est une fonction impaire alors la courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(1+x)$ admet un centre de symétrie.

3. Si f est une fonction paire alors la courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(1+x)$ admet un axe de symétrie.

4. La représentation graphique de la fonction $x \mapsto |f(x)|$ s'obtient par une translation de C .

5. La représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(|x|)$ s'obtient par une translation de C .

Mobiliser ses compétences

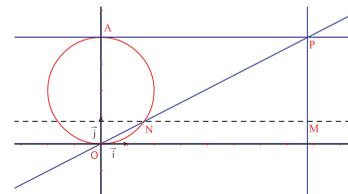
Situation 1 La cubique d'Agnesi

Soit deux points O et A tels que $OA=4$ et \mathcal{C} le cercle de diamètre $[OA]$. Soit N un point de \mathcal{C} distinct de O.

La tangente à \mathcal{C} en A, coupe la droite (ON) en un point P.

La parallèle à la droite (AP) passant par N et la perpendiculaire à la droite (AP) passant par P se coupent en M.

On se propose de construire \mathcal{C}' l'ensemble des points M lorsque N varie sur le cercle \mathcal{C} .



On considère un repère orthonormé tel que $\overrightarrow{OA} = 4 \vec{j}$.

1. a. Déterminer une équation du cercle \mathcal{C} .

b. On désigne par t l'abscisse de N et par (x, y) les coordonnées de M.

Montrer que $4t = xy$.

c. En déduire que $y = \frac{64}{x^2 + 16}$.

2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{64}{x^2 + 16}$.

a. Etudier f.

b. Tracer la courbe \mathcal{C}' et le cercle \mathcal{C} .

\mathcal{C}' est appelée, la cubique d'Agnesi, au nom d'une mathématicienne italienne (1718-1799).

Situation 2 courbe asymptote

On considère les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3}$, $g : x \mapsto \frac{4x + 2}{6x - 3}$ et on désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Vérifier que la fonction f est paire.

c. Etudier f sur $[0, +\infty[$.

d. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ et en déduire que C_f admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ que l'on précisera.

2. a. Déterminer l'ensemble de définition de g.

b. On se propose de déterminer les réels a et b tels que $g(x) = a + \frac{b}{6x - 3}$.

Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (6x - 3)g(x)$ et en déduire la valeur de b.

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et en déduire la valeur de a.

c. Etudier g.

3. Tracer C_f et C_g .

4. a. Vérifier graphiquement que l'équation $f(x) = g(x)$ admet une seule solution que l'on note α .

b. Donner une valeur approchée de α à 0.1 près.

5. Représenter dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

la fonction h définie sur $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ par $h(x) = \begin{cases} \frac{4x + 2}{6x - 3} & \text{si } x \in \left] \frac{1}{2}, \alpha \right] \\ \sqrt{x^2 + 3} & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$

Exercices et problèmes

Exercice 1

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + x + 1$ et $g(x) = -x^2 - 2x + 3$.

On désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit m un réel, la droite D_m d'équation $x = m$, coupe C_f et C_g respectivement en M et N .

1. Etudier la position relative de C_f et C_g .
2. Déterminer l'ensemble des milieux I des segments $[MN]$, lorsque m varie dans \mathbb{R} ?
3. Tracer C_f , C_g et C .

Exercice 2

Soit la fonction $f : x \mapsto |x^2 - 4| - |x - 2|$ et C sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Etudier f .
2. Etudier la dérivabilité de f en -2 et en 2 .
3. Tracer C .
4. Discuter graphiquement suivant le réel m , les solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 3

1. Tracer dans un même repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto x^2 - 1$, $g : x \mapsto x^2 + x + 1$ et $h : x \mapsto 2x + 1$.

Soit un réel $x > 1$.

2. Montrer qu'on peut construire un triangle ABC tel que $AB = h(x)$, $AC = g(x)$ et $BC = f(x)$.
3. En utilisant la formule d'El Kashi : $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$, montrer que l'angle \widehat{ABC} est indépendant du réel x .
4. Le triangle ABC peut-il être isocèle ?

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^3 + 3x + 1$ et C sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Etudier f et tracer C .
2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions.
b. Donner une valeur approchée à 0.1 près de chacune de ces solutions.

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{3}$ et C sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Etudier f .
2. a. Montrer que le point $I(1, 1)$ est un centre de symétrie de C .
b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point I .
c. Etudier la position de C par rapport à T .
3. Tracer C et T .
4. Tracer les représentations graphiques des fonctions $g : x \mapsto f(x) + 1$ et $h : x \mapsto f(x + 1)$.

Exercice 6

On considère les fonctions $f : x \mapsto x^3 - 4x^2 - 2x + 15$ et $g : x \mapsto -x^2 + 2x + 3$. On désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Etudier f .
2. a. Vérifier que $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x^2 - x - 6)$.
b. Etudier la position relative de C_f et C_g .
3. Tracer C_f et C_g .

Exercice 7

On considère les fonctions $f : x \mapsto x^4 + 2x^2 - 3$ et $g : x \mapsto x^3 - x$. On désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Etudier f .
2. Etudier g .
3. a. Vérifier que pour tout réel x $x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3 = (x^2 - 1)(x^2 - x + 3)$.
b. Etudier la position relative de C_f et C_g .
4. Tracer C_f et C_g .

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit f une fonction définie sur $[0, 4]$ par

- $f(x + 2) = f(x)$ pour tout $x \in [0, 2]$,
- $f(x) = x^4 + ax^2$ pour tout $x \in [0, 2]$,
- f est continue à gauche en 2 .

1. a. Déterminer $f(2)$.
b. Déterminer la valeur de a .
2. On désigne par f_1 la restriction de f à l'intervalle $[0, 2]$. Etudier f_1 et tracer sa courbe représentative C_1 .
3. On désigne par f_2 la restriction de f à l'intervalle $[2, 4]$ et par C_2 sa courbe représentative.
a. Montrer que C_2 est l'image de C_1 par une translation que l'on précisera.
b. Tracer alors la courbe représentative de f .

Exercice 9

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par

$$f(x) = \frac{-2x + 5}{x + 3} \text{ et on désigne par } C \text{ sa courbe}$$

représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. On se propose de déterminer les réels a et b tels que

$$f(x) = a + \frac{b}{x + 3}, x \neq -3.$$

a. Calculer $\lim_{x \rightarrow -3} (x + 3)f(x)$ et déduire la valeur de b .

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et en déduire la valeur de a .

2. Etudier f et tracer C .

3. En déduire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto f(-x)$.

4. Dresser le tableau de variation de $k : x \mapsto f(|x|)$.

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 2}{x - 1} \text{ et on désigne par } C \text{ sa courbe}$$

représentative dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. On se propose de déterminer les réels a , b et c tels

$$\text{que } f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}, x \neq 1.$$

a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et en déduire la valeur de a .

b. Déterminer la valeur de c .

c. Calculer $f(0)$ et en déduire la valeur de b .

2. Etudier f .

3. a. Montrer que C admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) d'équation $y = -2x - 1$.

b. Etudier la position relative de C et de D .

4. Tracer C et D .

5. a. Représenter la fonction $|f|$.

b. Dresser son tableau de variation.

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{x + 2} \text{ et on désigne par } C \text{ sa courbe}$$

représentative dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. On se propose de déterminer les réels a , b et c tels

$$\text{que } f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}, x \neq -2.$$

a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et en déduire la valeur de a .

b. Déterminer la valeur de c .

c. Calculer $f(0)$ et en déduire la valeur de b .

2. Etudier f .

3. a. Montrer que C admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) d'équation $y = x - 4$.

b. Etudier la position relative de C et de D .

4. Vérifier que la courbe C admet une asymptote verticale D' dont on déterminera une équation.

5. Montrer que le point d'intersection des droites D et D' est un centre de symétrie de la courbe C .

6. Tracer C , D et D' .

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -4\}$ par

$$f(x) = \frac{-x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x} \text{ et on désigne par } C \text{ sa courbe}$$

représentative dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. On se propose de déterminer les réels a , b et c tels

$$\text{que } f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x + 4}, \text{ pour tout } x \text{ différent de } 0$$

et de -4 .

a. Calculer $\lim_{x \rightarrow -4} (x + 4)f(x)$ et en déduire la valeur de c .

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} xf(x)$ et en déduire la valeur de b .

c. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et en déduire la valeur de a .

2. Etudier f .

3. Tracer C .

4. Soit m un réel. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de C avec la droite d'équation $y = m$.

5. a. Représenter la fonction $g : x \mapsto f(-|x|)$

b. En déduire son tableau de variation.

Exercice 13

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{-2x + 1}{x^2 - x + 1}$ et on

désigne par C sa courbe représentative dans un repère

(O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .

2. Etudier f .

3. Soit I le point de C d'abscisse $\frac{1}{2}$.

a. Montrer que I est un centre de symétrie de C .

b. Déterminer une équation de la tangente T à C en I .

c. Etudier la position relative de T et de C .

4. Tracer C et T .

5. Représenter la fonction $g : x \mapsto f(x + 1) - 3$.

Exercice 14

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{(x-3)^2}{x-2}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Etudier f et tracer C.

Soit m un réel et D_m la droite d'équation $y = mx$.

2. a. Etudier l'existence et le nombre de solutions de l'équation $f(x) = mx$.

b. Vérifier graphiquement ces résultats.

On désigne par M et N, lorsqu'ils existent les points d'intersection de C et de D_m puis par K le milieu du segment [MN].

3. a. Déterminer en fonction de m les coordonnées du point K.

b. Montrer que les coordonnées du point K vérifient une équation indépendante de m.

c. Que décrit alors le point K lorsque m varie ?

Exercice 15

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{-x+3}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Etudier f.

3. a. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 3.

b. En déduire que C admet une demi-tangente verticale T au point d'abscisse 3.

4. Tracer C et T.

5. a. En déduire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto f(|x|)$.

b. Dresser son tableau de variation.

Exercice 16

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{-x^2+5x-4}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Etudier f.

3. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et à gauche en 4.

b. En déduire que C admet deux demi-tangentes verticales que l'on précisera.

4. Soit Δ la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$.

Montrer que Δ est un axe de symétrie de C.

5. Tracer C.

Exercice 17

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4+x^2}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Etudier f.

3. a. Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$.

b. En déduire que la courbe C admet une asymptote D au voisinage de $+\infty$ et une autre D' au voisinage de $-\infty$.

c. Vérifier que D et D' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

4. Tracer C, D et D'.

5. En déduire la représentation graphique de la fonction

$$g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 8}.$$

Exercice 18

On considère les fonctions f, g et h définies sur $[0, 2]$

$$\text{par } f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 4}, g(x) = 2 + x - \frac{1}{2}x^2 \text{ et } h(x) = 2 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3.$$

On désigne par C_f , C_g et C_h leurs courbes représentatives dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Etudier chacune des fonctions f, g et h.

2. Montrer que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, $x \in [0, 2]$.

3. Tracer C_f , C_g et C_h .

4. Déterminer une valeur approchée à 10^{-12} près de $\sqrt{4.000399999}$.

Exercice 19

On considère la fonction $f : x \mapsto 1 - \sqrt{x^2 + x}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Etudier f.

3. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et à gauche en -1.

b. En déduire que C admet deux demi-tangentes verticales que l'on précisera.

4. Soit Δ la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

Montrer que Δ est un axe de symétrie de C.

5. Montrer que la droite D d'équation $y = -x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$.

6. Tracer C, Δ et D.

Exercice 20

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$ et soit $g = -f$.

On désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Etudier f .
2. a. Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1 et à droite en 4 .
- b. En déduire que C admet deux demi-tangentes verticales que l'on précisera.
3. a. Déterminer la forme canonique de $x^2 - 3x - 4$.
- b. Déterminer alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - x + \frac{3}{2} \right) \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) + x - \frac{3}{2} \right).$$

c. En déduire que la courbe C admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et une autre au voisinage de $-\infty$.

4. a. Tracer C_f et C_g .

b. Vérifier que $C_f \cup C_g$ a pour équation

$$x^2 - y^2 - 3x - 4 = 0$$

5. On considère les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$

et le point $O' \left(\frac{3}{2}, 0 \right)$.

On se propose de déterminer une équation de $C_f \cup C_g$

dans le repère (O', \vec{u}, \vec{v}) .

Soit M un point du plan, on désigne par (x, y) ses coordonnées dans (O, \vec{i}, \vec{j}) et par (X, Y) celles dans (O', \vec{u}, \vec{v}) .

a. Exprimer x et y en fonction de X et Y .

b. En déduire que M appartient à $C_f \cup C_g$,

si et seulement si, $Y = \frac{25}{16X}$.

c. Conclure.

Avec l'ordinateur

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on donne le point $A(0, 2)$.

A tout réel x , on désigne par B le point de (O, \vec{i}) d'abscisse x .

Le cercle de centre B et passant par A , coupe l'axe des abscisses en deux points. On désigne par E le point ayant une abscisse inférieure à celle de B .

On se propose d'étudier à l'aide de CABRI, la fonction f qui à tout réel x , associe la distance OE .

1. Après avoir montré les axes, on crée le point A , puis le point B comme "point sur objet".

2. On crée le cercle C de centre B et passant par A .

3. A l'aide de l'outil "points sur deux objets" on crée le point E , puis le segment $[OE]$.

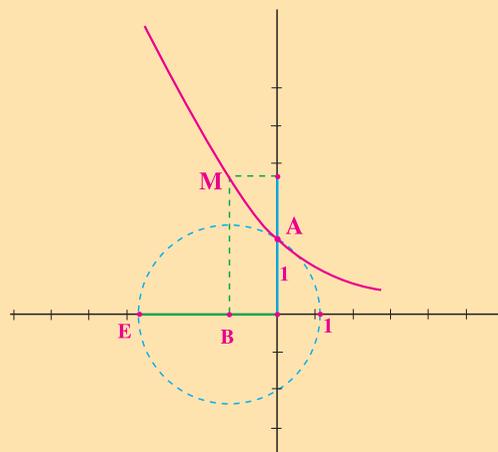
4. On mesure OE par l'outil "Distance ou longueur".

5. On reporte cette distance sur l'axe des ordonnées en utilisant l'outil "Report de mesure".

6. On crée le point M de coordonnées (x, OE) .

7. Déplacer le point B sur l'axe des abscisses et conjecturer les positions de M .

8. Créer le lieu des points M lorsque B varie sur (O, \vec{i}) .

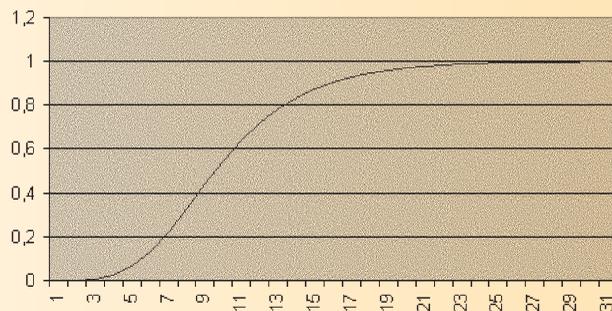


Le lancement d'un nouveau produit sur le marché suit une *loi logistique* :

la courbe est d'abord très ascendante, puis s'infléchit et sa croissance ralentit et enfin elle s'aligne sur une asymptote horizontale. C'est ainsi qu'ont été introduits les produits électroménagers, la machine à laver, la TV en couleurs etc., et aussi les services de télécommunications.

La *fonction logistique* fait partie depuis longtemps de l'arsenal théorique du marketing. L'une de ses expressions est la " loi de Gompertz " :

Loi de Gompertz



Une torche qui émet des faisceaux de lumière divergents forme un cône. Lorsqu'on dirige ces faisceaux vers un mur avec un certain angle, leur "intersection" avec ce mur sera une hyperbole.



Fonctions trigonométriques

Chapitre 8

*" Les mathématiciens étudient le soleil et la lune et
oublent ce qu'ils ont sous les pieds. "*

Diogène

Pour commencer

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} et vérifiant les propriétés suivantes :

- pour tout réel x , $f(x+2) = f(x)$,
- pour tout x appartenant à $[-1, 1[$, $f(x) = x$.

Représenter la restriction de f à l'intervalle $[-4, 3]$.

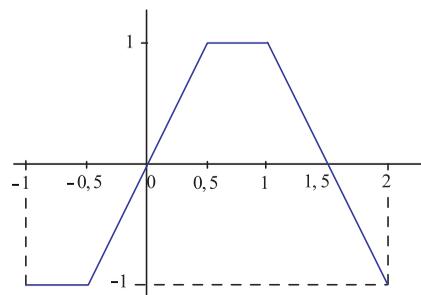
Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} vérifiant $f(x+3) = f(x)$, pour tout réel x .

On a représenté ci-contre la restriction de f à l'intervalle $[-1, 2[$.

1. Donner l'expression de $f(x)$ pour x appartenant à $[-1, 2[$.
2. Utiliser le graphique, pour représenter la restriction de f à l'intervalle $[2, 5[$. Expliquer le procédé de construction.

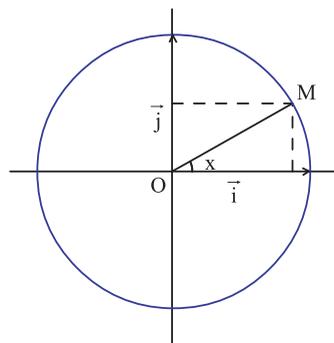


Activité 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , on a représenté ci-contre le cercle trigonométrique de centre O .

Soit x un réel et M le point du cercle trigonométrique tel que $(\vec{i}, \widehat{OM}) \equiv x [2\pi]$.

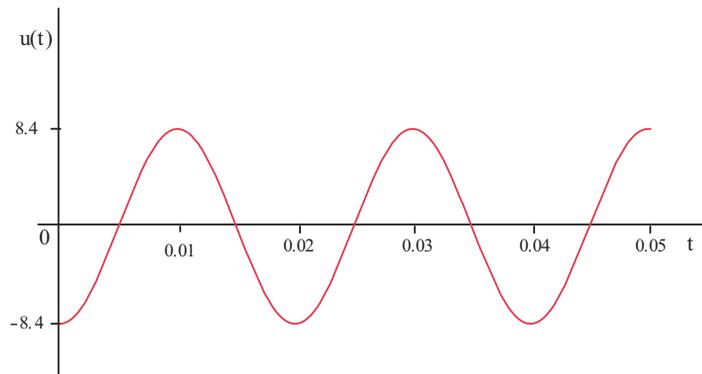
1. Donner les coordonnées cartésiennes de M .
2. Etudier le signe de $\sin x$ lorsque x est un réel de $]-\pi, \pi]$.
3. Etudier le signe de $\cos x$ lorsque x est un réel de $]-\pi, \pi]$.



1. Fonctions périodiques

Activité 1

Le graphique ci-dessous représente les variations de la tension alternative $u(t)$ (en volts) aux bornes d'un générateur en fonction du temps t (en secondes).

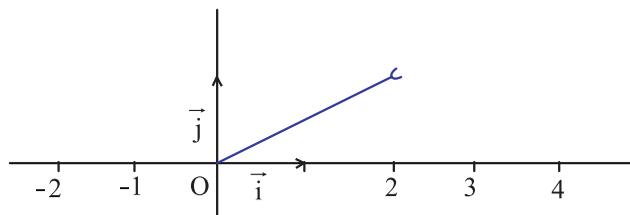


1. a. Donner la valeur de la tension en chacun des instants $t = 0$, $t = 0.015$ et $t = 0.045$.
 b. La tension est égale à $+8.4$ v à l'instant $t = 0.01$. Déterminer d'autres instants pour lesquels la tension est égale à $+8.4$ v.
2. On considère la fonction $u : t \mapsto u(t)$.
 a. Colorer la représentation graphique de chacune des restrictions de u à chacun des intervalles $[0, 0.02[$ et $[0.02, 0.04[$. Que remarque-t-on ?
 b. Donner la valeur de la tension à chacun des instants $t = 0.07$ et $t = 0.095$.

Activité 2

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} vérifiant $f(x+2) = f(x)$, pour tout réel x .

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a représenté graphiquement sa restriction à l'intervalle $[0, 2[$.



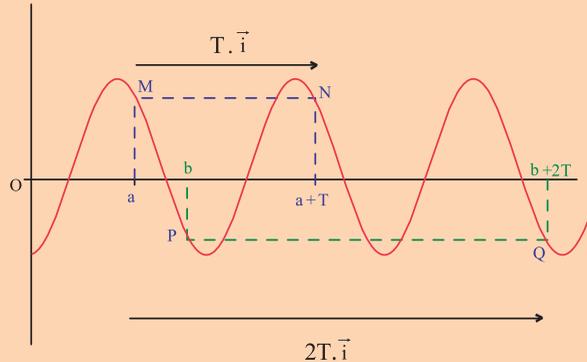
1. Déterminer $f(x)$ pour $x \in [0, 2[$?
2. Déterminer $f(2006)$, $f(2007)$, $f(-1997)$, $f(\sqrt{5})$ et $f(\pi)$?
3. Représenter graphiquement la fonction f sur chacun des intervalles $[2, 4[$, $[4, 6[$, $[-2, 0[$ et $[5, 7[$.
4. Donner l'expression de $f(x)$ lorsque $x \in [2, 4[$, $x \in [4, 6[$.

Définition

Soit f une fonction définie sur une partie D de \mathbb{R} et T un réel non nul.
On dit que f est périodique de période T , si pour tout $x \in D$, $(x + T)$ appartient à D et $f(x + T) = f(x)$.

Soit f une fonction définie sur D , périodique, de période T et g la restriction de f à un intervalle $[a, a + |T|]$.

La courbe représentative de f se déduit à partir de celle de g par translation de vecteur $kT\vec{i}$, où k appartient à \mathbb{Z} .



2. Fonctions sinus et cosinus

2.1 Définition

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

Soit x un réel et M le point du cercle trigonométrique de coordonnées $(\cos x, \sin x)$.

La fonction sinus est la fonction périodique, de période 2π , qui au réel x associe le réel $\sin x$.

On la note $\sin : x \mapsto \sin x$.

La fonction cosinus est la fonction périodique, de période 2π , qui au réel x associe le réel $\cos x$. On la note $\cos : x \mapsto \cos x$.

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit x et x' deux réels. On désigne par M et M' les points du cercle trigonométrique tels que $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \equiv x[2\pi]$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OM'}) \equiv x'[2\pi]$.

1. Donner les coordonnées cartésiennes des points M et M' .

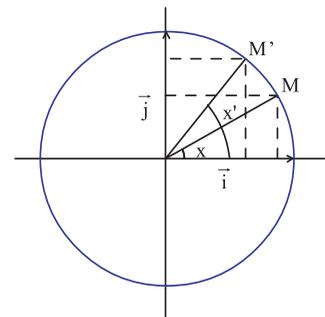
2. Dans la figure ci-contre, $0 \leq x < x' \leq \frac{\pi}{2}$.

Comparer $\cos x$ et $\cos x'$ et en déduire le sens de variation

de la fonction cosinus sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

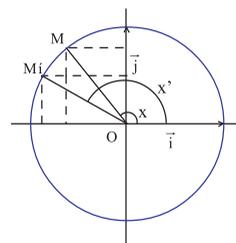
Comparer $\sin x$ et $\sin x'$ et en déduire le sens de variation de

la fonction sinus sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

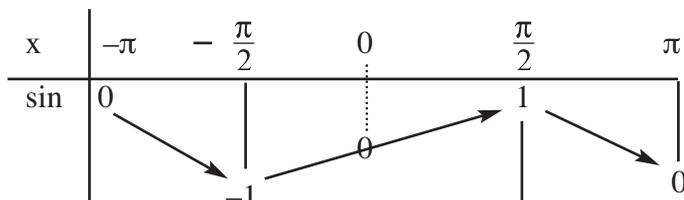


3. Dans la figure ci-contre, $\frac{\pi}{2} \leq x < x' \leq \pi$.

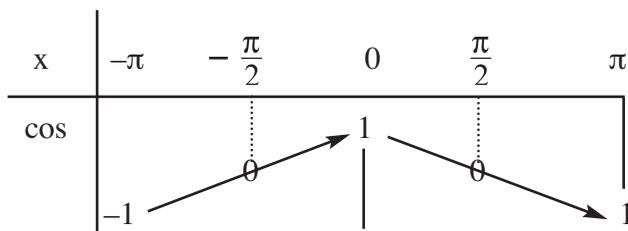
- Comparer $\cos x$ et $\cos x'$ et en déduire le sens de variation de la fonction cosinus sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.
- Comparer $\sin x$ et $\sin x'$ et en déduire le sens de variation de la fonction cosinus sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.



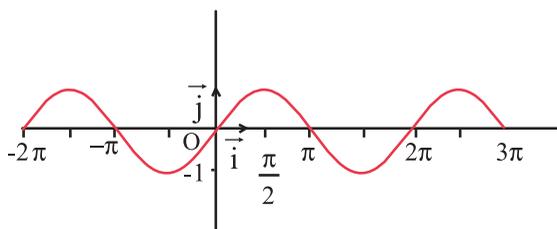
La fonction sinus est impaire et ses variations sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ sont



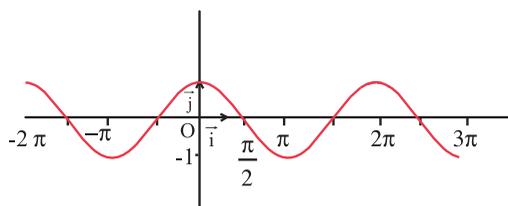
La fonction cosinus est paire et ses variations sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ sont



Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé. Les courbes ci-dessous sont les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle $[-2\pi, 3\pi]$.



Représentation graphique de la fonction sinus sur l'intervalle $[-2\pi, 3\pi]$.



Représentation graphique de la fonction cosinus sur l'intervalle $[-2\pi, 3\pi]$.

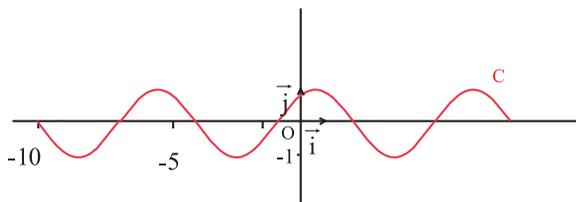
Activité 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne respectivement par C , C_1 et C_2 les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \sin x$; $x \mapsto |\sin x|$ et $x \mapsto \sin |x|$.

1. Tracer la courbe C .
2. Dédire les courbes C_1 et C_2 à partir de la courbe C . Expliquer à chaque fois le procédé de construction.

Activité 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a tracé la courbe C représentative de la fonction $f : x \mapsto \sin(x + 1)$.



1. Expliquer comment on peut tracer la courbe représentative de f à partir de celle de la fonction \sin .
2. Utiliser le même procédé pour tracer la courbe représentative de $g : x \mapsto \cos(x + 2)$ à partir de celle de la fonction \cos .

Soit a un réel.

Les fonctions, $x \mapsto \sin(x + a)$ et $x \mapsto \cos(x + a)$ sont périodiques, de période 2π .

2. 2 Dérivabilité des fonctions sinus et cosinus

Activité 1

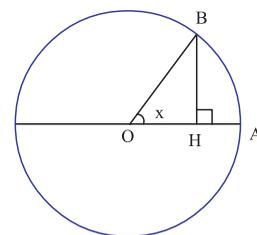
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit x un réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Dans la figure ci-contre A et B sont deux points du cercle trigonométrique tels que $(\widehat{OA}, \widehat{OB}) \equiv x [2\pi]$.

On désigne par H , le projeté orthogonal de B sur la droite (OA) .

1. a. Montrer que l'aire du triangle OAB vaut $\frac{\sin x}{2}$ et que l'aire du secteur OAB vaut $\frac{x}{2}$.



- b. En déduire que $\sin x < x$, pour tout réel x de $]0, \frac{\pi}{2}[$.
2. Montrer que $\sin x \leq x$, pour tout réel $x \geq 0$.

3. On se propose de montrer que la fonction sinus est continue en 0.

a. Montrer que $|\sin x| \leq |x|$, pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b. Utiliser la continuité de $x \mapsto |x|$ en 0 pour déduire que la fonction sinus est continue en 0.

4. a. Montrer que pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$.

b. En déduire que la fonction cosinus est continue en 0.

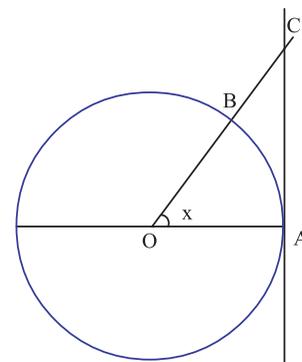
Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit x un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Dans la figure ci contre A et B sont deux points du cercle trigonométrique $(\widehat{OA}, \widehat{OB}) \equiv x [2\pi]$.

On désigne par C le point d'intersection de la tangente au cercle en A avec la droite (OB).



1. Montrer que l'aire du triangle OAC vaut $\frac{\sin x}{2 \cos x}$.

2. a. En comparant les aires des triangles OAB, OAC et du secteur OAB, montrer que

$$\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}, \text{ pour tout réel } x \text{ de } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

b. En déduire que $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, pour tout réel x de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

c. Montrer alors que $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

3. a. Montrer que $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| \leq |\cos x - 1|$, pour tout réel non nul x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b. En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Activité 3

1. Vérifier que $\frac{1 - \cos x}{x} = x \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$, pour tout réel x non nul de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

2. En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Activité 4

On se propose de montrer que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur \mathbb{R} et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\cos)'(x) = -\sin x$ et $(\sin)'(x) = \cos x$.

1. Soit a et h des réels tel que $h \neq 0$.

a. Montrer que
$$\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \sin a \cdot \frac{(\cosh-1)}{h} + \cos a \cdot \frac{\sinh}{h}.$$

b. Calculer
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}.$$

c. En déduire que la fonction sinus est dérivable sur \mathbb{R} et que $(\sin)'(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Soit a et h des réels tel que $h \neq 0$.

a. Montrer que
$$\frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \cos a \cdot \frac{(\cosh-1)}{h} - \sin a \cdot \frac{\sinh}{h}.$$

b. Calculer
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h}.$$

c. En déduire que la fonction cosinus est dérivable sur \mathbb{R} et que $(\cos)'(x) = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

Théorème

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur \mathbb{R} .

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\sin)'(x) = \cos x$ et $(\cos)'(x) = -\sin x$.

Activité 5

1. Donner une approximation affine de \sinh lorsque h est voisin de zéro.
2. Donner une approximation affine de \cosh lorsque h est voisin de zéro.
3. Donner une approximation affine de $\sin(0.001)$, $\cos(0.001)$, $\sin(-0.002)$.

Activité 6

Dans chacun des cas ci-dessous, justifier la dérivabilité de la fonction f sur \mathbb{R} et calculer $f'(x)$ pour tout réel x .

1. $f : x \mapsto \sin x \cos x$.
2. $f : x \mapsto \cos^2 x$.
3. $f : x \mapsto 1 - 2\sin^2 x$.
4. $f : x \mapsto \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.
5. $f : x \mapsto \cos x \cos(x+2)$.
6. $f : x \mapsto \sin^3(x+a)$, $a \in \mathbb{R}$.

Activité 7

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de $f(x)$ en x_0 , en utilisant le nombre dérivé en x_0 d'une fonction que l'on déterminera.

1. $f(x) = \frac{\sin x - 0.5}{x - \frac{\pi}{6}}$; $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

$$2. f(x) = \frac{\cos x - 0.5}{x - \frac{\pi}{3}} ; x_0 = \frac{\pi}{3} .$$

$$3. f(x) = \frac{\cos(x - \frac{\pi}{4}) - 1}{x - \frac{\pi}{4}} ; x_0 = \frac{\pi}{4} .$$

Activité 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

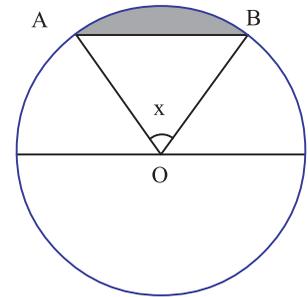
Soit x un réel de $]0, \pi[$.

Dans la figure ci contre A et B sont deux points du cercle

trigonométrique tels que $(\widehat{OA, OB}) \equiv x [2\pi]$.

On se propose de déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de la partie colorée est maximale.

1. Déterminer l'aire de la partie colorée.
2. Déterminer la valeur de x en laquelle l'aire de la partie colorée est maximale.

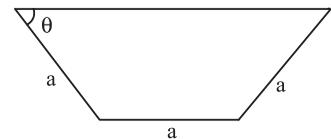


Activité 9

Soit θ un réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$. On a représenté ci-contre un trapèze dont l'aire varie en fonction de θ (en radian).

On désigne par f la fonction qui modélise la situation.

1. Montrer que $f(\theta) = a^2 \cos \theta \cdot \sin \theta + a^2 \sin \theta$.
2. Calculer $f'(\theta)$ et vérifier que $f'(\theta) = 2a^2(\cos \theta + 1)\left(\cos \theta - \frac{1}{2}\right)$.
3. Déterminer la valeur de θ en laquelle l'aire du trapèze est maximale.



3. Fonction tangente

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On se propose d'étudier et de représenter graphiquement la fonction $\tan : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$.

1. Montrer que \tan est impaire et périodique, de période π .
2. Montrer que \tan est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $(\tan)'(x)$.
3. Etudier les limites de \tan aux bornes de l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
4. Dresser le tableau de variation de \tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
5. Tracer la courbe représentative de \tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et préciser ses asymptôtes.

Définition

On appelle fonction tangente et on note \tan la fonction : $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$.

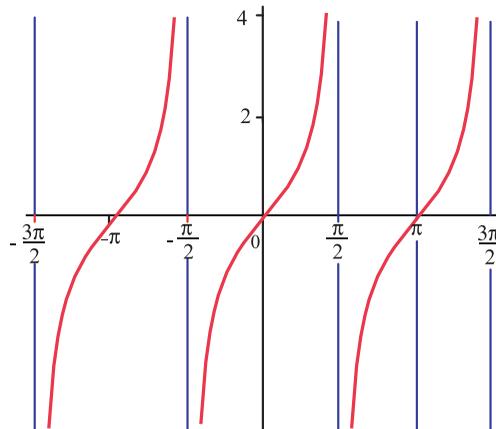
La fonction tangente est impaire et périodique, de période π .

La fonction tangente est dérivable pour tout réel x , différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

et on a $(\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x$, pour tout x différent de $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ci-dessous le tableau de variation de la fonction tangente sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$(\tan)'(x)$		+	
\tan	$-\infty$	0	$+\infty$



Représentation graphique de la fonction tangente sur $\left] -\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$.

Activité 2

Calculer les limites ci-dessous.

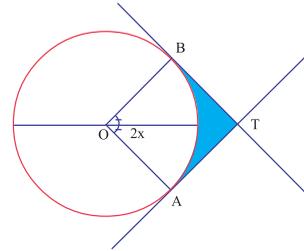
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x^3} .$$

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit x un réel de $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

Dans la figure ci-contre, les points A et B sont deux points du cercle trigonométrique tels que $\widehat{(\overline{OA}, \overline{OB})} \equiv 2x \ [2\pi]$, les droites (AT) et (BT) sont tangentes au cercle.

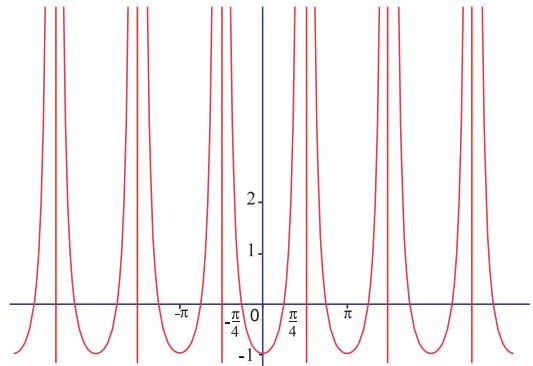


1. Calculer en fonction de x l'aire $S(x)$ du secteur AOB.
2. Calculer en fonction de x l'aire du quadrilatère OBTA.
3. En déduire l'aire $C(x)$ de la partie colorée en fonction de x .
4. Comparer $C(x)$ et $S(x)$.

Activité 4

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a tracé la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \tan^2 x - 1$.

1. Montrer que la fonction f est périodique et en donner une période.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe de f et de l'axe des abscisses.
3. Résoudre dans l'intervalle $\left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right[$ l'inéquation $0 \leq \tan^2 x - 1$.



4. Fonctions $x \mapsto \cos(\omega x)$; $x \mapsto \sin(\omega x)$; $x \mapsto \cos(\omega x + a)$; $x \mapsto \sin(\omega x + a)$

Activité 1

On considère les fonctions $f : x \mapsto \cos 2x$ et $g : x \mapsto \sin 2x$.

1. Etudier le signe de $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$, pour x appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer sa fonction dérivée.
 - b. Montrer que f est périodique, de période π .
 - c. Etudier la parité de f .
 - d. Etudier les variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
 - e. Représenter dans un repère orthonormé, la restriction de la fonction f à $[-\pi, \pi[$.
3. Reprendre la question 2 pour la fonction g .

Soit ω et φ deux réels tels que $\omega \neq 0$.

Les fonctions $f : x \mapsto \sin(\omega x + \varphi)$ et $g : x \mapsto \cos(\omega x + \varphi)$ sont périodiques, de période $\frac{2\pi}{\omega}$.

De plus, f et g sont dérivables sur \mathbb{R} et on a pour tout réel x ,

$$f'(x) = \omega \cos(\omega x + \varphi) \text{ et } g'(x) = -\omega \sin(\omega x + \varphi).$$

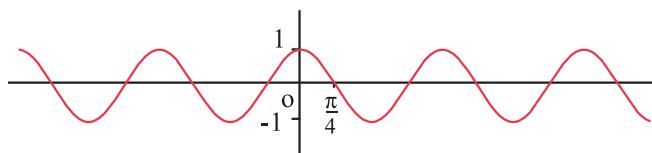
Activité 2

On considère les fonctions $f : x \mapsto \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ et $g : x \mapsto \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

1. a. Donner une période de la fonction f .
b. Etudier et représenter graphiquement la fonction f .
c. Déterminer x pour que $f(x) \leq 0$.
2. Reprendre la question 1 pour la fonction g .

Activité 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on a représenté la courbe C de la fonction $f : x \mapsto \sin(2x + \varphi)$.



1. Montrer que la fonction f est périodique et en donner une période.
2. Utiliser le graphique pour déterminer une valeur possible de φ .

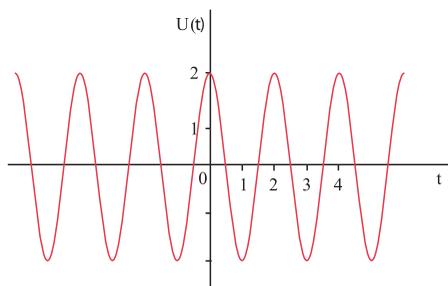
Activité 4

Soit ω et φ deux réels tels que $\omega \neq 0$.

La tension alternative aux bornes d'un circuit est donnée par la formule :

$U(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$, où U_m est la tension maximale exprimée en volt, t le temps exprimé en seconde.

1. Justifier par le calcul que la fonction U est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
2. Un oscilloscope donne la représentation graphique de la fonction U .

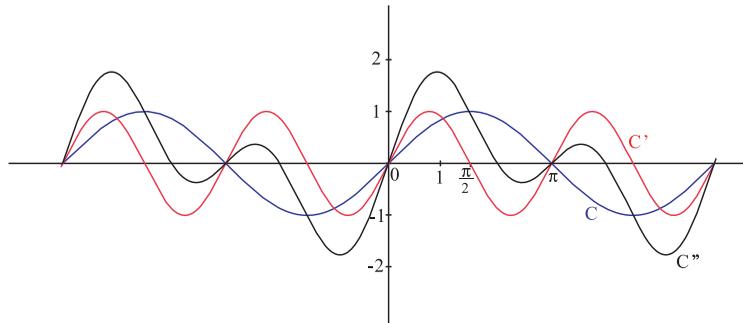


Unités : axe des abscisses 2ms/div ; axe des ordonnées 0,5 V/div.

Déterminer à l'aide du graphique des valeurs possibles des réels T , ω , φ et U_m .

Activité 5

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, C , C' et C'' désignent les courbes respectives des fonctions $f : x \mapsto \sin x$, $g : x \mapsto \sin(2x)$ et $h = f + g$.



1. Montrer que h est périodique et déterminer une période.
2. Résoudre graphiquement, dans $[0, 2\pi]$, l'équation $h(x) = 0$.
3. En déduire les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $\sin x = -2 \sin x \cos x$.

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ dans un repère orthonormé admet au point d'abscisse $-\frac{\pi}{6}$ une tangente

- horizontale verticale d'équation $y = x + \frac{\pi}{6}$.

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} =$

- 0 1 $\frac{\pi}{4}$.

3. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}x - 3\right)$.

Alors f est périodique, de période

- $\frac{\pi}{3}$ -3 6.

4. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

On note C et C' les courbes représentatives respectives des restrictions de f aux intervalles

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

C' est obtenue à partir de C par une translation de vecteur

- $-\pi\vec{i}$ $\pi\vec{i}$ $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

5. On considère la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ par $f(x) = \tan x$.

Alors sa courbe représentative, dans un repère orthonormé, coupe l'axe des abscisses en

- deux points trois points un point.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La fonction $x \mapsto \sin(x - 3\pi)$ est impaire.

2. La fonction $x \mapsto \cos(x - 3\pi)$ est paire.

3. Si une fonction est périodique, alors elle est soit paire, soit impaire.

4. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et périodique, de période π .

$f(x - \pi) > 0$, si et seulement si, $f(x + \pi) > 0$.

5. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et périodique, de période 2π .

f admet un minimum en x_0 , si et seulement si, f admet un minimum en $x_0 + 2\pi$.

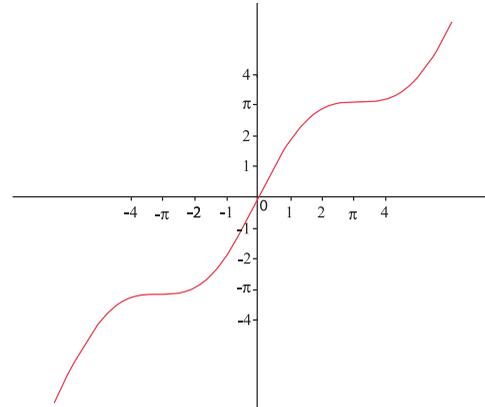
Mobiliser ses compétences

Situation 1

1. Etudier les variations de la fonction $x \mapsto \cos x - \frac{2}{\pi}$, sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et en déduire son signe.
2. Montrer que $\sin x \geq \frac{2}{\pi}$, pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Situation 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a représenté la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \sin x + x$.



1. a. Vérifier que pour tout x appartenant à \mathbb{R} , $f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi$.
b. Acheter la représentation graphique de la restriction de f à chacun des intervalles $[\pi, 3\pi]$ et $[-3\pi, -\pi]$.
2. Résoudre dans \mathbb{R} chacune des inéquations suivantes.
 $\sin x \leq -x$ et $\sin x \geq -x$.
3. a. Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$.
b. Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x - 1$.

Situation 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Soit E l'ensemble des points M de coordonnées $(2 \cos t, \sin 2t)$ où $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- a. Déterminer et construire les points de E correspondant aux valeurs suivantes :

$$t_0 = 0, t_1 = \frac{\pi}{4} \text{ et } t_2 = \frac{\pi}{8}.$$

- b. Soit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $M(2 \cos t, \sin 2t)$.

Déterminer un procédé de construction du point M .

2. On considère la fonction f définie sur $[-2, 2]$ par $f(x) = x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$.

Soit $x \in [-2, 2]$ et $M(x, f(x))$.

On se propose de donner un procédé de construction de M .

- a. Vérifier que si $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors $\sin 2t = 2 \cos t \sqrt{1 - \cos^2 t}$.

- b. Montrer que $M(x, y) \in E$, si et seulement si, $y = f(x)$.

- c. Conclure.

Exercices et problèmes

Exercice 1

Dans chacun des cas ci-dessous, montrer que la fonction f est bornée sur \mathbb{R} .

1. $f(x) = 5\sin x$.
2. $f(x) = \sin x - \cos x$.
3. $f(x) = \cos x \sin x - 1$.

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on désigne par C_1 et C_2 les courbes représentatives respectives des fonctions f et g définies sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = -3\cos x + 2$ et $g(x) = \cos x$.

1. Tracer les courbes C_1 et C_2 .
2. Soit la fonction h définie sur $[-\pi, \pi]$ par $h(x) = |\cos x - 1| + |2\cos x - 1|$ et C sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 - a. Déterminer l'expression de $h(x)$.
 - b. En déduire la courbe C à partir des courbes C_1 et C_2 .
 - c. Résoudre graphiquement, $h(x) = \frac{1}{2}$ et $h(x) \geq 7$.

Exercice 3

Déterminer chacune des limites ci-dessous.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x} ; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)}{\sin x} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin^3 x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-5x)}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{x} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(-4x)} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(-3x)}{\sin(2x)} .$$

Exercice 4

Calculer la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous

$$f(x) = 2 \sin x ; g(x) = \frac{3 \cos x + 5}{2} ;$$

$$h(x) = \sin x + \cos x ; s(x) = \frac{1}{\cos x + 2} ;$$

$$v(x) = x \cos x ; t(x) = \sin x \cos x ;$$

$$w(x) = \sin^2 x ; r(x) = -3 \sin \left[-2x + \frac{\pi}{4} \right] ;$$

$$j(x) = \cos \left[-3x - \frac{\pi}{3} \right] .$$

Exercice 5

On considère la fonction $f : x \mapsto \cos^3 x - \sin^3 x$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Etudier sa dérivabilité puis calculer sa dérivée.
3. Donner une approximation affine de $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 6

On considère la fonction $f : x \mapsto \cos x - \frac{1}{x}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Etudier sa dérivabilité puis calculer sa dérivée.
3. Donner une approximation affine de $f(1.00001)$.

Exercice 7

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\sin^2 x + 1}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Etudier sa dérivabilité puis calculer sa dérivée.
3. Donner une approximation affine de $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $f(10^{-4})$.

Exercice 8

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\tan x}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Etudier sa dérivabilité puis calculer sa dérivée.
3. Donner une approximation affine de $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 9

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on désigne par C la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = \sin x$.

Soit a un réel.

1. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse a .
2. Etudier suivant les valeurs du réel a , la position de C et T .

Exercice 10

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par C et C' les courbes représentatives respectives des fonctions \sin et $-\sin$.

1. Déterminer l'ensemble E des points d'intersections des courbes C et C' .
2. On désigne par M un point de E d'abscisse x .
Montrer que les tangentes en M à chacune des courbes C et C' sont perpendiculaires.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = -3\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right).$$

1. Montrer que f est périodique et préciser une période de f .
2. Calculer $f'(x)$ et résoudre dans l'intervalle $[0, \pi]$ l'équation $f'(x) = 0$.
3. Étudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
4. Représenter dans un repère orthonormé la restriction de f à l'intervalle $[-\pi, 2\pi]$.
5. Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du réel k , le nombre de solutions sur $[-\pi, 2\pi]$ de l'équation $f(x) = k$.

Exercice 12

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère la fonction $f : x \mapsto \cos^2 x - 1$.

1. Montrer que f est périodique et préciser une période de f .
2. Étudier et représenter f sur un intervalle période.

Exercice 13

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère la fonction $f : x \mapsto -\frac{3}{2}\sin 2x$.

1. Montrer que f est périodique et préciser une période de f .
2. Étudier et représenter f sur un intervalle période.

Exercice 14

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère la fonction $f : x \mapsto 2\cos\left(-3x + \frac{\pi}{2}\right)$.

1. Montrer que f est périodique et préciser une période de f .
2. Étudier et représenter f sur un intervalle période.

Exercice 15

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère la fonction $f : x \mapsto \tan x + \sin 4x$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
1. Montrer que f est périodique et préciser une période de f .
2. Étudier et représenter f sur un intervalle période.

Exercice 16

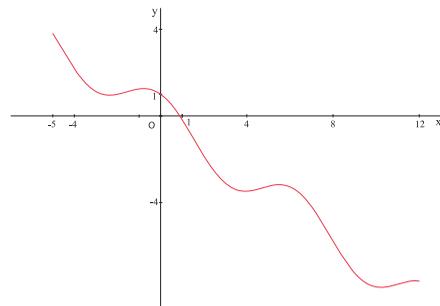
Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on désigne par C la courbe représentative de la fonction f définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan x$.

1. Représenter f et $-f$.
2. On considère la fonction g définie sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ par $g(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ et on désigne par C' sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 - a. Vérifier que $g(x) = -\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
 - b. Tracer alors la courbe C' .
 - c. En déduire le tableau de variation de g .

Exercice 17

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a tracé la courbe représentative de la fonction définie sur

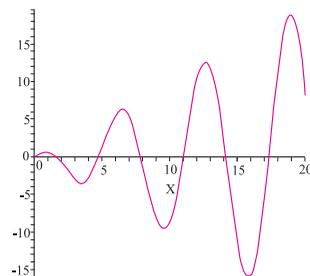
$$[-5, 12] \text{ et par } f(x) = \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$



Déterminer les extréma de f .

Exercice 18

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on désigne par C la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x \cos x$.



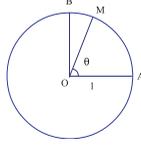
Déterminer par le calcul, le plus petit extremum local de la courbe C à 10^{-1} près.

Exercice 19

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit A et B deux points du cercle trigonométrique de centre O tels que $\widehat{(\vec{OA}, \vec{OB})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Soit θ un réel un réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$,
on désigne par M le point du cercle
tel que $\widehat{(\vec{OA}, \vec{OM})} \equiv \theta [2\pi]$.



1. a. Montrer que $AM = 2 \sin \frac{\theta}{2}$.

b. Montrer que $BM = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$.

2. Dresser le tableau de variation de la fonction

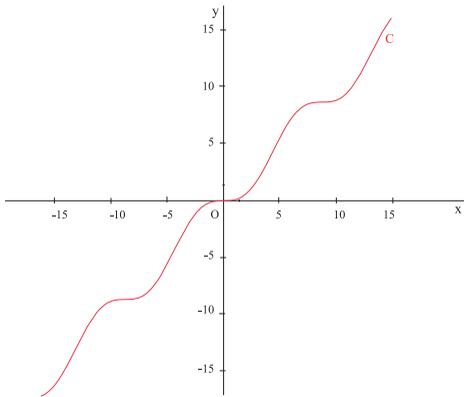
$f : x \mapsto 2\sin x + 2\sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$ sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{4}[$.

3. En déduire la valeur de θ pour laquelle la somme $AM + BM$ est maximale.

Exercice 20

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a tracé ci-dessous la courbe C représentative de la fonction

$f : x \mapsto x - \sin x$.



1. Montrer que pour tout réel x , $x-1 \leq f(x) \leq x+1$.

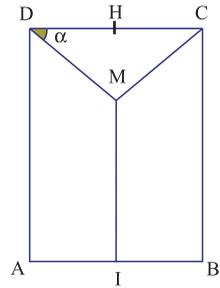
2. a. Déterminer les points d'intersection de la courbe C avec la droite D : $y = x-1$.

b. Déterminer les points d'intersection de la courbe C avec la droite D' : $y = x+1$.

3. Montrer que les droites D et D' sont tangentes à C en ces points d'intersection.

Exercice 21

On veut placer un tuyau en forme de Y contre un mur rectangulaire afin d'évacuer les eaux de pluies recueillies sur le toit. On modélise la situation par la figure ci-contre.



On désigne par I et H les milieux respectifs de $[AB]$ et $[DC]$.

On désigne par M un point du segment $[IH]$ distinct de I et H et on note $\widehat{CDM} = \alpha$ (en radians).

On se propose de trouver la valeur de α pour laquelle la longueur du tuyau est minimale.

On note $f(\alpha)$ la longueur du tuyau.

1. Montrer que $f(\alpha) = \frac{AB}{\cos \alpha} - \frac{AB}{2} \tan \alpha + AD$.

2. a. Etudier sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ les variations de la fonction $f : \alpha \mapsto f(\alpha)$.

b. Conclure.

Exercice 22

On considère un triangle ABC isocèle de sommet principal A, inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1. On désigne par H le pied de la hauteur issue de A.

On note α la mesure en radians de l'angle \widehat{HOC}

et on suppose que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

1. a. Calculer BC et AH en fonction de α .

b. En déduire l'aire du triangle ABC en fonction de α .

2. On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

par $f(\alpha) = \sin \alpha(1 + \cos \alpha)$.

a. Montrer que $f'(\alpha) = (2 \cos \alpha - 1)(\cos \alpha + 1)$.

b. Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

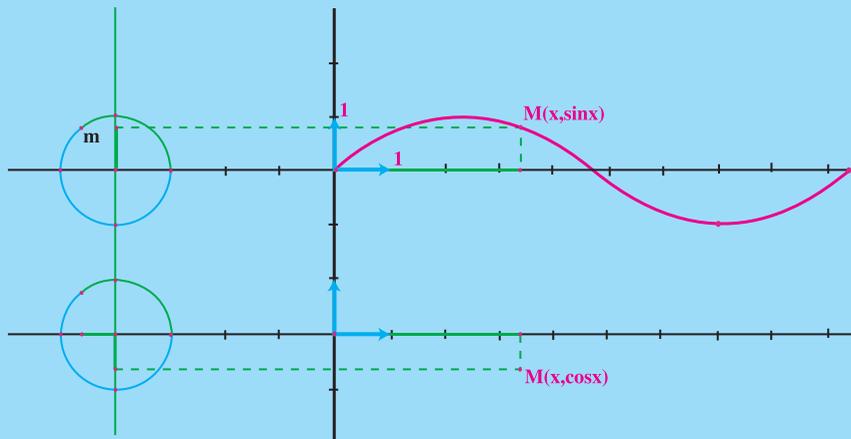
3. Déterminer la valeur de α pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale.

Préciser ce maximum et la nature du triangle ABC.

Avec l'ordinateur

On se propose dans cette séquence d'illustrer le tracé des fonctions sinus et cosinus.

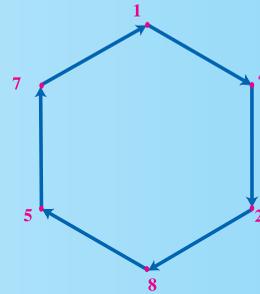
1. On trace un cercle centré sur l'axe des abscisses, puis on y place un point m .
2. On construit l'arc de C d'origine le point $A(a, 0)$ et passant par m .
3. On mesure la longueur de l'arc \widehat{AM} qu'on reporte sur l'axe des abscisses à l'aide de l'outil "report de mesure".
4. On construit le point M comme intersection de la parallèle à l'axe des abscisses en m et la perpendiculaire à cet axe et passant par le point représentant la mesure reportée.
5. On fait varier le point m sur C et à l'aide de l'outil trace, on observe le déplacement du point M .
6. Utiliser ce procédé pour illustrer le tracé de la fonction cosinus et la fonction tangente.



Le quotient $\frac{1}{7}$ a pour période le nombre 142 857.

Multiplié par 2, 3, 4, 5 et 6, on obtient respectivement d'autres nombres cycliques : 285 714, 428 571, 571 428, 714 285 et 857 142.

Faites de même pour les quotients $\frac{1}{17}$; $\frac{1}{19}$ et $\frac{1}{23}$.



Le *Boléro* de Maurice Ravel est un immense ostinato construit à partir d'un couple de thèmes qui se répètent une dizaine de fois dans des combinaisons instrumentales sans cesse renouvelées, depuis la configuration initiale (tambour, clarinette, flûte) jusqu'au "tutti final". Une insistante formule rythmique récurrente, énoncée dans un tempo immuable.



L'électrocardiographie (ECG) est la représentation graphique du potentiel électrique généré par l'activité musculaire du cœur et recueillie par des électrodes à la surface de la peau.

On donne ci-dessous le tracé papier de cette activité, appelé un électrocardio. L'électrocardiographe est l'appareil permettant de faire un électrocardiogramme.

L'électrocardiographie d'un patient sain est périodique.



Suites réelles

Chapitre 9

" Il peut n'y avoir aucun intérêt pratique à savoir que π est irrationnel, mais s'il est possible de le savoir, il serait intolérable de ne pas le savoir. "

Titchmarsh

Pour commencer

Activité 1

Calculer chacune des sommes ci-dessous.

a. $100 + 102 + \dots + 1004$.

b. $\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \sqrt{2} - 2 + \dots - 2^{10}$.

c. $\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{2\pi}{4} + \dots + \cos \frac{73\pi}{4}$.

d. $\cos \pi + \cos(2\pi) + \dots + \cos(3000\pi)$.

Activité 2

1. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \sin n\pi$.

Calculer u_n .

2. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \cos \frac{(2n+1)\pi}{2}$.

Calculer v_n .

Activité 3

Représenter graphiquement chacun des ensembles ci-dessous.

a. L'ensemble des points $A(n, n^2)$, $0 \leq n \leq 6$.

b. L'ensemble des points $A(n, \frac{n^2+1}{n^2+3})$, $0 \leq n \leq 10$.

c. L'ensemble des points $A(n, \sin n)$, $0 \leq n \leq 10$.

1. Définition et représentation graphique d'une suite

Activité 1

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{cccccc}
 u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} & ; & s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} & ; & t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} & ; & v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} & ; & w : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\
 n \mapsto n^2 - 1 & & n \mapsto \frac{1}{n} & & n \mapsto \sqrt{n^2 - 5} & & n \mapsto \frac{2n + 1}{n^2 - n + 1} & & n \mapsto \cos(2n)
 \end{array}$$

Définition

Une suite numérique u est une fonction de \mathbb{N} dans \mathbb{R} , définie à partir d'un certain rang n_0 .

L'image $u(n)$ de l'entier n est notée u_n .

Le terme u_{n_0} est le premier terme de la suite.

Le terme u_n est le terme d'indice n de la suite.

Activité 2

On considère l'ensemble des entiers naturels dont le reste dans la division euclidienne par 5 est égal à 4, que l'on range dans l'ordre croissant.

A tout entier n , on associe le $n^{\text{ème}}$ entier ainsi obtenu que l'on note u_n .

1. Donner les valeurs de u_1, u_2, u_3, u_{50} et u_{100} .
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Exprimer u_{2n} et u_{2n+1} en fonction de n .
4. Représenter dans un repère les points $A_n(n, u_n)$, $1 \leq n \leq 5$.
5. Calculer la somme $S = 4 + 9 + 14 + \dots + 604$.

Activité 3

Une étude écologique effectuée dans une banlieue donnée, indique que dans n années, le niveau moyen (en parties par million) de monoxyde de carbone présent dans l'air sera

$$g_n = 0.05 n^2 + 0.1 n + 3.4.$$

1. Quel sera le niveau moyen de monoxyde de carbone présent dans l'air cette année, dans un an, deux ans, dix ans ?
2. Représenter les points $A_n(n, g_n)$, pour $1 \leq n \leq 6$.
3. Sur quelle courbe se trouvent les points $A_n(n, g_n)$, $n \geq 0$?

Activité 4

A tout entier $n \geq 1$, on associe u_n , le $n^{\text{ème}}$ chiffre après la virgule dans l'écriture décimale de $\frac{9}{11}$

1. Calculer u_1, u_2, u_{100} et u_{101} .
2. Déterminer pour tout entier n , u_{2n} et u_{2n+1} .
3. Représenter dans un repère les points $A_n(n, u_n)$, $1 \leq n \leq 10$.

Activité 5

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, $n \geq 0$.

1. Calculer u_0, u_1, u_3 . et u_4 .
2. Donner en fonction de n l'expression de $u_{4n}, u_{4n+1}, u_{4n+2}$ et u_{4n+3} .
3. Représenter dans un repère les points $A_n(n, u_n)$, $0 \leq n \leq 10$.

2. Variation d'une suite

Activité 1

Une équipe de biologistes a effectué plusieurs expériences avec une certaine espèce d'insectes. L'analyse des données a montré que n semaines après le début des expériences, le nombre d'insectes (en centaines) est $v_n = 20 - \frac{6}{n+1}$.

1. Quel est le nombre initial d'insectes ?
2. Quel sera le nombre d'insectes au bout d'une semaine, deux semaines, 49 semaines d'expériences ?
3. Représenter dans un repère orthonormé les points $A_n(n, v_n)$, $0 \leq n \leq 10$.
4. Décrire l'évolution de la population d'insectes au cours d'expériences successives.

Activité 2

Un fabricant doit payer des frais de manutention et de transport pour chaque commande de matières premières, et après réception, il doit payer des frais d'entreposage jusqu'à ce que les matières premières soient utilisées. Le fabricant estime que si chaque commande contient n unités, le coût total annuel c_n (exprimé en dinars) de manutention, de transport et d'entreposage des matières premières sera de $c_n = n + \frac{1600}{n}$.

1. Représenter dans un repère orthonormé les points $A_k(10k, c_{10k})$, $1 \leq k \leq 8$.
Sur quelle courbe se trouvent les points A_k ?
2. Décrire l'évolution du coût total annuel de ce fabricant.
3. Pour quelle valeur de n , le coût total annuel c_n est-il minimum ?

Activité 3

On considère les suites (u_n) , (v_n) (w_n) et (t_n) définies par

$$u_n = n^2 + 1, n \geq 0 ; v_n = \frac{1}{n}, n \geq 1 ; w_n = n + 1 + (-1)^n, n \geq 0 ; t_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right), n \geq 0.$$

1. Dans quel ordre sont rangés les termes de la suite (u_n) ?
2. Dans quel ordre sont rangés les termes de la suite (v_n) ?
3. Peut-on ranger les termes de la suite (w_n) dans l'ordre croissant ou décroissant ?
4. Peut-on ranger les termes de la suite (t_n) dans l'ordre croissant ou décroissant ?

Définition

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout entier $n \geq n_0 \geq 0$.

La suite (u_n) est dite croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \geq n_0$. Dans ce cas les termes de la suite sont rangés dans l'ordre croissant : $u_{n_0} \leq u_{n_0+1} \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \dots$

La suite (u_n) est dite décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq n_0$. Dans ce cas les termes de la suite sont rangés dans l'ordre décroissant : $u_{n_0} \geq u_{n_0+1} \geq \dots \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \dots$

Une suite est dite monotone lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.

Activité 4

Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$ et u la suite définie par $u_n = f(n)$.

1. Montrer que si f est croissante sur $[0, +\infty[$ alors la suite u est croissante.
2. Montrer que si f est décroissante sur $[0, +\infty[$ alors la suite u est décroissante.
3. Appliquer les résultats précédents pour étudier la monotonie des suites (u_n) , (v_n) , (t_n) , (k_n) et (w_n) définies par

$$u_n = 2n^2 - 3n + 5, n \geq 1 ; v_n = \sqrt{n-3}, n \geq 3 ; v_n = \frac{n-1}{2n}, n \geq 1 ;$$

$$k_n = \sin \frac{1}{n}, n \geq 1 ; t_n = \cos \frac{1}{n}, n \geq 1.$$

Activité 5

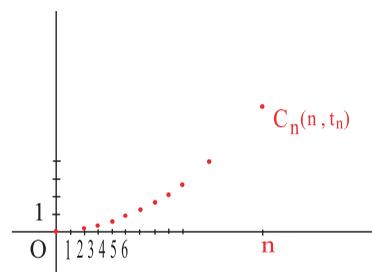
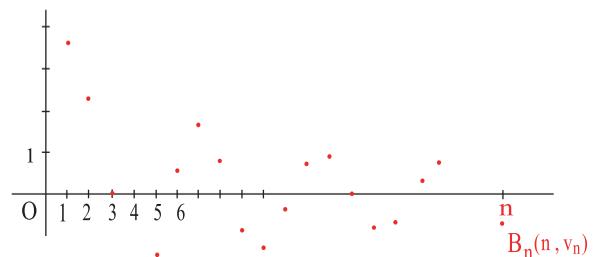
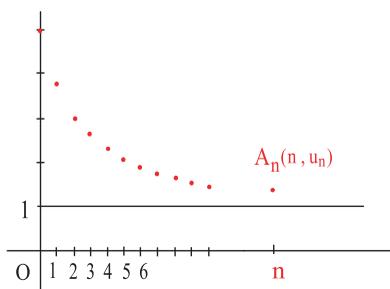
Etudier les variations d'une suite arithmétique de raison r (on discutera suivant le signe de r).

Activité 6

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (t_n) .

Sur chacun des graphiques ci-dessous, on a représenté les points $A_n(n, u_n)$, $B_n(n, v_n)$ et $C_n(n, t_n)$.



1. Donner un encadrement de $u_n, n \in \mathbb{N}$.
2. Donner un encadrement de $v_n, n \in \mathbb{N}$.
3. Peut-on trouver un encadrement de $t_n, n \in \mathbb{N}$?

Définition

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout entier $n \geq p$.

La suite (u_n) est dite majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $n \geq p$, $u_n \leq M$.

La suite (u_n) est dite minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $n \geq p$, $u_n \geq m$.

La suite (u_n) est dite bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

Activité 7

Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$ et u la suite définie par $u_n = f(n)$.

1. Montrer que si f est majorée sur $[0, +\infty[$ alors la suite u est majorée.
2. Montrer que si f est minorée sur $[0, +\infty[$ alors la suite u est minorée.
3. Appliquer les résultats précédents pour montrer que chacune des suites (u_n) , (v_n) et (t_n) définie ci-dessous est bornée.

$$u_n = 2 - \frac{3}{2+n}, n \geq 0; v_n = \sin(2n), n \geq 0; t_n = \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) - 3, n \geq 0.$$

Activité 8

On considère la suite (w_n) définie par $w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \geq 0$.

1. Montrer que $0 < w_n \leq 1$, $n \geq 0$.
2. Etudier les variations de la suite (w_n) .

Activité 9

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n}{2^n}$, $n \geq 1$.

1. a. Comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
b. En déduire les variations de la suite (u_n) .
2. Montrer que la suite (u_n) est majorée.
3. Montrer que $2^n \geq n$, $n \geq 1$.

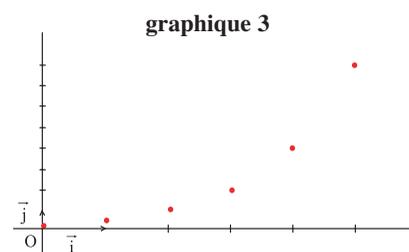
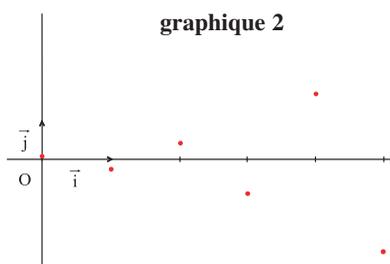
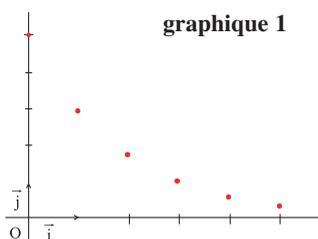
3. Suites géométriques

Activité 1

Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère trois suites géométriques (u_n) , (v_n) et (w_n) de raisons respectives $q < 0$, $0 < q' < 1$ et $q'' > 1$.

Sur chacun des graphiques ci-dessous, on a représenté les points $A_n(n, u_n)$, $B_n(n, v_n)$ et $C_n(n, w_n)$ $n \leq 5$. Identifier ces points.



Activité 2

- Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$.
Etudier les variations de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :
 - $q > 1$.
 - $0 < q < 1$.
- Que peut-on dire des variations d'une suite géométrique de raison strictement négative ?
de raison égale à 1 ?

Activité 3

Montrer qu'une suite géométrique de raison q telle que $|q| \leq 1$, est bornée.

Activité 4

Selon la théorie de Tibby, publiée en 1947, le pourcentage de carbone 14 est le même dans l'atmosphère. Lorsqu'un animal ou une plante meurt, le carbone 14 qu'il contient se désintègre et le pourcentage de cette substance dans l'organisme inerte décroît de 1.24% en 100 ans.

- Quel est le pourcentage de carbone initial contenu dans un tissu mort depuis 1000 ans, 2000 ans, 10000 ans ?
- Exprimer en fonction de l'entier naturel k , le pourcentage u_k de carbone initial contenu dans un tissu mort depuis $k \cdot 10^3$ années.
- Donner une estimation de l'âge d'un fossile qui ne contient que 10% de ce qu'il contenait en carbone 14.
- Etudier les variations de la suite (u_k) .

Activité 5

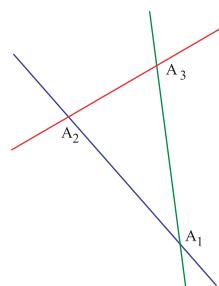
Une population de 100 bactéries prolifère en se multipliant par deux toutes les heures.

- Quel sera le nombre de bactéries au bout d'une heure, deux heures, cinq heures ?
- Exprimer en fonction de n , le nombre b_n de bactéries au bout de n heures.
- Donner une estimation du temps nécessaire pour que le nombre de bactéries soit supérieur à un million.
- Etudier les variations de la suite (b_n) . La suite (b_n) est-elle bornée ?

4. Suites récurrentes

Activité 1

- On considère trois points non alignés et on désigne par d_3 le nombre de droites passant par deux de ces points. Calculer d_3 .
- On considère à présent quatre points, trois quelconques d'entre eux n'étant pas alignés, et on désigne par d_4 le nombre de droites passant par deux de ces points. Calculer d_4 .
- On considère à présent n points ($n \geq 4$), trois quelconques d'entre eux n'étant pas alignés, et on désigne par d_n le nombre de droites passant par deux de ces points.
 - Donner une relation entre d_{n-1} et d_n en fonction de n .
 - En déduire l'expression de d_n en fonction de n .
- Etudier les variations de la suite (d_n) . La suite (d_n) est-elle majorée ?



Activité 2

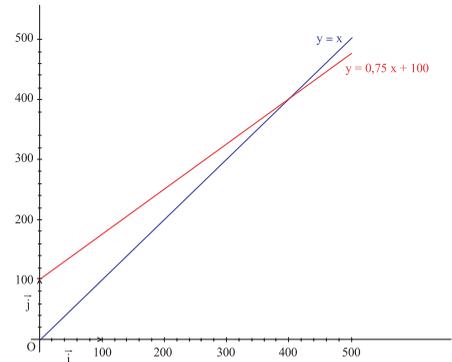
Le président d'une association sportive constate que chaque année, l'association garde 75% de ses anciens adhérents et qu'il y a 100 nouveaux adhérents.

On suppose que l'évolution du nombre des adhérents reste la même au fil des ans.

On note u_n le nombre d'adhérents au bout de n années.

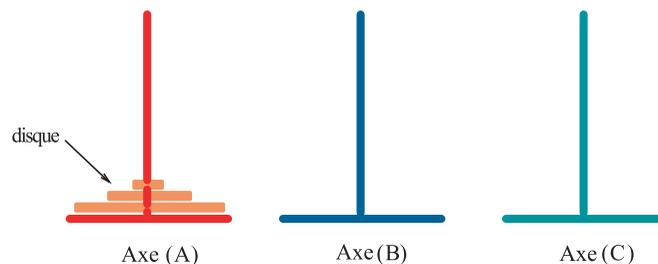
On sait qu'au démarrage de l'association, il y avait 40 adhérents, soit $u_0 = 40$.

- Calculer u_1 et u_2 .
- Donner une relation entre u_n et u_{n+1} .
- Dans le graphique ci-contre, on a représenté la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 0.75x + 100$ et la droite d'équation $y = x$.



- Reproduire ce graphique et placer sur l'axe des abscisses le réel $u_0 = 40$.
 - Placer alors sur l'axe des ordonnées le réel $u_1 = f(u_0)$.
Reporter u_1 sur l'axe des abscisses.
 - En réitérant le procédé décrit précédemment, placer sur l'axe des abscisses les réels $u_2 = f(u_1)$ et $u_3 = f(u_2)$.
- On pose pour tout entier n , $v_n = 400 - u_n$.
 - Calculer v_0 et vérifier que pour tout entier n , $v_{n+1} = 0.75 v_n$.
 - Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
 - En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n .
 - Quel sera le nombre d'adhérents au bout de 15 années ? 100 années ?
 - Donner un encadrement de u_n , $n \geq 0$.

Activité 3 (La tour de Hanoi)



Il s'agit de déplacer tous les disques de l'axe (A) soit vers l'axe (B) soit vers l'axe (C) sachant que

- à chaque fois, on ne déplace qu'un seul disque,
- on ne peut pas mettre un disque sur un disque plus petit.

S'il y a n disques, on notera x_n le nombre minimum de coups nécessaires.

- Vérifier que $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ et $x_3 = 7$.
- Prouver que $x_{n+1} = 2x_n + 1$.
- En déduire que $x_n = 2^n - 1$.
- Donner une estimation du temps nécessaire pour placer 20 disques sachant que chaque coup nécessite 1 seconde.

Activité 4

Le but de cette activité est de construire une suite de nombres rationnels qui approximent $\sqrt{37}$.

1. En utilisant l'égalité $(\sqrt{37} - 6)(\sqrt{37} + 6) = 1$, déterminer l'unique solution positive de l'équation $x = 6 + \frac{1}{6 + x}$.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction $h : x \mapsto 6 + \frac{1}{6 + x}$ et la droite d'équation $y = x$.
3. On pose $x_1 = 6$; placer sur l'axe des abscisses les points $x_2 = 6 + \frac{1}{6 + x_1}$, $x_3 = 6 + \frac{1}{6 + x_2}$, $x_4 = 6 + \frac{1}{6 + x_3}$ et vérifier que $x_1 \leq x_3 \leq \sqrt{37} \leq x_4 \leq x_2$.
4. Donner la valeur exacte de x_2, x_3 et x_4 et prouver que $\frac{882}{145}$ est une valeur approchée de $\sqrt{37}$ à 10^{-4} près.
5. En considérant la suite (x_n) définie par
$$\begin{cases} x_1 = 6, \\ x_{n+1} = 6 + \frac{1}{6 + x_n} \end{cases}$$

encadrer $\sqrt{37}$ entre deux rationnels dont la différence est inférieure à 10^{-13} .

6. Utiliser un procédé analogue pour déterminer une suite de nombres rationnels qui approximent $\sqrt{10}$.

Activité 5

Soit un réel $a > 0$ et la suite (x_n) définie par

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = ax_n + b \end{cases}$$

1. Montrer que si $x_n \geq x_{n-1}$, $n \geq 1$ alors $x_{n+1} \geq x_n$.
2. Discuter suivant le signe du réel $x_1 - x_0$, les variations de la suite (x_n) .

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Sur le graphique ci-contre, on a représenté les points $A_n(n, u_n)$, $1 \leq n \leq 4$, où (u_n) est une suite géométrique de raison q .

Graphiquement on a

$q < 0$ $q > 1$ $q < -1$.

2. La suite (u_n) définie par $u_n = \sin n$, $n \geq 0$,

est majorée n'est pas bornée est positive.

3. La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{-2}{n^2 + 1}$, $n \geq 0$,

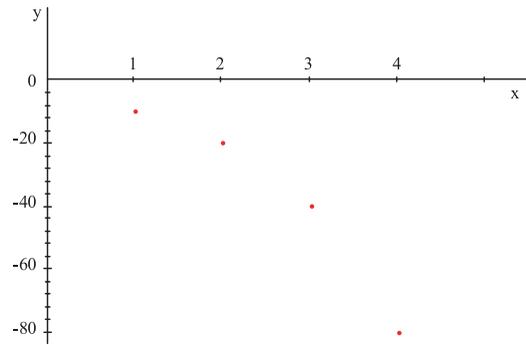
n'est pas majorée n'est pas minorée est bornée.

4. La suite (u_n) définie par $u_n = -2 \left(\frac{5}{3}\right)^n$, $n \geq 0$,

est croissante est décroissante n'est ni croissante ni décroissante.

5. La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$, $n > 0$,

croissante décroissante n'est ni croissante ni décroissante.



VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si une suite n'est pas bornée alors elle n'est pas majorée.
2. Si une suite n'est pas minorée, alors elle n'est pas bornée.
3. Si une suite n'est pas croissante, alors elle est décroissante.
4. Si une suite est arithmétique, alors elle est monotone.
5. Si une suite est géométrique, alors elle est monotone.

Mobiliser ses compétences

Situation 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x^2 + 0.5$.

On a tracé ci-contre sa courbe C .

On se propose de donner un encadrement de l'aire A délimitée par les axes du repère, la courbe C et la droite d'équation $x = 1$.

1. On partage l'intervalle $[0, 1]$ en quatre intervalles

de longueur $\frac{1}{4}$.

a. On trace les rectangles r_i , $0 \leq i \leq 3$, comme l'indique la figure ci-contre et on désigne par s_4 la somme des aires des rectangles r_i , $0 \leq i \leq 3$.

Calculer s_4 .

b. On trace les rectangles R_i , $0 \leq i \leq 3$, comme l'indique la figure ci-contre et on désigne par S_4 la somme des aires des rectangles R_i , $0 \leq i \leq 3$.

Calculer S_4 .

c. En déduire un encadrement de A .

Plus généralement, soit un entier $n \geq 1$, on partage

l'intervalle $[0, 1]$ en n intervalles, de longueur $\frac{1}{n}$.

On trace les rectangles r_i et les rectangles R_i ,

$0 \leq i \leq n-1$, comme l'indique la figure ci-contre.

On désigne par s_n respectivement S_n la somme des aires des rectangles r_i , respectivement R_i , $0 \leq i \leq n-1$.

2. a. Faire une figure dans le cas où $n = 10$.

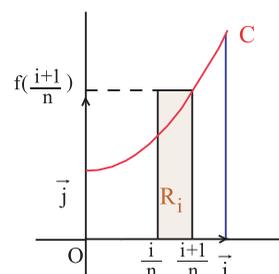
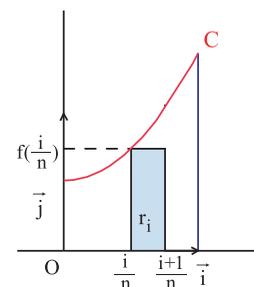
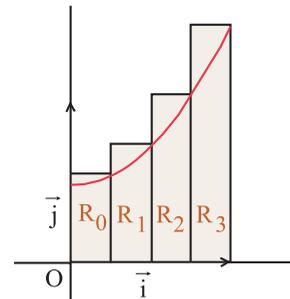
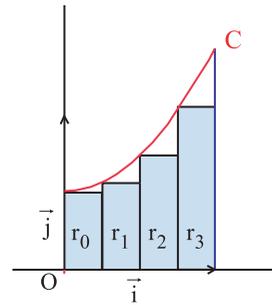
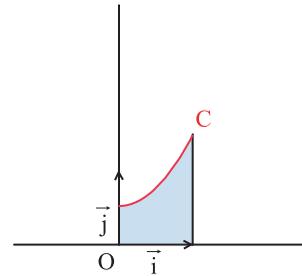
b. Déduire un nouvel encadrement de A .

3. a. Exprimer s_n et S_n en fonction de n .

b. En utilisant l'égalité $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \geq 1$,

montrer que $s_n = \frac{5}{6} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$ et que $S_n = \frac{5}{6} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$.

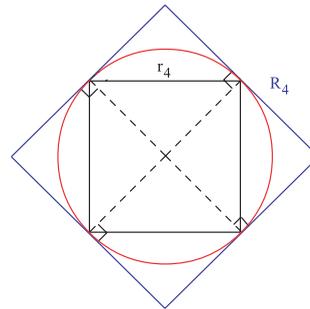
c. Déduire un encadrement de A à 10^{-20} près.



Situation 2

On se propose de donner des encadrements de π en encadrant le périmètre d'un cercle de diamètre 1.

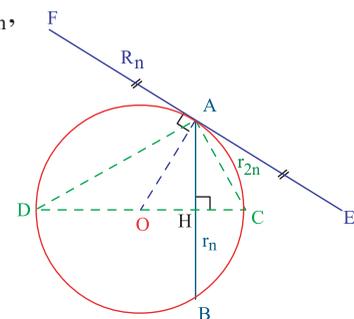
I. Dans la figure ci-contre on considère un carré r_4 inscrit dans le cercle. Le carré R_4 circonscrit est obtenu en traçant les tangentes au cercle en les sommets du carré r_4 .



1. a. Calculer les périmètres p_4 et P_4 respectifs des carrés r_4 et R_4 .
b. En déduire un encadrement de π .
2. Soit $[AB]$ un côté de r_4 . La médiatrice de $[AB]$ coupe le cercle en un point C.
 - a. Vérifier que A, C et B sont trois sommets consécutifs d'un octogone régulier r_8 inscrit dans le cercle.
 - b. Construire r_8 .
On désigne par p_8 le périmètre de r_8 .
 - c. Comparer graphiquement p_4 et p_8 .
3. a. Tracer à partir de r_8 un octogone régulier R_8 circonscrit au cercle.
On désigne par P_8 le périmètre de R_8 .
b. Comparer graphiquement R_4 et P_4 .
4. En déduire un nouvel encadrement de π .

II. Plus généralement, soit un entier $n \geq 3$. On considère un polygone régulier r_n à n côtés, inscrit dans un cercle de diamètre 1.

En appliquant le même procédé décrit en I, au polygone régulier r_n , il vient que si $[AB]$ désigne un côté du polygone régulier r_n , (voir figure ci-contre), alors $[AC]$ désigne un côté d'un polygone régulier r_{2n} à $2n$ côtés inscrit dans le cercle et $[EF]$ désigne un côté d'un polygone régulier R_n à n côtés circonscrit au cercle.



Si on note pour tout $n \geq 3$, p_n et P_n les périmètres respectifs des polygones r_n et R_n on obtient

$$p_n < p_{2n} < p_{4n} < \dots < \pi < \dots < P_{4n} < P_{2n} < P_n.$$

Dans ce qui suit on se propose de déterminer p_{2n} et P_n en fonction de p_n .

1. a. En remarquant que $AC^2 = DC.HC$, montrer que $AC^2 = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{AB^2}{4}} \right)$.

- b. En déduire que $p_{2n} = \sqrt{2n} \sqrt{n - \sqrt{n^2 - p_n^2}}$.

2. a. En remarquant que $OA.AH = AE.OH$, montrer que $EF = \frac{AB}{\sqrt{1 - AB^2}}$.

b. En déduire que $P_n = \frac{np_n}{\sqrt{n^2 - p_n^2}}$.

3. Compléter le tableau ci-dessous.

n	Valeur approchée de p_n à 10^{-8} près	Valeur approchée de P_n à 10^{-8} près	Encadrement de π
$2^2 = 4$			
$2^3 = 8$			
$2^4 = 16$			
$2^5 = 32$			
$2^6 = 64$			
$2^7 = 128$			
$2^8 = 256$			
$2^9 = 512$			
$2^{10} = 1024$			

Exercices et problèmes

Exercice 1

Pour chacun des cas ci-dessous, préciser à partir de quel rang la suite est définie, puis calculer les quatre premiers termes de la suite.

$$u_n = \frac{5n-1}{n^2-5} ; v_n = \sqrt{n^2+n-12} ; w_n = \frac{-1}{3^n-3} ;$$

$$a_n = \frac{n+1}{\sqrt{n-9}} ; b_n = \cos\left(\frac{1}{n-3}\right) ; t_n = \sqrt{2^n-12}.$$

Exercice 2

On considère la suite u définie par $u_n = \left(\frac{1}{4}n(n+1)\right)^2$, $n \geq 1$.

1. Représenter les points $A_n(n, u_n)$, $1 \leq n \leq 3$.
2. Exprimer $u_{2n}, u_{2n+1}, u_{n^2}$, en fonction de n .

Exercice 3

Pour chacune des suites définies ci-dessous, calculer les cinq premiers termes puis représenter dans un repère les points correspondants et calculer en fonction de n les termes d'indices $n+1$, $n+2$ et $2n$.

$$u_n = 3n-1, n \geq 0 ; \quad v_n = 3n-1, n \geq 0 ;$$

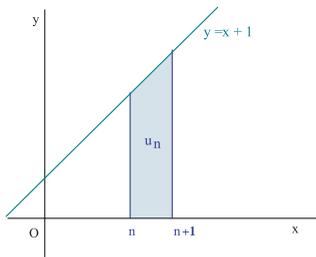
$$w_n = \sqrt{2n+4}, n \geq 0 ; \quad k_n = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} s_0 = 1 \\ s_{n+1} = 2s_n, n \geq 0 \end{cases} ; \quad t_n = \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right), n \geq 0.$$

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Expliciter le terme général de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ où u_n est l'aire du domaine représenté dans la figure ci-dessous.



2. En déduire l'aire du domaine D des points M de coordonnées (x, y) tels que $0 \leq x \leq 10$ et $0 \leq y \leq x+1$.

Exercice 5

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que $u_{n+1} = 2^{4n+2}$.

1. Déterminer u_n en fonction de n .
2. Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.

Exercice 6

On admet, en première approximation, que la pression atmosphérique diminue de 1% de sa valeur initiale chaque fois que l'altitude de l'observateur augmente de 100 mètres.

On désigne par $P(0)$ la valeur de la pression atmosphérique en un lieu donné et $P(n)$ celle en un lieu situé n centaines de mètres plus haut.

1. Etablir une relation entre $P(n+1)$ et $P(n)$.
2. Exprimer $P(n)$ en fonction de n et de $P(0)$.
3. Un promeneur part de son domicile situé au bord de la mer (altitude 0). La pression indiquée par son baromètre de poche est de 1000 millibars. Il arrive à un village à une altitude de 400 mètres. Quelle est la valeur indiquée par le baromètre ?
4. Lorsqu'il atteint le sommet, son baromètre indique 894 millibars. Calculer à 100 mètres près l'altitude de ce sommet.

Exercice 7

Etudier les variations de chacune des suites définies ci-dessous.

$$u_n = \frac{2n}{n^2+3}, n \geq 0.$$

$$v_n = \frac{2n}{\sqrt{n+1}}, n \geq 0.$$

$$w_n = \frac{2^n \sqrt{n}}{3^n}, n \geq 0.$$

Exercice 8

Montrer que chacune des suites définies ci-dessous est bornée.

$$u_n = 3 + \frac{2n}{n^2+1}, n \geq 0.$$

$$v_n = 3 - 2\cos(4n-1), n \geq 0.$$

$$w_n = 1 + \frac{(-5)^n}{6^n \sqrt{n}}, n > 0.$$

Exercice 9

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1, n \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que (u_n) est positive.
2. Montrer que (u_n) est croissante.

Exercice 10

Pour chacune des suites définies ci-dessous étudier ses variations, indiquer, lorsque c'est possible, si elle est majorée, minorée ou bornée.

$$1. u_n = \frac{2n-1}{n+3}, n \geq 0.$$

$$2. u_n = \frac{-3n+1}{2n-4}, n \geq 3.$$

$$3. u_n = -3n + 1, n \geq 0.$$

$$4. u_n = \sqrt{3n+2}, n \geq 0.$$

$$5. \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n, n \geq 0. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n, n \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 11

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 3n + \cos n, n \geq 0$.

Montrer que (u_n) est croissante.

Exercice 12

Soit la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

Exercice 13

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right), n \geq 1$.

Montrer que (u_n) est croissante.

Exercice 14

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{3n+1}{n+2}, n \geq 0$.

1. Déterminer les variations de (u_n) .
2. Montrer que (u_n) est majorée par 3.
3. Déterminer un entier k tel que pour tout $n > k$, $2.9999 < u_n$.

Exercice 15

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = 3n^2 - 6n - 10, n \geq 1.$$

1. Déterminer les variations de (u_n) .
2. Déterminer un entier k tel que pour tout $n > k$, $u_n > 10^4$.
3. La suite (u_n) est-elle minorée ? majorée ?

Exercice 16

Soit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.
2. Montrer que pour tout entier $k > 1$, $k! \geq 2^{k-1}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est majorée par 3.

Exercice 17

Soit un réel a et la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{n+a}{a-n-1}, n > a.$$

On considère la suite (v_n) telle que

$$v_n = \frac{1}{u_n - u_{n-1}} - \frac{1}{u_{n-1} - u_{n-2}}, n \geq 2.$$

1. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique.
2. Pour quelles valeurs de a la suite (v_n) est-elle croissante ? décroissante ?

Exercice 18

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Tracer l'hyperbole H d'équation $y = \frac{1}{x}, x \neq 0$ et

placer le point $A_0(1,1)$.

On considère les points de H, A_n et B_n , tels que pour tout $n \geq 0$, le segment $[A_n B_n]$ a pour coefficient directeur 2 et le segment $[A_{n+1} B_n]$ a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$.

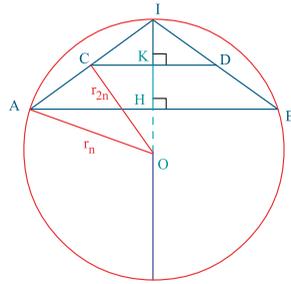
2. Placer les points B_0 et A_1 puis déterminer leurs coordonnées.

Pour tout $n \geq 0$, on désigne par a_n l'abscisse du point A_n et par b_n l'abscisse du point B_n .

3. Déterminer une relation entre a_n et b_n puis une relation entre a_{n+1} et b_n .
4. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont géométriques.
5. En déduire les coordonnées des points A_n et B_n en fonction de n .

Exercice 19

Dans la figure ci-contre [AB] désigne un côté d'un polygone régulier à n côtés, de périmètre 2 et inscrit dans un cercle de rayon r_n , ($r_n = OA$).



Soit r'_n le rayon du cercle inscrit dans le polygone ($r'_n = OH$).

Soit C et D les milieux de [AI] et [BI], alors [CD] est l'un des côtés d'un polygone régulier à $2n$ côtés, de même périmètre que le précédent, inscrit dans un cercle de rayon r'_{2n} ($r'_{2n} = OC$) et circonscrit à un cercle de rayon r'_{2n} ($r'_{2n} = OK$).

On obtient alors $\frac{1}{r_n} < \frac{1}{r_{2n}} < \dots < \pi < \dots < \frac{1}{r'_{2n}} < \frac{1}{r'_n}$.

1. Calculer r_4 et r'_4 puis donner un encadrement de π .

2. Remarquer que $OK = \frac{OI + OH}{2}$ et en déduire que $r'_{2n} = \frac{r'_n + r_n}{2}$.

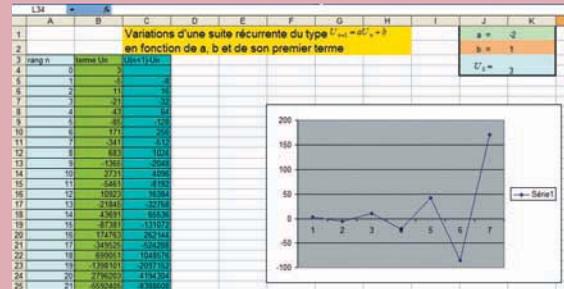
3. Remarquer que $OC^2 = OI \cdot OK$ et en déduire que

$$r'_{2n} = \sqrt{r_n r'_{2n}}$$

4. Calculer des valeurs approchées à 10^{-9} près de $\frac{1}{r_{64}}$ et $\frac{1}{r'_{64}}$ puis donner un nouvel encadrement de π .

Avec l'ordinateur

On se propose d'étudier à l'aide d'un tableur, les variations d'une suite récurrente du type $U_{n+1} = aU_n + b$



Comme indiqué dans la figure ci-dessus,

- on inscrit dans la cellule K1 une valeur de a , dans K2 une valeur pour b et dans K3 on choisira une valeur de U_0 .

- Dans la cellule A4 on écrit 0 et dans A5 on écrit la formule $=A4+1$.

On sélectionne A5 et avec la poignée de recopie, on copie par exemple jusqu'à A100.

- Dans la cellule B4 on écrit la formule $=K3$ et dans B5 on écrit la formule $=K3*B4+K3$

La cellule B5 étant sélectionnée, on la copie à l'aide de la poignée de recopie jusqu'à B100.

- Dans la cellule C5 on écrit la formule $=B5-B4$ et on la copie jusqu'à C100.

- On pourra représenter les termes de cette suite à l'aide d'un graphique du type courbe en choisissant par exemple la plage B4 : B100 comme plage de données.

Séquence 2

On considère la suite (U_n) définie par la donnée de son premier terme $U_0 \in [-6, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$;

$$U_{n+1} = \sqrt{U_n + 6}$$

A l'aide du logiciel CABRI,

1. Ecrire à l'aide de l'outil " expression " l'expression $(x+6)^{0.5}$ puis utiliser l'outil " appliquer une expression " pour représenter cette fonction.

2. Faire de même pour la droite d'équation $y = x$.

3. Créer un point sur l'axe des abscisses à l'aide de " point sur objet " et le nommer A. On désignera par l'abscisse de A.

4. Construire les termes U_1, U_2, U_3, U_4 et U_5 de la suite (U_n) .

5. Comment semblent les variations de (U_n) .

6. Déplacer le point A sur l'axe des abscisses. Conjecturer les variations de la suite (U_n) en fonction de la valeur de U_0 .

7. Démontrer cette conjecture.

Leonardo Fibonacci (fils de Bonaccio) est un mathématicien de talent de son époque, ses travaux sont fondamentaux comme lien entre les mathématiques arabes et celles de la Renaissance. Son influence est certaine dans l'introduction des nombres arabes en Occident.



Suite de Fibonacci

Quand nous regardons le coeur d'un tournesol, nous remarquons que les fleurons qui le composent forment deux familles de spirales. Une première famille qui s'éloigne du centre dans le sens horloger, et une seconde famille dans le sens anti-horloger.



Chaque fleuron constitue l'intersection d'une spirale de chaque famille. Structure remarquable du coeur de tournesol. Lorsque la nature n'a pas créé un mutant, le nombre de fleurons des spirales du premier type et le nombre de fleurons des spirales du second type sont constants, et sont deux nombres adjacents de la suite de Fibonacci. (55 dans un sens et 89 dans l'autre, 34 dans un sens et 55 dans l'autre).

La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul. On en trouve, par exemple, dans la mathématique babylonienne, chez Archimède, spécialiste des procédés illimités d'approximation pour des calculs d'aires et de volumes, ou en Égypte au 1er siècle après Jésus-Christ, dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de Héron d'Alexandrie.



في العلوم العدديّة، أولها الأرتماطقي وهو معرفة خواص الأعداد من حيث التّأليف إمّا على التّوالي أو بالتّضعيف مثل أن الأعداد إذا توالّت بعدد واحد فإنّ جمع الطرفين منها مساو لجمع كلّ عددين بعدهما من الطرفين بعد واحد، ومثل ضعف الواسطة، إن كانت عدة تلك الأعداد على تواليها والأزواج على تواليها (١) ويحدث في جمعها وقسمة بعضها على بعض طولاً وعرضاً خواص غريبة استقرت منها وتقرّرت في دواوينهم مسائلها. وكذلك ما يحدث للزوج والفرد وزوج الزّوج وزوج لفرد...

فإن لكلّ خواص مختصّة به تضمنها هذا الفن وليست في غيره، وهذا الفنّ أوّل أجزاء التّعالم وأثبتها، ويدخل في براهين الحساب...

ابن خلدون

Limites de suites réelles

Chapitre 10

*" Les mathématiques ne sont pas une moindre immensité
que la mer. "*

Hugo

Pour commencer**Activité 1**

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = 3^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Déterminer une valeur approchée à 0.0001 près de chacun des réels u_{10} et u_{20} .

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = 3^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

Déterminer une valeur approchée à 0.0001 près de chacun des réels v_{10} et v_{20} .

Que remarque-t-on ?

Activité 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 0.71$, pour tout entier n .

Calculer chacun des réels u_5 , u_{10} et u_{20} .

1. Limite finie d'une suite

Activité 1

Afin de déterminer la vitesse d'apprentissage des rats, un groupe d'étudiants en psychologie a effectué une expérience au cours de laquelle un rat de laboratoire doit parcourir un labyrinthe à plusieurs reprises.

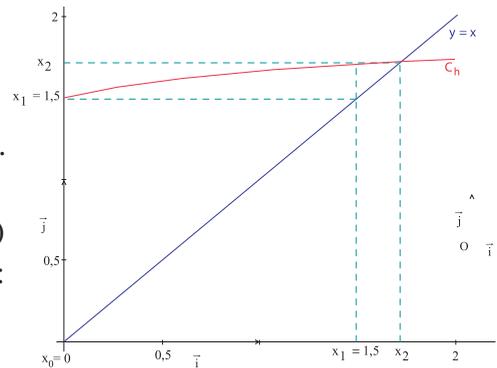
Les étudiants ont observé que le temps (en minute) mis par le rat pour parcourir le labyrinthe lors du $n^{\text{ème}}$ essai est d'environ $t_n = 3 + \frac{12}{n}$.

1. Représenter dans un repère les points $A_n(n, t_n)$, $1 \leq n \leq 10$.
2. Quel est le temps (arrondi à la seconde près) mis par le rat pour parcourir le labyrinthe lors du 30^{ème} essai, 50^{ème} essai, 100^{ème} essai, 1000^{ème} essai, 10000^{ème} essai ?
3. A partir de quel essai t_n est-il une valeur approchée de 3 à 10^{-6} près, 10^{-9} près, 10^{-15} près et 10^{-25} près ?
4. Interpréter ces résultats.

Activité 2

Soit la fonction $h : x \mapsto \frac{3 + 2x}{2 + x}$.

1. Déterminer la solution positive de l'équation $h(x) = x$.
2. Dans le repère ci-contre, on a représenté la droite d'équation $y = x$ et les trois premiers points $A_n(n, x_n)$ où (x_n) est une suite obtenue selon le procédé suivant: le terme x_{n+1} est l'image par h de x_n .
 - a. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n .
 - b. Expliquer la construction de x_1 et x_2 .
3. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-6} de x_n , $n \leq 6$.
4. a. A partir de quel entier n , a-t-on $|\sqrt{3} - x_n| \leq 10^{-2}$?
 b. A partir de quel entier n , a-t-on $|\sqrt{3} - x_n| \leq 10^{-3}$?
 c. A partir de quel entier n , a-t-on $|\sqrt{3} - x_n| \leq 10^{-5}$?

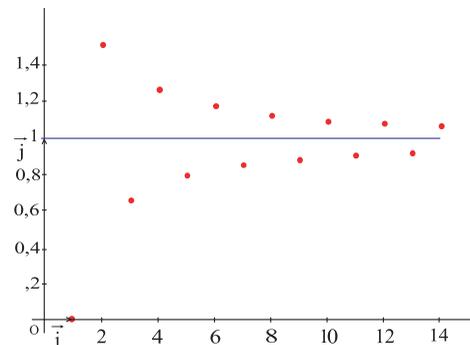


Activité 3

Dans le repère ci-contre, on a représenté les points $A_n(n, u_n)$, $n \leq 13$, où (u_n) est la suite définie par

$$u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}, n \geq 1.$$

1. Donner la valeur exacte de u_{10^k} , $k \leq 10$.



2. a. A partir de quel entier n , a-t-on $|1 - u_n| \leq 10^{-8}$?
- b. A partir de quel entier n , a-t-on $|1 - u_n| \leq 10^{-50}$?
- c. A partir de quel entier n , a-t-on $|1 - u_n| \leq 10^{-1000}$?
- d. Soit k un entier positif. A partir de quel entier n , a-t-on $|1 - u_n| \leq 10^{-k}$?

Définition

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout entier $n \geq p$.

On dit que la suite (u_n) converge vers un nombre réel L si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - L| < \varepsilon$.

Théorème (admis)

Si (u_n) converge vers un réel L alors ce réel est unique.

Conséquence

Une suite (u_n) converge vers un nombre réel L , si et seulement si, la suite $(u_n - L)$ converge vers zéro.

Notation et vocabulaire

Si une suite (u_n) converge vers un nombre réel L , on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ ou $\lim_n u_n = L$ et on dit que L est la limite de la suite (u_n) .

Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

Théorème (admis)

Soit une suite réel (u_n) convergente vers un réel non nul. Alors il existe un entier p tel que pour tout $n \geq p$, $u_n \neq 0$.

Activité 4

Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$ et u la suite définie par $u_n = f(n)$.

1. Montrer que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.
2. Appliquer le résultat précédent pour déterminer la limite de chacune des suites (u_n) , (v_n) , (t_n) et (w_n) définies par

$$u_n = \frac{1}{n}, n \geq 1; v_n = \frac{2n+1}{3n-1}, n \geq 1; t_n = 5 - \frac{3}{2n+1}, n \geq 0; w_n = 5 - \frac{3n^4-1}{-2n^4-1}, n \geq 0.$$

Activité 5

1. Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n) .
On suppose qu'il existe un entier N tel que $0 \leq |u_n| \leq v_n, n \geq N$.
Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
2. Appliquer le résultat précédent pour déterminer la limite de chacune des suites (u_n) , (v_n) , (t_n) et (w_n) définies par

$$u_n = \frac{1}{n!}, n \geq 0; v_n = \frac{\cos(n)}{n+1}, n \geq 0; t_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}, n \geq 0; w_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \geq 1.$$

2. Opérations sur les limites finies de suites

On peut, comme dans le cas des fonctions additionner et multiplier des suites.

Théorème (admis)

Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n) convergentes respectivement vers L et L' .

Soit a et b deux réels. Alors

- la suite $(au_n + bv_n)$ converge vers $aL + bL'$,
- la suite $(u_n v_n)$ converge vers LL' .

Théorème (admis)

Soit une suite réelle (u_n) convergente vers un réel non nul L .

Alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{L}$.

Activité 1

Déterminer la limite de chacune des suites (u_n) , (v_n) et (t_n) définies par

$$u_n = \frac{1}{2 + \frac{\cos n}{n}}, n \geq 1 ; v_n = \frac{3n^2 - 1}{n^2 + 1} - 200 \frac{(-1)^n}{n}, n \geq 1 ;$$

$$t_n = \left(-\frac{2n+1}{3n-1} \right) \left(\frac{\sin(4n^3)}{n^2+1} + 3 \right), n \geq 1 .$$

3. Limite infinie d'une suite

Activité 1

Si on ne ralentit pas la production de déchets solides, notre planète pourrait bien devenir une vaste poubelle. Une étude menée par une association pour la protection de l'environnement montre que dans n années, la quantité (en tonne) de déchets solides sera approximativement de $Q_n = 10^4(n^2 + 15n + 70)$.

1. Représenter dans un repère les points $A_n(n, Q_n)$, $1 \leq n \leq 10$.
2. Quelle sera la quantité de déchets solides après 20 ans, 30 ans, 50 ans et 100 ans ?
3. a. Au bout de combien d'années aura-t-on une quantité de déchets solides supérieure à 10^6 tonnes ?
b. Au bout de combien d'années aura-t-on une quantité de déchets solides supérieure à 10^9 tonnes ?
c. Au bout de combien d'années aura-t-on une quantité de déchets solides supérieure à 10^{12} tonnes ?
d. Soit N un réel positif, au bout de combien d'années aura-t-on une quantité de déchets solides supérieure à N tonnes ?

Activité 2

On considère n points ($n \geq 3$), trois quelconques d'entre eux n'étant pas alignés et on désigne par d_n le nombre de droites passant par deux de ces points.

1. Déterminer l'expression de d_n en fonction de n .
2. Représenter, dans un repère, les points de coordonnées $(10k, d_{10k})$ pour $1 \leq k \leq 3$.
3. Calculer d_{10^p} , $1 \leq p \leq 5$.
4. a. Comment peut-on choisir l'entier N pour avoir $d_n \geq 10^6$ pour tout $n \geq N$?
b. Comment peut-on choisir l'entier N pour avoir $d_n \geq 10^9$ pour tout $n \geq N$?
c. Comment peut-on choisir l'entier N pour avoir $d_n \geq 10^{2000}$ pour tout $n \geq N$?
d. Soit A un réel positif, peut-on trouver N tel que si $n \geq N$, alors $d_n \geq A$?

Activité 3

En 1228, le plus grand mathématicien occidental, Léonard de Pise (surnommé Fibonacci) publiait dans un recueil intitulé Liber Abaci le problème suivant :

" On place dans un enclos un couple (mâle et femelle) de lapereaux. Chaque couple âgé de deux mois donne naissance chaque mois à un nouveau couple (mâle et femelle). Si aucun lapin ne meurt, combien y aura-t-il de couples le $n^{\text{ème}}$ mois ? "

On note F_n le nombre cherché.

1. Vérifier les égalités $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$ et $F_4 = 3$.
2. Vérifier la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 1$.
3. Calculer F_n , $n \leq 10$.
4. Montrer que la suite (F_n) est strictement positive.
5. Etudier les variations de la suite (F_n) .
6. Montrer que $F_n \geq n$, $n \geq 5$.
7. a. Comment peut-on choisir l'entier N pour que pour tout $n \geq N$, $F_n \geq 10^{100}$?
b. Comment peut-on choisir l'entier N pour que pour tout $n \geq N$, $F_n \geq 10^{10000}$?
c. Comment peut-on choisir l'entier N pour que pour tout $n \geq N$, $F_n \geq 10^{10^{25}}$?
d. Soit A un réel positif, peut-on trouver N tel que si $n \geq N$, alors $F_n \geq A$?

Définition

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout entier $n \geq p$.

On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ si pour tout $A > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geq N$, alors $u_n > A$.

On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ si pour tout $A < 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geq N$, alors $u_n < A$.

Si une suite (u_n) tend vers $+\infty$, on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Si une suite (u_n) tend vers $-\infty$, on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Activité 4

Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$ et u la suite définie par $u_n = f(n)$.

1. Montrer que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

et que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

2. Appliquer le résultat précédent pour déterminer la limite de chacune des suites (u_n) , (v_n) et (t_n) définies par

$$u_n = \sqrt{n}, n \geq 0 ; v_n = 3n^2 - 2n + 3, n \geq 0 ; t_n = 2n - \frac{1}{n}, n \geq 1.$$

Activité 5

1. Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n) .

On suppose qu'il existe un entier N tel que $v_n \leq u_n, n \geq N$.

Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n) .

On suppose qu'il existe un entier N tel que $u_n \leq v_n, n \geq N$.

Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème

Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n) .

• S'il existe un entier N tel que $v_n \leq u_n, n \geq N$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

• S'il existe un entier N tel que $u_n \leq v_n, n \geq N$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Activité 6

Appliquer le théorème précédent pour déterminer la limite de chacune des suites (u_n) , (v_n) et (t_n) définies par

$$u_n = n!, n \geq 0 ; v_n = -2n(2 + \cos n), n \geq 0 ; t_n = n^{n+1}, n \geq 1.$$

4. Opérations sur les limites (finies ou infinies) de suites

Activité 1

1. Montrer le théorème suivant.

Théorème

Soit une suite réelle $(u_n)_{n \geq p}$ telle que $u_n > 0, n \geq p$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty, \text{ si et seulement si, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_n} \right) = 0.$$

Soit une suite réelle $(u_n)_{n \geq p}$ telle que $u_n < 0, n \geq p$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty, \text{ si et seulement si, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_n} \right) = 0.$$

2. Appliquer le résultat précédent pour déterminer la limite de chacune des suites (u_n) , (v_n) et (t_n) définies par

$$u_n = \frac{1}{2n^2 + 2n + 5}, n \geq 0 ; v_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2 + n}}, n \geq 1 ; t_n = \frac{-1}{n!}, n \geq 0.$$

Nous admettons les règles suivantes qui nous donnent les limites de la somme et du produit de deux suites.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n)$
L	L'	L + L'	LL'
$+\infty$	$L' \neq 0$	$+\infty$	∞ (et on applique la règle des signes)
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$		$-\infty$

Activité 2

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a. $u_n = \frac{1}{n^2} \sin n + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}, n > 0.$

b. $u_n = -\frac{n^5}{n^2 - \pi} + \frac{\sin n}{n}, n > 0.$

c. $u_n = (2n^2 - n \cos^2 n) \left(-4 + \frac{2}{n!} \right), n \geq 0.$

5. Limite d'une suite géométrique

Activité 1

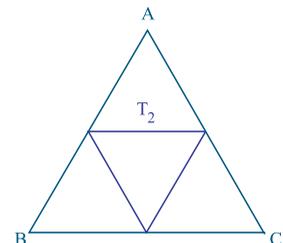
Dans la figure ci-contre ABC est un triangle équilatéral de côté 1.

On considère un second triangle équilatéral T_2 en reliant les milieux des côtés du premier triangle.

On répète le procédé indéfiniment pour obtenir à chaque étape n , un triangle équilatéral T_n .

On désigne par p_n le périmètre de T_n et par a_n son aire.

1. Calculer p_2, p_3, p_4, p_5 et a_2, a_3, a_4, a_5 .
2. Quelle est la nature de chacune des suites (p_n) et (a_n) ?
3. Donner les expressions de p_n et a_n en fonction de n .
4. Etudier les variations des suites (p_n) et (a_n) .
5. Donner une valeur approchée de p_{100} et a_{100} à 10^{-6} près.



Activité 2

On admet que le taux de croissance annuel de la population mondiale est d'environ 2%.

1. Sachant que la population mondiale P_0 en 2000 était de 6.2 milliards, à combien s'élèvera-t-elle en 2100, 2200 ?
2. Si la surface habitable de la terre est d'environ 20×10^6 hectares, quelle sera la densité de la population mondiale en 2200 ?
3. Déterminer la population mondiale P_n , n années après l'an 2000.
4. a. A partir de quelle année la population mondiale dépassera-t-elle 10 milliards ?
b. A partir de quelle année la population mondiale dépassera-t-elle 100 milliards ?
c. A partir de quelle année la population mondiale dépassera-t-elle un billion ?

Activité 3

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $n \geq 0$.

a. Représenter dans un repère les points $A_n(n, u_n)$ pour $0 \leq n \leq 4$.

b. Utiliser la calculatrice pour déterminer l'entier N tel que pour tout $n \geq N$, $\left|-\frac{1}{2}\right|^n \leq 10^{-3}$.

c. Utiliser la calculatrice pour déterminer l'entier N tel que pour tout $n \geq N$, $\left|-\frac{1}{2}\right|^n \leq 10^{-5}$.

d. Utiliser la calculatrice pour déterminer l'entier N tel que pour tout $n \geq N$, $\left|-\frac{1}{2}\right|^n \leq 10^{-8}$.

2. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = (-1)^n$, $n \geq 0$.

a. Représenter dans un repère les points $B_n(n, v_n)$ pour $0 \leq n \leq 20$.

b. La suite (v_n) est-elle convergente ?

3. Soit la suite (w_n) définie par $w_n = (-2)^n$, $n \geq 0$.

a. Représenter dans un repère les points $C_n(n, w_n)$ pour $0 \leq n \leq 8$.

b. La suite (w_n) est-elle convergente ?

Activité 4

1. Soit a un réel positif. Montrer que pour tout entier n , $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

2. Soit $q > 1$ et (u_n) la suite définie par $u_n = q^n$, $n \geq 0$.

En écrivant $q = 1 + (q - 1)$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3. Soit $|q| < 1$ et (u_n) la suite définie par $u_n = q^n$, $n \geq 0$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (On distinguera les cas $q = 0$ et $q \neq 0$.)

Théorème

Soit (u_n) une suite géométrique définie par $u_n = q^n, n \geq 0$.

- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $|q| < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Si $q \leq -1$ alors la suite (u_n) est divergente.

Activité 5

Etudier la limite de chacune des suites suivantes

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n, n \geq 0 \quad ; \quad v_n = \left(-\frac{3}{\sqrt{6}}\right)^n, n \geq 0 \quad ; \quad w_n = (\sqrt{2})^n, n \geq 0 \quad ;$$

$$t_n = 5(\sqrt{3})^n, n \geq 0 \quad ; \quad s_n = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n, n \geq 0 \quad ; \quad r_n = -10\left(-\frac{11}{9}\right)^n, n \geq 0.$$

Activité 6

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 3$ par $u_n = \frac{n^3}{3^n}$.

1. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n .
2. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{64}{81}$, pour tout entier $n \geq 3$.
3. En déduire que $u_{n+1} \leq \left(\frac{64}{81}\right)^{n-2}$.
4. Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Activité 7

1. On considère la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ définie de la manière suivante :

$$a_1 = 0.3 \quad ; \quad a_2 = 0.33 \quad ; \quad a_n = 0.\underbrace{3\dots 33}_n, n \geq 1$$

En écrivant $a_n = 0.\underbrace{3\dots 33}_n = 3(10^{-1} + 10^{-2} + \dots + 10^{-n})$, montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ converge vers un nombre rationnel que l'on déterminera.

2. On considère le nombre rationnel $\frac{9}{11}$.

a. Donner une valeur approchée de $\frac{9}{11}$ à 10^{-2} près, 10^{-4} près, 10^{-6} près, 10^{-12} près.

b. On considère la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ définie de la manière suivante :

$$a_1 = 0,81 \quad ; \quad a_2 = 0,8181 \quad ; \quad a_n = \quad ; \quad a_n = 0.\underbrace{8181\dots 81}_{2n} \quad ; \quad n \geq 1.$$

Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\frac{9}{11}$.

3. Utiliser un procédé analogue pour trouver une suite de nombres décimaux convergente vers $\frac{50}{111}$.

Activité 8

Une équipe médicale teste sur cent individus, tous fumeurs, un protocole pour les amener à cesser de fumer.

A la fin de chaque jour, l'équipe comptabilise le nombre de personnes qui ont fumé.

Ils ont constaté l'évolution suivante :

30% des personnes qui fument un jour ne fument pas le lendemain et 10% des personnes qui ne fument pas un jour fument le lendemain.

On désigne par P_n le nombre de personnes qui fument le $n^{\text{ième}}$ jour.

1. Calculer P_1 , P_2 et P_3 .
2. Montrer que la suite (P_n) vérifie la relation de récurrence

$$\begin{cases} P_1 = 100 \\ P_{n+1} = 0.6 P_n + 10 . \end{cases}$$

3. Déterminer le réel α tel que $\alpha = 0.6\alpha + 10$.
4. On désigne par (g_n) la suite définie par $g_n = P_n - 25$, $n \geq 1$.
 - a. Montrer que (g_n) est une suite géométrique.
 - b. En déduire l'expression de P_n en fonction de n .
 - c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$. Interpréter ce résultat.

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Si (v_n) est la suite définie par $v_n = \left(-\frac{3}{\sqrt{600000}}\right)^n$, $n \geq 0$ alors (v_n)

est convergente tend vers $-\infty$ n'a pas de limite.

2. Si (v_n) est une suite arithmétique de raison positive, alors (v_n)

est convergente tend vers $+\infty$ n'a pas de limite.

3. Si (v_n) est la suite définie par $v_n = \frac{n^n}{2n}$, $n \geq 1$ alors (v_n)

tend vers 0.5 tend vers 0 tend vers $+\infty$.

4. Si (v_n) est la suite définie par $v_n = \cos(n^2\pi)$, $n \geq 1$ alors (v_n)

est convergente est bornée tend vers $+\infty$.

5. Si (v_n) est la suite définie par $v_n = \frac{\tan(n^2\pi)}{2n}$, $n \geq 1$ alors (v_n)

est constante tend vers $+\infty$ tend vers 0.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

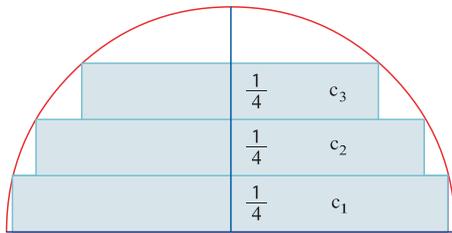
1. Si une suite est bornée alors elle est convergente.
2. Si une suite n'est pas convergente, alors elle tend vers l'infini.
3. Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle est positive à partir d'un certain rang.
4. Si une suite est strictement positive et convergente, alors sa limite est non nulle.
5. Si une suite est convergente, alors son inverse est convergente.

Mobiliser ses compétences

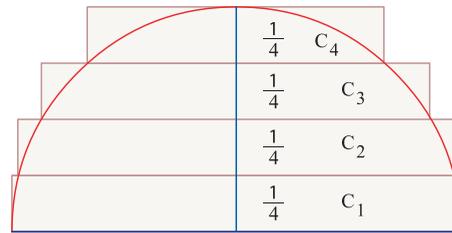
Situation 1

On se propose de donner un encadrement du volume d'une boule de rayon 1. Pour cela on va encadrer le volume de la demi-boule par les volumes respectifs de deux empilements de cylindres de même hauteur.

1. Dans cette question on suppose que tous les cylindres ont la même hauteur $\frac{1}{4}$.



Empilement de cylindres contenu dans la demi-boule



Empilement de cylindres contenant la demi-boule

- Déterminer les rayons des cylindres C_1, C_2, C_3, C_4 et c_1, c_2, c_3 .
 - Déterminer le volume de chacun de ces cylindres.
 - Calculer les volumes des empilements S_4 et s_4 .
 - En déduire un encadrement du volume de la boule.
2. Soit un entier $n \geq 5$. On généralise le procédé en considérant des empilements S_n et s_n par des cylindres de même hauteur $\frac{1}{n}$ tels que S_n contient la demi-boule et s_n est contenu dans la demi-boule.
- Déterminer les rayons des cylindres C_1, C_2, \dots, C_n de S_n .
En déduire le volume V_n de S_n en fonction de n .
 - Déterminer les rayons des cylindres c_1, c_2, \dots, c_{n-1} de s_n .
En déduire le volume v_n de s_n en fonction de n .
 - En déduire un encadrement du volume de la boule.
3. a. Etablir que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- En déduire que $v_n = \frac{\pi n(n-1)(4n+1)}{6n^3}$ et que $V_n = \frac{\pi n(n+1)(4n-1)}{6n^3}$.
 - Calculer les limites des suites (V_n) et (v_n) .
Que remarque-t-on ? Que peut-on conjecturer sur le volume de la boule ?

Exercices et problèmes

Exercice 1

Déterminer dans chacun des cas suivants $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

- $u_n = -\pi n + 1, n \geq 0$.
- $u_n = \frac{2n-1}{n+3}, n \geq 0$.
- $u_n = \frac{-3n+1}{2n-4}, n \geq 3$.
- $u_n = -3n^2 + 5n, n \geq 0$.
- $u_n = -2 + \sqrt{3n}, n \geq 0$.
- $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = -\frac{2}{\pi} u_n, n \geq 0. \end{cases}$
- $u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n + 3^n, n \geq 0$.
- $u_n = \frac{n^3}{(-0.3)^n}, n \geq 0$.

Exercice 2

Déterminer dans chacun des cas suivants $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

- $u_n = \frac{1}{n+3} \cos(n), n \geq 0$.
- $u_n = \frac{\sin(n^2)}{\sqrt{n^4+1}}, n \geq 0$.
- $u_n = \sqrt{4n^2+1} - n, n \geq 0$.
- $u_n = \frac{19^n + 2}{5^n - 17}, n \geq 0$.

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$.

- Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et calculer sa limite.
- On pose pour tout $n \geq 1, a_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
 - Exprimer a_n en fonction de n .
 - Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Exercice 4

- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2^n - n, n \geq 0$.
 - Montrer que (u_n) est croissante.
 - En déduire que $2^n \geq n + 1, n \geq 0$.
- Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 2^n - \frac{1}{2}n, n \geq 0$.
Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$.

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \left(\frac{n}{10} - 1\right)^n, n \geq 0.$$

- Calculer les onze premiers termes de la suite (u_n) . Quelle conjecture peut-on formuler quant à la convergence (u_n) ?
- Montrer que pour tout $n > 100, u_n > 9^n$.
- En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{5^n + 2^n}{5^n - 2^n}, n \geq 1.$$

- Montrer que (u_n) est décroissante et minorée par 1.
- Montrer que la limite de (u_n) est égale à 1.
- Déterminer un entier k tel que pour tout $n > k, u_n < 1.0001$.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = -1, \\ u_{n+1} = 5u_n + 3, n \geq 0. \end{cases}$$

- Déterminer le réel α tel que $\alpha = 5\alpha + 3$.
- On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha, n \geq 0$.
 - Montrer que (v_n) est géométrique.
 - Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
 - En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Exercice 8

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = -0.2u_n + 1, n \geq 0. \end{cases}$$

- Déterminer le réel α tel que $\alpha = -0.2\alpha + 1$.
- On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha, n \geq 0$.
 - Montrer que (v_n) est géométrique.
 - Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
 - En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Exercice 9

On considère une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ positive et la suite

$(v_n)_{n \geq 0}$ définie par $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$, $n \geq 0$.

1. Montrer que $0 \leq v_n \leq 1$, pour tout $n \geq 0$.
2. Montrer que (u_n) est croissante, si et seulement si, (v_n) est croissante.
3. Montrer que si (u_n) est convergente alors (v_n) est convergente.
4. Si (v_n) est convergente a-t-on que (u_n) est convergente ?

Exercice 10

On considère deux suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par $u_n = n^2(0.8)^n$ et $v_n = (0.9)^n$.

On pose $a_n = \frac{u_n}{v_n}$.

1. Calculer $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ et montrer que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$, $n \geq 17$.
2. En déduire qu'il existe un réel c tel que pour tout $n \geq 17$, $0 \leq u_n \leq c(0.9)^n$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 11

1. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier naturel n , on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.

2. On considère la suite (a_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $a_n = \frac{n!}{n^n}$.

En utilisant la question 1, montrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 2$.

3. En déduire que (a_n) est décroissante.
4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} \leq a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
5. En déduire la limite de (a_n) .

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \sqrt{n^2+4n} - n - 2, \quad n \geq 0.$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$,

$$u_n = \frac{4}{\sqrt{n^2+4n}+n+2}.$$

2. En déduire la limite de (u_n) .

Exercice 13

1. Montrer que pour tout entier non nul n ,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

2. On considère la suite (S_n) définie par

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1.$$

- a. Déterminer une valeur approchée à 0.001 près des cinq premiers termes de (S_n) .
- b. Utiliser la question 1, pour montrer que $S_n \geq 2(\sqrt{n+1} - 1)$, $n \geq 1$.
- c. En déduire la limite de (S_n) .

Exercice 14

Pour étudier un marché on le divise en périodes.

La demande, l'offre et le prix d'un certain produit sont mesurés par les indices respectifs D , O et P

(d_n , o_n et p_n sont les valeurs respectives de ces indices durant la $n^{\text{ème}}$ période).

Les trois indices D , O et P sont définis par les relations

$$\begin{cases} o_n = 0.5 p_n + 50, \\ d_n = -0.3 p_n + 162, \\ p_n = 1.05 p_{n-1} + 0.5(d_n - o_n). \end{cases}$$

On suppose que $p_0 = 100$.

1. Calculer o_0 et d_0 puis o_1 , d_1 , p_1 , o_2 , d_2 et p_2 .
2. Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $p_n = \frac{3}{4} p_{n-1} + 40$.
3. Calculer p_3 , p_4 , ..., p_{10} puis représenter dans un repère les points $A_i(i, p_i)$, $0 \leq i \leq 10$.

Quelle conjecture peut-on formuler quant à la limite de (u_n) ?

4. a. Déterminer le réel α tel que $\alpha = \frac{3}{4} \alpha + 40$.

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = p_n - \alpha, \quad n \geq 0.$$

- b. Montrer que (u_n) est géométrique.
- c. Exprimer u_n puis p_n en fonction de n .
- d. En déduire que la suite (p_n) converge vers α . La valeur limite α est appelée prix d'équilibre de la denrée étudiée.
- e. Calculer les valeurs des indices O et D correspondant à ce prix d'équilibre.

Exercice 15

Soit une droite \mathcal{D} munie d'un repère (O, \vec{i}) .

On donne les points A_0 et A_1 d'abscisses respectives 0 et 1 et pour tout $n \geq 0$, on note A_{n+2} le milieu du segment $[A_n A_{n+1}]$.

On désigne par a_n l'abscisse du point A_n .

Le but de cet exercice est de voir, si les points A_n se rapprochent d'un même point, lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes.

1. Placer les points A_n , pour tout $n \leq 5$, puis déterminer leurs abscisses.

On pose pour tout $n \geq 1$, $x_n = a_n - a_{n-1}$.

2. Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_n$.

3. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est géométrique.

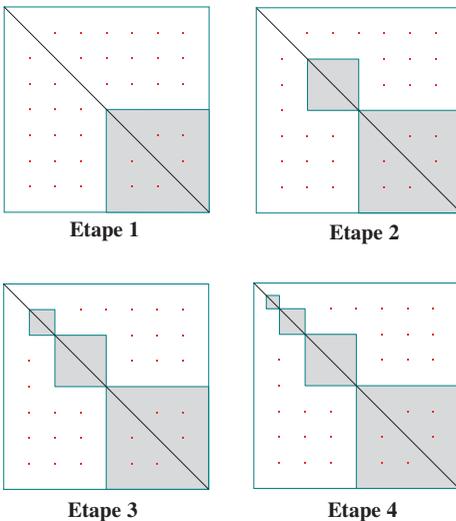
4. En déduire a_n en fonction de n .

5. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

6. Conclure.

Exercice 16

A l'intérieur d'un carré de côté 1, on effectue le coloriage schématisé ci-dessous.



On désigne par u_n l'aire du domaine colorié après le coloriage du $n^{\text{ème}}$ carré.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n) .

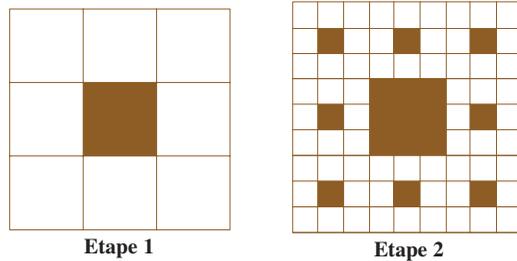
2. Exprimer u_n en fonction de n .

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 17 (Le tamis de Sierpinski)

A l'intérieur d'un carré de côté 1, on effectue le coloriage suivant :

On divise un carré de côté 1 en neuf carrés égaux et on colorie le carré central, puis on divise chacun des huit carrés non coloriés en neuf carrés égaux et on colorie les carrés centraux et ainsi de suite. (Voir le schéma ci-dessous).



On désigne par u_n l'aire du domaine colorié après la $n^{\text{ème}}$ étape.

1. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n) .

2. Montrer que $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{9}(1 - u_n)$.

3. On pose pour tout $n \geq 1$, $v_n = u_n - 1$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

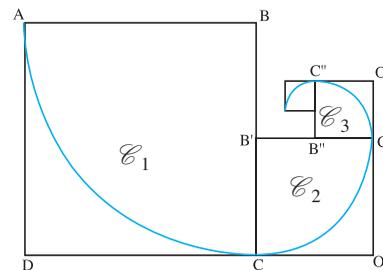
b. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

c. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 18

On considère un carré ABCD de côté 1 et le quart de cercle \mathcal{E}_1 de centre B et d'extrémités A et C.

On désigne par B' le milieu de [BC] et on construit le carré B'CO'C' et le quart de cercle \mathcal{E}_2 de centre B' et d'extrémités C et C', comme l'indique la figure ci-dessous.



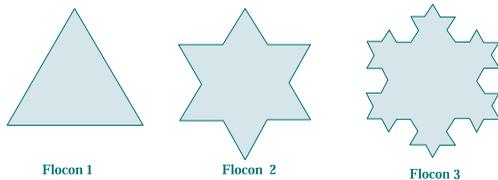
On réitère le procédé de façon à obtenir une spirale par réunion de quarts de cercles successifs.

Pour tout $n \geq 1$, on désigne par :

u_n la longueur du $n^{\text{ème}}$ quart de cercle \mathcal{C}_n construit,
 v_n la longueur de la spirale après la construction de \mathcal{C}_n ,
 a_n la somme des aires des n premiers carrés.

1. a. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n) .
- b. Exprimer u_n en fonction de n .
- c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
2. a. Exprimer v_n en fonction de n .
- b. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
3. a. Exprimer a_n en fonction de n .
- b. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Exercice 19 (Les flocons de Von Koch)

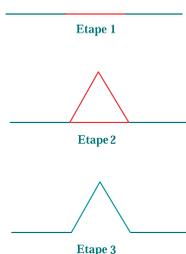


Dans la figure ci-dessus on a représenté les trois premiers flocons de Von Koch.

Les flocons de Von Koch s'obtiennent selon le procédé suivant :

Le flocon 1 est un triangle équilatéral de côté 1.

Pour passer d'un flocon n au flocon $(n+1)$, on partage chaque côté du flocon n en 3 segments isométriques et on substitue au segment central deux segments qui forment avec le segment supprimé un triangle équilatéral (voir schéma ci-dessous).



On note respectivement c_n , x_n , p_n et a_n , le nombre de côtés, la longueur d'un côté, le périmètre et l'aire du flocon n .

1. a. Montrer que la suite (c_n) est définie

$$\text{par } \begin{cases} c_1 = 1, \\ c_{n+1} = 4c_n. \end{cases}$$

- b. En déduire c_n en fonction de n .

2. Exprimer x_n en fonction de n .

3. a. Montrer que la suite (p_n) est une suite géométrique.

- b. Déterminer les variations de la suite (p_n) .

- c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

4. a. Calculer a_1 et a_2 .

- b. En remarquant que l'on construit le flocon $(n+1)$ en ajoutant sur chaque côté du flocon n un triangle équilatéral de côté x_{n+1} , établir que $a_{n+1} = a_n + \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

5. a. En déduire que pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(1 + \frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right).$$

- b. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Exercice 20

Soit n un entier naturel.

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

1. Montrer que $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$, $x \neq 1$.

2. a. Vérifier que f est dérivable pour tout réel x différent de 1.

- b. Calculer de deux façons différentes $f'(x)$, $x \neq 1$.

3. En déduire le calcul de la somme

$$S_n = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

4. On se propose de calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad n \geq 0.$$

- a. Montrer que $u_{n+1} \leq \frac{3}{4} u_n$, $n \geq 2$.

- b. En déduire que $u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} u_2$, $n \geq 2$.

- c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Avec l'ordinateur

Soit f la fonction définie sur $[-2, 2]$ par $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ et on désigne par \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{OI}, \vec{OJ}) . Soit \mathcal{D} le domaine délimité par la courbe \mathcal{C} et l'axe des abscisses. On choisit pour unité d'aire l'aire du carré OIKJ.

On se propose dans cette activité de déterminer l'aire \mathcal{A} du domaine \mathcal{D} .

On subdivise l'intervalle $[-2, 2]$ en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$, n étant un entier naturel non nul.

On définit les fonctions paires g et h suivantes :

Pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$ et sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ on a

$$g(x) = \sqrt{4 - \left(\frac{k}{n}\right)^2} \quad \text{et} \quad h(x) = \sqrt{4 - \left(\frac{k+1}{n}\right)^2}.$$

On note s_n la somme des aires des rectangles situés sous la courbe de g et S_n la somme des aires des rectangles situés sous la courbe de h .

a) Calculer s_n et S_n pour $n = 4$ et $n = 10$.

En déduire que $\frac{57}{200} \leq \mathcal{A} \leq \frac{77}{200}$.

b) Expliquer pourquoi, pour tout n , on a :

$$s_n \leq \mathcal{A} \leq S_n.$$

c) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$s_n = \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) \quad \text{et} \quad S_n = \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

A. Etude de la somme des carrés des entiers de 1 à n .

1°) On considère la suite u définie par $u_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. Représenter graphiquement cette suite pour n allant de 1 à 12.

2°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

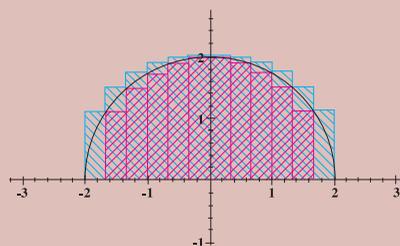
B. Etude des suites s_n et S_n .

1. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$s_n = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} \quad \text{et} \quad S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

2. A l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice graphique représenter les suites s_n et S_n dans un même repère, pour n allant de 1 à 100. Conjecturer la limite commune des suites s_n et S_n .

Quelle est la valeur de l'aire \mathcal{A} du domaine situé sous la courbe \mathcal{C} ?



Paradoxe de Zénon d'Elée

Achille et la tortue devaient faire la course sur un parcours circulaire ; et comme l'on savait qu'Achille pouvait courir dix mètres par seconde alors que la tortue ne court qu'un mètre par seconde, celle-ci se vit accorder une avance de cent mètres. Il n'y avait pas de ligne d'arrivée, la course devant se poursuivre jusqu'à ce qu'Achille ait, soit rattrapé la tortue, soit abandonné la course.

Or il est évident que lorsqu'il aurait effectué les cent premiers mètres, la tortue en aurait parcouru dix de plus ; et que lorsqu'il aurait parcouru ces dix mètres, elle en aurait parcouru un de plus ; et ainsi de suite indéfiniment.

Par conséquent, le nombre de secondes qui s'écoulent avant qu'Achille ne rattrape la tortue est :

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

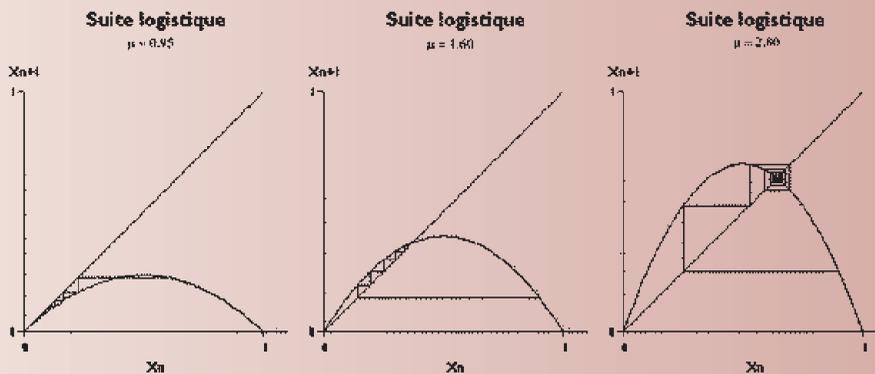
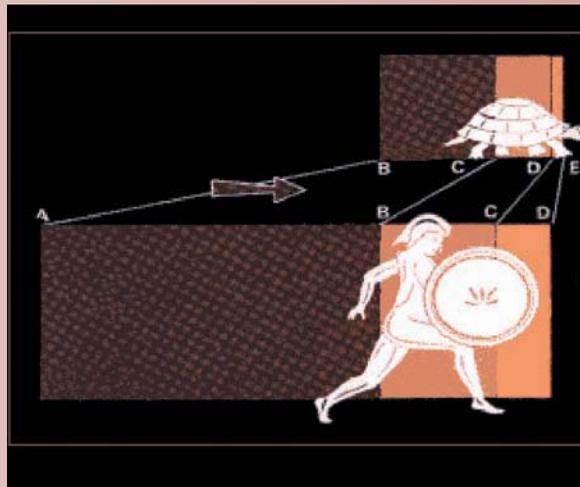
On obtient une somme comportant une infinité de termes. Ce que Zenon d'Elée n'avait pas prévu, c'est que cette somme infinie possède une valeur finie.

Le **modèle logistique** fut introduit à la base en tant que modèle démographique.

On considère l'évolution de la population d'une espèce, en présence de facteurs limitants (prédateurs, famine...), en considérant que l'espèce se reproduit à un taux proportionnel à la population et elle décroît à un taux proportionnel à la différence entre une capacité limite de l'environnement et la population.

Mathématiquement, cela peut se traduire par $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$.

où μ est un réel positif, représentant le taux combiné de reproduction et de famine.



Statistiques

Chapitre 11

" Il n'y a pas de place durable dans le monde pour les mathématiques laides. "

Hardy

L'information chiffrée sert à expliquer des phénomènes, à prendre des décisions et à faire des projections.

Les données numériques sont soit discrètes, soit continues.

Dans le cas où les données sont discrètes, le nombre de fois où l'on retrouve la même valeur s'appelle effectif de cette valeur. Si cet effectif est exprimé en pourcentage, on parle de fréquence de cette valeur.

Dans le cas où les données sont continues, on les répartit en classes de même amplitude ou d'amplitudes différentes, on prend le centre des classes et on procède comme dans le cas des données discrètes.

Pour analyser les données dont on dispose :

- On représente graphiquement les données à l'aide d'un histogramme, d'un diagramme en boîte, d'un diagramme en bâtons, d'un diagramme circulaire, d'un polygone des effectifs ou des fréquences etc.
- On cherche à déterminer les valeurs centrales (ou paramètres de position) de la série (mode, moyenne, médiane, quartiles).
- On cherche à déterminer les paramètres de dispersion qui indiquent la tendance qu'ont les valeurs de la distribution d'un caractère à se disperser, ou à se regrouper de part et d'autre d'une valeur centrale.

A chaque valeur centrale, on peut associer des paramètres de dispersion.

Le tableau ci-dessous décrit la relation entre paramètres de position et paramètres de dispersion.

Paramètre de position	Paramètre de dispersion
Mode, classe modale.	Etendue
Médiane, quartiles.	Ecart interquartile
Moyenne.	Ecart-type, variance.

1. Médiane et quartiles

1.1. Définition

Activité 1

On a recueilli dans le tableau ci-dessous les températures minimales (en °C) relevées en l'année 2000 dans plusieurs villes tunisiennes.

3.5	1.9	1.0	0.7	0.8	0.8	0.6	2.5	1.2	4.3	4.5	3.6	5.5
1.1	0.8	1.4	5.8	1.7	0.1	3.3	2.6	1.5	2.4	1.0	0.1	1.1

- Ranger les valeurs de la série dans l'ordre croissant
- Déterminer la médiane, le premier quartile Q_1 le troisième quartile Q_3 .
 - En déduire $Q_3 - Q_1$.
- Représenter le diagramme en boîte de la série puis l'interpréter.

Soit X une série statistique de valeurs (x_1, \dots, x_N) rangées dans l'ordre croissant.

Le réel $x_{\left[\frac{N}{4}\right]+1}$ (où $\left[\frac{N}{4}\right]$ est la partie entière de $\frac{N}{4}$) est dit premier quartile de X .

Le réel $x_{\left[\frac{N}{2}\right]+1}$ (où $\left[\frac{N}{2}\right]$ est la partie entière de $\frac{N}{2}$) est dit médiane de X .

Le réel $x_{\left[\frac{3N}{4}\right]+1}$ (où $\left[\frac{3N}{4}\right]$ est la partie entière de $\frac{3N}{4}$) est dit troisième quartile de X .

Soit X une série statistique de valeurs (x_1, \dots, x_N) rangées dans l'ordre croissant. Soit Q_1 le premier quartile et Q_3 le troisième quartile.

On appelle écart interquartile la différence $Q_3 - Q_1$.

Soit une série statistique X dont les valeurs sont rangées dans l'ordre croissant. La médiane de X est telle que au moins 50% des valeurs lui sont inférieures et au moins 50% des valeurs lui sont supérieures.

Le premier quartile de X est tel que au moins 25% des valeurs lui sont inférieures et au moins 75% des valeurs lui sont supérieures.

Le troisième quartile de X est tel que au moins 75% des valeurs lui sont inférieures et 25% des valeurs lui sont supérieures.

L'écart interquartile est l'étendue de la distribution sur laquelle se trouve concentrée la moitié des éléments dont les valeurs de X sont les moins différentes de la médiane. On exclut alors de la distribution les 25% des valeurs les plus faibles et les 25% des valeurs les plus élevées.

Le diagramme en boîte est un moyen de résumer une série statistique à l'aide de cinq valeurs : la valeur la plus faible, la valeur la plus élevée, le premier quartile, la médiane et le troisième quartile.

Activité 2

Dans le tableau ci-dessous, on a résumé le degré de motivation de 20 élèves à suivre une session de formation dans les technologies de l'information.

On a codé chacune des modalités de la manière suivante :

1 = très peu motivé, 2 = peu motivé, 3 = motivé et 4 = très motivé.

Modalités	Effectifs
1	5
2	7
3	6
4	2

1. Calculer la médiane, le premier quartile Q_1 , le troisième quartile Q_3 et l'écart interquartile de la série.
2. Représenter le diagramme en boîte de la série puis l'interpréter.

Activité 3

Les données ci-dessous représente l'âge de 59 patients d'une clinique.

Classe	21 - 27	28 - 34	35 - 41	42 - 48	49 - 55	56 - 62	63 - 69
Effectif	3	7	12	15	12	7	3

1. Représenter le polygone des fréquences cumulées croissantes.
2. En déduire la médiane, le premier et le troisième quartile.
3. Déterminer l'écart interquartile et l'interpréter.

Soit une série statistique X dont les valeurs sont groupées en classes.

L'abscisse du point de la courbe des fréquences cumulées croissantes d'ordonnée 0.5 est une valeur convenable de la médiane de X .

L'abscisse du point de la courbe des fréquences cumulées croissantes d'ordonnée 0.25 est une valeur convenable du premier quartile de X .

L'abscisse du point de la courbe des fréquences cumulées croissantes d'ordonnée 0.75 est une valeur convenable du troisième quartile de X .

1. 2 Propriétés de la médiane et des quartiles

Activité 1

Dans une entreprise, les salaires (en dinars) des employés sont résumés dans le tableau ci-dessous.

	Minimum	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Maximum
Salaires	350	400	430	600	1200

Le conseil d'administration décide d'augmenter tous les salaires de 2% et d'accorder une indemnité mensuelle de 20 dinars à chaque employé.

Calculer le salaire minimum, les quartiles Q_1 et Q_3 et la médiane correspondant à la nouvelle série de salaires. Que remarque-t-on ?

Soit X une série statistique de valeurs (x_1, \dots, x_N) rangées dans l'ordre croissant, de médiane m et de quartiles Q_1 et Q_3 . Soit a et b deux réels tels que $a > 0$ et Y la série statistique de valeurs $(ax_1 + b, \dots, ax_N + b)$.

Alors Y est de médiane $am + b$ et de quartiles $aQ_1 + b$ et $aQ_3 + b$.

1.3 Comparaison de deux séries statistiques

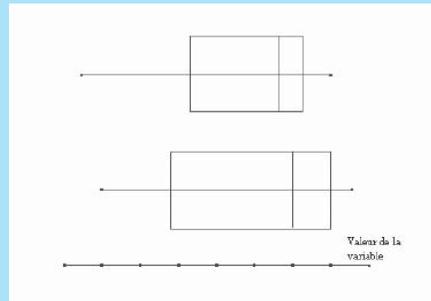
Activité 1

Un chercheur a effectué deux séries de mesures pour étudier le taux de caféine contenu dans différentes boissons.

Les mesures sont consignées dans les tableaux ci-dessous.

Série 1				Série 2			
0.04	1.09	2.1	1.9	0.06	3.32	2.9	3.06
2.9	0.059	0.06	1.87	3	2.3	0.9	3.3
2.81	2.23	3.1	5	1.11	1.88	1.05	3.21

Pour comparer deux séries statistiques, on représente le diagramme en boîte de chacune d'elles et on les lit à la même échelle.



1. Représenter le diagramme en boîte de chacune des séries.
2. En comparant la médiane et l'écart interquartile des deux séries, citer la série qui contient les boissons ayant constamment un taux plus élevé de caféine.

Activité 2

Les tableaux ci-dessous donnent les relevés pluviométriques en millimètre pour 25 stations tunisiennes pendant les années 2000 et 2001.

Année 2000				
741.1	436.4	345.5	476.3	454
335.1	311.0	390.6	425.9	490.0
261.4	1822	1422	1327	270.9
94.6	93.1	104.1	80.6	28.5
97.8	51.3	59.2	37.5	74.7

Année 2001				
928.3	489.2	416.1	402.8	403.1
320.2	304.2	324.8	325.1	401.8
316.8	113.1	258.8	231.7	200.2
220.3	107.9	86.5	107.1	27.7
74.7	58.0	25.5	43.0	81.0

1. Regrouper, pour chaque série, les données en classes d'amplitude 300.
2. Déterminer les centres des classes.
3. Représenter le polygone des fréquences cumulées croissantes.
4. Représenter les diagrammes en boîtes des deux séries et les interpréter.

Activité 3

Dans les tableaux ci-dessous, on a recueilli les poids (en kg) de pères et de leurs fils aînés âgés entre trois et quatre ans.

Série 1 : Poids des pères			
77	93	100	89
84	93	84	84
72	92	96	99
88	73	88	82
85	95	77	73
87	82	79	86
88	86	79	86
84	77	87	84

Série 2 : Poids des fils			
17.8	18.5	18.5	17.8
18.5	18.5	18	17.8
17.3	17.8	19.1	18.8
18.3	17.3	18.5	17.8
17.5	18.8	18	17.8
19.1	18.5	18	18.3
18	17.8	17.5	17.8
18	18	18.5	17.8

1. Représenter les diagrammes en boîte de chacune des séries.
2. On désigne par m_1 et e_1 (respectivement m_2 et e_2) la médiane et l'écart interquartile de la série 1 (respectivement de la série 2).
 - a. Calculer $\frac{e_1}{m_1}$ et $\frac{e_2}{m_2}$.
 - b. Comparer les dispersions des deux séries et interpréter le résultat obtenu.

L'écart interquartile relatif d'une série statistique à une variable quantitative est égal au quotient de l'écart interquartile par la médiane de la série. C'est un nombre sans unité qui peut être exprimé en pourcentage. On utilise l'écart interquartile relatif lorsqu'on veut comparer les dispersions autour de la médiane de deux séries statistiques dont les valeurs respectives ont des ordres de grandeur différents. Plus l'écart interquartile relatif est faible, plus la dispersion autour de la médiane est faible.

2. Moyenne et écart-type

2.1. Définition

Activité 1

On a mesuré au centième de millimètre le diamètre de 100 pièces prises au hasard dans la production d'une machine et on a regroupé les résultats dans le tableau ci-dessous.

Diamètre	60.56	60.57	60.58	60.59	60.60	60.61	60.62
Effectif	25	20	19	11	10	9	6

1. Déterminer la moyenne de cette série.
2. On désigne par σ l'écart-type de cette série. On admet qu'un réglage de la machine s'impose dès que $\sigma > 0.13$. Faut-il régler la machine ?

L'écart-type est une mesure de dispersion qu'on utilise pour mesurer la dispersion des valeurs d'une variable statistique à variable quantitative autour de la moyenne de cette série.

Soit X une série statistique de valeurs x_1, \dots, x_p d'effectifs respectifs n_1, \dots, n_p .
On désigne par N l'effectif total (c'est à dire $N = n_1 + n_2 + \dots + n_p$).

Le réel $\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i$ est la moyenne de la série.

Le réel $V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^p n_i x_i^2 - \bar{X}^2$ est la variance de la série.

Le réel $\sigma = \sqrt{V}$ est l'écart-type de la série.

Activité 1

Le tableau ci-dessous donne la répartition de 220 employés d'une entreprise en fonction de leur charge horaire durant une semaine.

fluorescence	Effectif
[15, 20[8
[20, 25[13
[25, 30[21
[30, 35[20
[35, 40[14
[40, 45[4

- Déterminer le centre des classes et représenter le polygone des effectifs de cette série.
- Calculer la moyenne et l'écart-type σ de la série.

2. 2 Propriétés de la moyenne et de l'écart-type

Activité 1

Dans une entreprise de production d'outils informatiques les prix de vente (en dinars) des articles sont résumés dans le tableau ci-dessous.

3.5	Minimum	Premier quartile	Médiane	Troisième quartile	Maximum
Prix de vente	28	89	173	212	310

Le conseil d'administration décide d'augmenter les prix de ventes de tous les articles de 2% et de majorer le prix final de 3 dinars pour tous les articles.

- Calculer le prix de vente moyen et l'écart type de la nouvelle série de prix de ventes.
- Que remarque-t-on ?

Soit X une série statistique de valeurs (x_1, \dots, x_N) de moyenne \bar{X} et d'écart-type σ .

Soit a et b deux réels et Y la série statistique de valeurs $(ax_1 + b, \dots, ax_N + b)$.

On désigne par \bar{Y} et σ' la moyenne et l'écart-type de Y . Alors

$\bar{Y} = a\bar{X} + b$ et $\sigma' = |a| \sigma$.

2. 3 Distribution normale

Activité 1

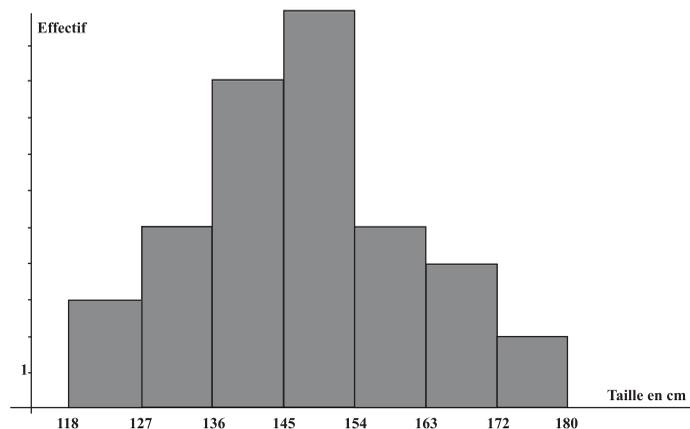
On a mesuré la fluorescence de la chlorophylle (en millivolts) dans un océan. Dans le tableau ci-dessous, on a regroupé en classes ces mesures de fluorescence.

Fluorescence	Effectif
[15, 20[8
[20, 25[13
[25, 30[21
[30, 35[20
[35, 40[14
[40, 45[4

1. Déterminer le centre des classes et représenter le polygone des effectifs de cette série.
2. Calculer la moyenne et l'écart-type σ de la série.
3. Déterminer le pourcentage de chlorophylle dont la fluorescence appartient à l'intervalle
a. $[\bar{X} - \sigma, \bar{X} + \sigma]$; b. $[\bar{X} - 2\sigma, \bar{X} + 2\sigma]$; c. $[\bar{X} - 3\sigma, \bar{X} + 3\sigma]$.

Activité 2

Dans la figure ci-dessous, on a représenté l'histogramme de la série des tailles (en cm) de 39 élèves.

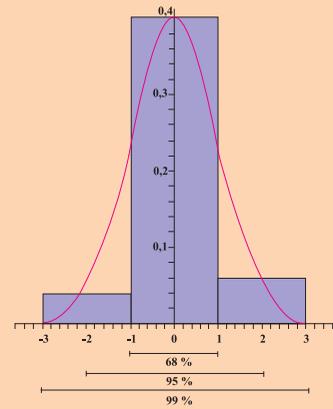


1. Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série.
2. Déterminer les intervalles centrés en \bar{X} , dans lesquels se situent 68%, 95% et 99% des élèves.

Soit X une série statistique de moyenne \bar{X} et d'écart-type σ .
On dit que X est une distribution normale ou gaussienne lorsque le polygone des effectifs est tel que environ

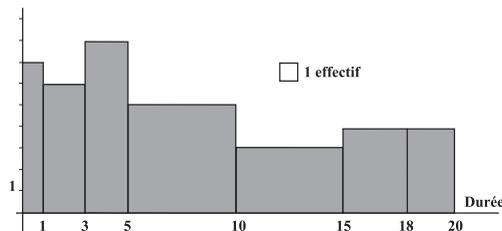
- 68% des effectifs sont situés dans l'intervalle $[\bar{X} - \sigma, \bar{X} + \sigma]$;
- 95% des effectifs sont situés dans l'intervalle $[\bar{X} - 2\sigma, \bar{X} + 2\sigma]$,
- 99% des effectifs sont situés dans l'intervalle $[\bar{X} - 3\sigma, \bar{X} + 3\sigma]$.

Dans ce cas, le polygone des effectifs a la forme d'une cloche symétrique par rapport à la moyenne.



Activité 3

L'histogramme ci-dessous donne la répartition des durées de 95 communications (en minute) d'un abonné, pendant un mois.



1. Faire apparaître, dans un tableau, les classes, les centres des classes, les effectifs et les fréquences de cette série.
2. a. Quelle est la durée moyenne des communications ?
b. Quelle est la durée la plus fréquente ?
3. Calculer l'écart-type σ de la série.
4. a. La distribution est-elle une distribution normale ?
b. Etait-il possible de répondre à la question précédente, à partir de l'histogramme de la série ?

Activité 4

Dans un lycée secondaire, la moyenne des QI de 1200 élèves est égale à 100 et l'écart-type 15.

Le QI est le quotient intellectuel, il est égal au quotient de l'âge mental par l'âge exact exprimé sous forme d'un pourcentage.

On suppose que la série des QI est une distribution normale.

1. Déterminer le pourcentage des élèves qui ont un QI compris entre 85 et 115.
2. Déterminer le pourcentage des élèves qui ont un QI compris entre 70 et 130.
3. Déterminer le pourcentage des élèves qui ont un QI compris entre 55 et 145.
4. Déterminer le pourcentage des élèves qui ont un QI inférieur à 55 ou un QI supérieur à 145.
5. Déterminer le pourcentage des élèves qui ont un QI inférieur à 145.

Activité 5

On a effectué des prélèvements sanguins sur un échantillon d'individus, en vue de mesurer les taux de cholestérol et de glycémie. On admet que les taux suivent une distribution normale.

- Sachant que pour le cholestérol, 95% des taux observés se trouvent entre 0.5 et 1.5 g/l.
 - Calculer la moyenne et l'écart-type de l'échantillon.
 - Dans quel intervalle se trouvent 99% des taux ?
- Sachant que pour la glycémie, la moyenne observée est de 0.97g/l et l'écart-type est de 0.09g/l.
 - Déterminer le pourcentage des individus dont le taux de glycémie est compris entre 0.88 et 1.06.
 - Déterminer le pourcentage des individus dont le taux de glycémie est compris entre 0.79 et 1.15.
 - Déterminer le pourcentage des individus dont le taux de glycémie est compris entre 0.7 et 1.24.

2. 4 Comparaison de deux séries statistiques

Activité 1

Le tableau ci-dessous représente la structure de la population tunisienne par tranches d'âge.

Tranche d'âge	0 - 4 ans	5 - 14 ans	15 - 59 ans	60-95 ans	Total
Année 1990	12.4	24.3	55.6	7.7	100
Année 2000	8.6	21.3	61.0	9.1	100

- Pour chacune des séries, donner la moyenne d'âge et l'écart-type.
- Comparer la dispersion des deux séries autour de la moyenne.
 - Commenter le résultat obtenu.
- Peut-on prévoir la structure de la population dans 10 ans ?

Soient X et Y deux séries statistiques dont les valeurs ont le même ordre de grandeur et d'écart-type respectifs σ et σ' . Plus l'écart-type est faible, plus la dispersion autour de la moyenne est faible.

Activité 2

Un scientifique compare deux échantillons de mesure d'un produit. Il obtient les résultats ci-dessous.

Echantillon A	4	6	8	10	12	14	16
Echantillon B	4	7	9	10	11	13	16

- Pour chaque échantillon, déterminer la moyenne et l'écart-type.
- Quel est l'échantillon qui présente les mesures les moins dispersées autour de la moyenne ?

Activité 3

Dans le tableau ci-dessous, on a représenté les temps de course de cinq athlètes sur deux parcours.

	1500 m	5000 m
Coureur 1	3'58''17	14'58''12
Coureur 2	4'05''48	14'47''08
Coureur 3	4'12''97	15'37''85
Coureur 4	4'08''29	13'57''70
Coureur 5	4'00''12	14'48''34

1. a. Pour chaque série, calculer le quotient de l'écart-type par la moyenne.
b. Laquelle des deux courses a les temps les plus dispersés autour de la moyenne ?
2. a. Calculer la médiane, le premier et le troisième quartile de chacune des deux séries.
b. Calculer les écarts interquartiles relatifs de chacune des deux séries.

Est-il possible d'utiliser ces résultats pour répondre à la question 1.b ?

Soit X une série statistique de moyenne \bar{X} et d'écart-type σ .

Le réel $\frac{\sigma}{\bar{X}}$ est dit écart-type relatif de X .

Il peut-être exprimé en pourcentage.

Pour comparer deux séries statistiques qui n'ont pas le même ordre de grandeur, on peut comparer leurs écarts-type relatifs respectifs. Plus l'écart-type relatif est faible, plus la dispersion autour de la moyenne est faible.

Activité 4

Le tableau ci-dessous, indique pour 8 années, le pourcentage de la population active occupée en Tunisie, dans deux secteurs d'activités.

	X : Agriculture et Pêche	Y : Industrie, Mines, Energie, Bâtiment et travaux public
1994	21.9	35.0
1997	22.0	34.0
1999	22.7	33.8
2000	22.1	33.2
2001	22.0	33.9
2002	21.0	33.9
2003	21.4	33.3
2004	16.3	34.3

Dans quel secteur d'activités, les pourcentages de la population active occupée sont-ils les moins dispersés autour de la moyenne, durant les 8 années ?

Activité 5

Un élève a obtenu 12 à son examen de mathématiques et il a obtenu 16 dans son examen d'histoire.

La moyenne des notes de la classe en mathématique est égale à 10 et l'écart-type σ_1 est égal 1.

La moyenne des notes de la classe en histoire est égale à 14 et l'écart-type σ_2 est égal à 2. Dans quelle matière l'élève est-il le mieux classé ?

Soit une série à variable statistique X de moyenne \bar{X} et d'écart-type σ .

L'écart d'une valeur x de la variable par rapport à la moyenne en unités d'écart-type est égale à $\frac{x - \bar{X}}{\sigma}$.

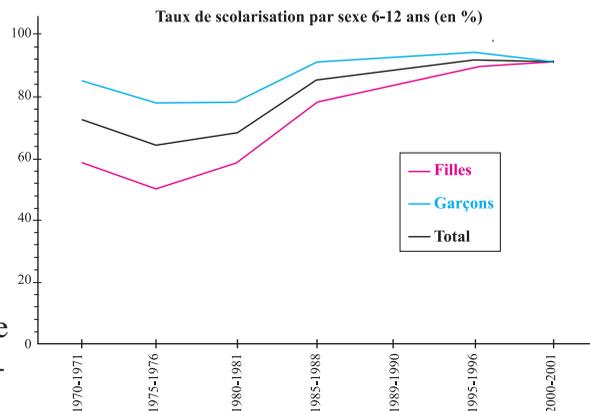
On l'utilise pour comparer la dispersion de deux valeurs prises par deux variables statistiques, par rapport à leurs moyennes respectives.

3. Comparaison de séries chronologiques

Activité 1

Dans le graphique ci-contre, les trois courbes représentent l'évolution du taux de scolarisation des enfants âgés de 6 à 12 ans de l'année scolaire 1970-1971 à l'année scolaire 2000-2001.

1. Pour chacune des trois courbes, déterminer les coefficients multiplicateurs arrondis au dixième qui permettent de passer de l'année scolaire 1980-1981 à l'année scolaire 1990-1991.
2. Pour chacune des trois courbes, déterminer les coefficients multiplicateurs arrondis au dixième qui permettent de passer de l'année scolaire 1990-1991 à l'année scolaire 2000-2001.
3. Peut-on prévoir l'évolution du taux de scolarisation des enfants âgés de 6 à 12 ans, dans dix années ?



Activité 2

Le tableau suivant indique les effectifs des élèves suivant leur orientation.

	Scientifiques	Techniques	Lettres	Economie-Gestion
1975-1976	7945	1264	3376	—
1980-1981	10552	2045	7101	—
1985-1986	21077	2755	16895	—
1990-1991	23261	2637	22458	—
1994-1995	20234	6642	14614	8028
1997-1998	29891	9338	18421	10105
1998-1999	33046	10425	19080	12030
2000-2001	33967	10874	17438	13859

1. Représenter dans un même graphique les courbes d'évolution des effectifs des élèves selon leur orientation dans les sections sciences, techniques et lettres (Indice 100 en 1975-1976).
2. a. En quelle année scolaire, y a-t-il eu une baisse de l'effectif des élèves orientés vers la section lettres ?
b. Durant cette même année, y a-t-il eu une baisse des effectifs des élèves orientés vers les sections mathématiques et sciences ? techniques ?
3. Pour chacune des trois courbes, déterminer les pourcentages d'augmentation des effectifs à partir de l'année scolaire 1994-1995 jusqu'à 2000-2001.
4. A partir de l'année scolaire 1994-1995, la section économie et gestion a été introduite.
a. Compléter le tableau suivant.

Année scolaire	1994-1995	1997-1998	1998-1999	2000-2001
Effectif des élèves de la section économie-gestion				
Coefficient multiplicateur arrondi au centième	1			
Indice	100			

- b. Quelles sont les sections les plus demandées à partir de l'année scolaire 1994 -1995 ?

Activité 3

Le tableau ci-dessous, donne le dosage de la quantité d'ADN (en unité arbitraire) contenue dans le noyau d'une cellule au cours de sa division.

Temps	0h	1h	1h45	1h50	3h	5h50	7h	9h	10h	12h	13h45	13h50	15h
Quantités d'ADN	8	8	8	4	4	4	5	7	8	8	8	4	4

1. Représenter la courbe d'évolution de la quantité d'ADN en fonction du temps.
2. Interpréter les variations des taux observés.

4. Série statistique à deux variables

4.1 Définition

Il arrive que l'on soit amené à effectuer deux séries de mesure sur un même échantillon et que l'on s'interroge sur les relations possibles entre ces mesures.

On dit alors que l'on a une série statistique à deux variables.

On dit qu'un couple (X, Y) de variables statistiques définit une série double si les deux variables X et Y sont observées simultanément sur une même population.

Dans le cas où X et Y sont quantitatives, la série double correspondante est l'ensemble des couples de valeurs numériques prises respectivement par X et Y .

Soit (X, Y) une série statistique double.

La distribution marginale de la variable X est la distribution des différentes valeurs prises par la variable X .

La distribution marginale de la variable Y est la distribution des différentes valeurs prises par la variable Y .

Activité 1

Une classe de 3^{ème} année secondaire contient 30 élèves. Dans le tableau ci-dessous on a relevé pour chacun des élèves ses moyennes en mathématiques au deuxième et troisième trimestre.

Elève	X : Moyenne au deuxième trimestre	Y : Moyenne au troisième trimestre
1	8.5	13.25
2	14.5	16.5
3	10.25	8.75
4	17.25	19.25
5	9.25	16.25
6	10	9.5
7	3.25	7.25
8	11.5	15.25
9	8.5	12.25
10	12.75	15.75
11	7.5	10.75
12	6.25	6.25
13	1	6.5
14	3	7.25
15	9	10.25
16	13.5	15
17	14.75	14.25
18	16.75	15.25
19	7.5	12
20	10.25	6.75
21	12.5	12
22	9.5	9.5
23	11	8.5
24	15.25	14
25	7	6
26	5	5.5
27	2.25	2
28	15.5	14
29	12	13.5
30	4.5	6.75

1. a. Calculer la moyenne \bar{X} et l'écart-type σ_X de la variable X.
 b. Calculer la moyenne \bar{Y} et l'écart-type σ_Y de la variable Y.
 c. Comparer la dispersion des moyennes des élèves dans les deux trimestres ?
2. a. Représenter, dans un repère orthogonal, les points M(X, Y).
 b. Placer dans ce repère le point G (\bar{X} , \bar{Y})
 c. Que peut-on dire de cette affirmation : « les points du nuage se répartissent sensiblement autour d'une droite passant par le point G. » ?

Le plan est muni d'un repère. Soit (X, Y) une série statistique double.

Le nuage de points représentant la série (X, Y) est l'ensemble des points $M(x, y)$ où (x, y) est un couple de valeurs numériques prises respectivement par X et Y .

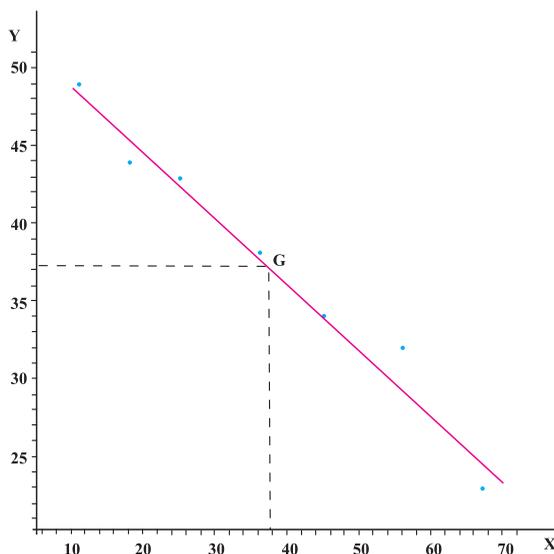
Si on désigne par \bar{X} et \bar{Y} les moyennes respectives des séries X et Y alors le point $G(\bar{X}, \bar{Y})$ est appelé point moyen du nuage de points.

Activité 2

La consommation maximale de dioxygène ($VO_2\max$) d'un individu dépend de l'effort qu'il fournit et de son âge.

On définit la série statistique double (X, Y) , où X est l'âge du sujet (en année) et Y est la quantité de $VO_2\max$ correspondante.

Dans le graphique ci-dessous, on a représenté le nuage de points de (X, Y) , le point moyen $G(\bar{X}, \bar{Y})$ ainsi que la droite D passant par G et d'équation $y = -0.42x + 52.9$.



La droite D est un ajustement affine du nuage de points de la série double (X, Y) .

Soit (X, Y) une série double et D un ajustement affine du nuage de points. Si x est une valeur donnée de la variable X alors l'ordonnée du point de D d'abscisse x est une estimation de la valeur de la variable Y correspondante.

Si y est une valeur donnée de la variable Y alors l'abscisse du point de D d'ordonnée y est une estimation de la valeur de la variable X correspondante.

1. Comment semblent se répartir les points du nuage autour de la droite D ?
2. Donner une estimation de la quantité de $VO_2\max$, d'un sujet âgé de 17 ans.
3. Donner une estimation de l'âge du sujet, au moment où la quantité de $VO_2\max$ est égale à $30 \text{ mL}\cdot\text{min}^{-1}\cdot\text{Kg}^{-1}$.

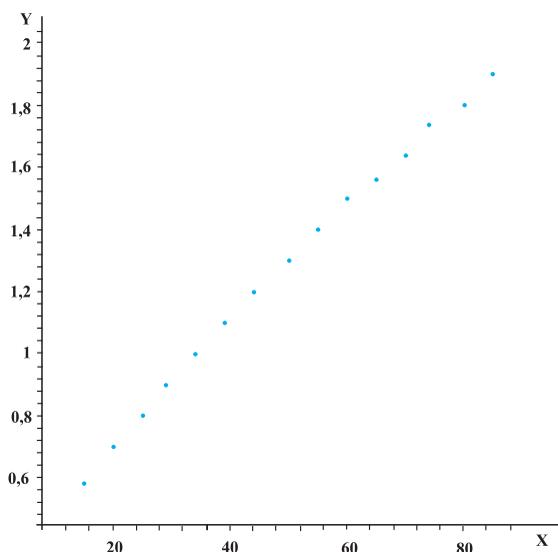
Activité 3

L'énergie dépensée par un sujet dépend de sa surface corporelle.

Dans le tableau ci-dessous, on a relevé le poids (en Kg) et la surface corporelle (en m^2) correspondante de 15 sujets.

	X : Masse	Y : Surface corporelle
1	15	0.58
2	20	0.7
3	25	0.8
4	29	0.9
5	34	1
6	39	1.1
7	44	1.2
8	50	1.3
9	55	1.4
10	60	1.5
11	65	1.56
12	70	1.64
13	74	1.74
14	80	1.8
15	85	1.9

1. a. Calculer la moyenne \bar{X} et l'écart-type σ_X de la variable X.
b. Calculer la moyenne \bar{Y} et l'écart-type σ_Y de la variable Y.
2. Dans le graphique ci-dessous, on a représenté le nuage de points de (X, Y).



- a. Placer le point G (\bar{X} , \bar{Y}).
- b. On scinde l'ensemble des 15 points du nuage en deux parties. La première partie (I) correspond aux sujets 1 à 8 et la deuxième partie (II) correspond aux sujets 9 à 15.
On désigne par G_1 et G_2 les points moyens respectifs de la partie (I) et de la partie (II).
Vérifier que G, G_1 et G_2 sont alignés et tracer la droite (G_1G_2).
- c. Comment semblent se répartir les points du nuage autour de la droite (G_1G_2).
3. Donner une estimation de la surface corporelle d'un sujet qui pèse 61 KG.

Soit (X, Y) une série statistique double et G son point moyen.

On scinde le nuage de point de (X, Y) en deux parties contenant à peu près le même nombre de points obtenant ainsi deux nuages de points. On désigne par G_1 et G_2 les points moyens de ces deux nuages.

La droite (G_1G_2) passe par le point G et définit un ajustement affine du nuage de points représentant la série statistique double (X, Y) .

Activité 4

On suppose que la quantité offerte sur le marché, exprimée en milliers d'unités, d'un produit fabriqué par une entreprise, est proportionnelle au prix unitaire exprimé en dinars.

1. a. Compléter le tableau suivant sachant que pour un prix de 2.5 dinars la quantité offerte sur le marché est 280000 unités.

X : Prix unitaire	2.15	2.26	2.40	2.57	2.63	2.75	2.82	2.90
Y : Quantité offerte								

- b. Déterminer un ajustement affine D du nuage de points de la série double (X, Y) .

2. Dans le tableau ci-dessous, on a recueilli le nombre d'unités demandées (en milliers d'unités) en fonction du prix unitaire exprimé en dinars.

X' : Prix unitaire	2.15	2.26	2.40	2.57	2.63	2.75	2.82	2.90
Y' : Quantité demandée	360	345	325	300	290	275	265	250

Déterminer un ajustement affine D' du nuage de points de la série double (X', Y') .

3. Déterminer graphiquement le prix d'équilibre, c'est à dire le prix pour lequel l'offre est égale à la demande.

Activité 5

Le tableau suivant donne l'effectif de la population scolaire de la 3^{ème} année de l'enseignement secondaire du mois d'octobre 1997 au mois d'octobre 2002.

X : Année	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Y : Population scolaire en 3^{ème} année	67755	74581	79266	76138	80123	90087

- Déterminer un ajustement affine du nuage de points de la série double (X, Y) .
- Donner une estimation de la population scolaire en 3^{ème} année secondaire au mois d'octobre 2010.

Activité 6

Le tableau ci-dessous, indique la répartition du nombre d'étudiants dans trois universités tunisiennes durant l'année universitaire 2002-2003.

X : Secteur de formation Y : Université	Sciences fondamentales	Lettres, arts, sciences humaines et islamiques	Sciences médicales et biologiques	Sciences juridiques, économiques et gestion	Sciences techniques
Tunis - El-Manar	10044	3814	6292	19752	3284
Université du centre	6335	17398	6378	15393	4814
Université du sud	10730	11191	2240	17540	5298

- Présenter à l'aide d'un tableau chacune des distributions marginales des variables X et Y.
- Représenter par un histogramme en bâtons la distribution marginale de la variable X.
 - Représenter par un diagramme circulaire la distribution marginale de la variable Y.
- Quel secteur de formation est le plus demandé ?
 - Quelle est l'université qui accueille le nombre le plus élevé d'étudiants ?

Activité 7

Dix personnes jouent à jeter simultanément 5 pièces de monnaie identiques. Chaque personne est libre de répéter autant de fois le jet et compte le nombre de " face " obtenu. Le tableau ci-dessous décrit le résultat final à l'issue de 1000 jets.

X : Numéro de la personne Y : Nombre de faces	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Totaux
0	4	3	5	3	4	3	5	4	4	3	38
1	15	12	17	14	15	13	16	15	14	13	144
2	34	29	39	32	35	34	38	37	34	30	342
3	29	24	32	27	29	29	32	31	28	26	287
4	16	15	18	16	17	16	18	18	16	14	164
5	3	2	3	2	3	2	3	3	2	2	25
Totaux	100	85	113	95	102	98	112	108	99	88	1000

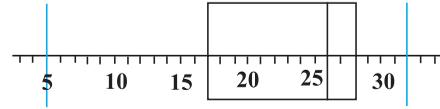
- Représenter le polygone des fréquences cumulées croissantes de la distribution marginale de la variable Y.
 - Quel est le pourcentage de jets pour lesquels il y a moins de deux faces ?
- Présenter par un tableau la distribution marginale de la variable X.
 - Calculer la moyenne \bar{X} et l'écart-type σ_X de la variable X.
- Représenter graphiquement le nuage des points de (X, Y) et son point moyen.
 - Est-il possible de donner un ajustement affine de (X, Y) ?

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Dans la figure ci-contre, on a représenté le diagramme en boîte d'une série à une variable statistique.



50% des valeurs de la variable statistique appartiennent à l'intervalle

- [17, 28] [5, 32] [17, 26] .

2. Soit une série statistique de valeurs (x_1, \dots, x_N) rangées dans l'ordre croissant, de médiane m_e et de quartiles Q_1 et Q_3 . Alors la série statistique $(2x_1+5, \dots, 2x_N+5)$ a respectivement pour médiane, premier quartile et deuxième quartile les nombres suivants :

- $2m_e+5, 2Q_1+5$ et $2Q_3+5$ $2m_e+5, 2Q_3+5$ et $2Q_1+5$ $2m_e+5, Q_1$ et Q_3 .

3. Soit une série statistique de valeurs (x_1, \dots, x_N) de moyenne m , et d'écart-type σ . Alors la série statistique $(-x_1+100, \dots, -x_N+100)$ a respectivement pour moyenne et pour écart type

- $-m +100$ et $-\sigma +100$ $m +100$ et $\sigma +100$ $-m +100$ et σ .

4. Dans une distribution gaussienne de moyenne 12.5 et d'écart-type 1, 68% des valeurs de la variable statistique appartiennent à l'intervalle

- [10.5, 14.5] [9.5, 12.5] [11.5, 13.5].

5. Soit (X, Y) une série statistique double dont les valeurs sont consignées dans le tableau ci-contre.

X	15	20	10	11
Y	5	5	4	2

Alors le point moyen de (X, Y) a pour coordonnées

- (20, 5) (14, 4) (21, 8).

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

- Il existe un réel tel que 50% des valeurs d'une variable statistique lui sont inférieures et 50% de ses valeurs lui sont supérieures.
- La médiane d'une série à une variable statistique ne change pas lorsqu'on change la valeur la plus faible ou la valeur la plus élevée de la variable statistique.
- Si X est une distribution gaussienne alors 50% des valeur de X sont inférieures à la moyenne.
- Si la droite D est un ajustement affine d'une série statistique double alors tout point du nuage de points de cette série appartient à D.
- Toute série statistique double possède au moins un ajustement affine.

Mobiliser ses compétences

Situation 1 : Variable centrée réduite

Soit X une série statistique à une variable de valeurs x_1, x_2, \dots, x_n , de moyenne \bar{X} et d'écart-type σ .

On désigne par Z la série statistique de valeurs z_1, z_2, \dots, z_n tels que $z_i = \frac{x_i - \bar{X}}{\sigma}$ où $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ (z_i est appelé variable centrée réduite en x_i).

Vérifier que la série statistique Z a pour moyenne 0 et pour écart-type 1.

Application 1

Les experts d'une entreprise ont partagé les personnes postulant pour le poste d'ingénieur en trois groupes. Chaque personne passe un test technique de recrutement.

Les moyennes des scores des groupes I, II et III sont respectivement égales à 82, 93 et 24.

Les écarts-type de la série des scores des groupes I, II et III sont respectivement égaux à 7, 2 et 9.

Trois personnes A, B et C faisant partie respectivement des groupes I, II et III, ont obtenu les scores suivants : 76, 89 et 21.

Laquelle de ces trois personnes est la plus performante dans son groupe ?

Application 2

On a regroupé le quotient intellectuel de 480 élèves d'un même lycée en classes de même amplitude.

Le tableau ci-dessous indique les centres des classes et les effectifs correspondants.

Centre de la classe	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	110	114	118	122	126
Effectif	4	9	16	28	45	66	85	72	54	38	27	18	11	5	2

- Calculer la moyenne \bar{X} et l'écart-type σ de cette série.
- Transformer les QI en unités centrées réduites en remplissant le tableau suivant.

Centre de la classe	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	110	114	118	122	126
Variable centrée réduite $z = \frac{x - \bar{X}}{\sigma}$															
Effectif	4	9	16	28	45	66	85	72	54	38	27	18	11	5	2

- Construire le polygone des effectifs en fonction de la variable centrée réduite.
- La distribution des QI est-elle une distribution normale ?

Exercices et problèmes

Exercice 1

Le tableau ci-dessous indique les moyennes générales, arrondies à l'unité, de deux classes de 3^{ème} année Sciences d'un même lycée.

Moyenne générale	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Effectifs 3S1	0	3	4	4	5	7	3	4	2	1	0	0
Effectifs 3S2	2	4	3	3	3	4	3	2	2	3	1	2

- a. Vérifier que la médiane de chacune des deux séries est égale à 10.
b. Déterminer le premier et le troisième quartile de chacune des deux séries.
- a. Représenter les diagrammes en boîtes des deux séries.
b. Que peut-on dire de cette affirmation : « les deux classes ont le même profil puisque dans les deux cas, la médiane est égale à 10. » ?

Exercice 2

On a recueilli dans le tableau ci-dessous 45 nombres aléatoires de 1 à 20.

1	2	5	7	9	11	13	15	18
1	3	5	8	9	11	14	15	19
1	4	5	8	10	12	14	16	19
1	4	6	8	10	12	14	16	19
2	5	6	9	11	12	14	17	20

- Représenter ces données, par un tableau statistique à deux lignes, où la première ligne indique le nombre aléatoire et la deuxième ligne indique l'effectif correspondant.
- Calculer la médiane, le premier et le troisième quartile de cette série.
- a. Représenter le diagramme en boîte de cette série.
b. Commenter les résultats obtenus.

Exercice 3

Le tableau ci-dessous indique l'évolution du nombre de médecins en Tunisie en quatorze ans.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Médecins	4425	4500	5099	5257	5344	5965	6177	6464	6819	7149	7444	7767	7964	8189

- Déterminer la médiane, le premier et le troisième quartile de cette série.
- Représenter le diagramme en boîte de cette série puis commenter le résultat obtenu.

Exercice 4

Les tableaux ci-dessous donnent les moyennes des températures (en °C) dans 25 stations tunisiennes pendant les années 2000 et 2001.

Année 2000				
20.4	20.2	21.4	21.5	19.7
21	16.6	20.7	20	20.4
21.9	22.1	21.5	22.7	19.6
19.7	21.3	20.4	20.6	23.2
21.6	22.2	21.1	23.3	23.6

Année 2001				
19.8	19.6	21.3	21.1	19.4
20.7	16.6	20.7	20.2	20.3
21.3	22.7	21.8	23.1	20.1
20.1	20.7	22.1	21.9	24.6
23.1	23.2	23	23.2	24.1

Représenter les diagrammes en boîtes des deux séries et commenter les résultats obtenus.

Exercice 5

Deux tireurs s'entraînent au tir à la cible. On a recueilli dans le tableau ci-dessous, leurs résultats en points, obtenus au bout de 30 tirs.

Points	50	30	20	10	0
Tireur A	8	9	8	4	1
Tireur B	6	16	3	3	2

- Calculer la moyenne et l'écart-type des deux séries.
- Comparer ces résultats. Lequel des deux tireurs est le plus régulier ?

Exercice 6

Quarante candidats passent un examen (noté de 0 à 20). La moyenne de la série des notes est égale à 9.5 et l'écart-type est égal à 2. Les examinateurs veulent effectuer un ajustement affine afin d'obtenir une moyenne de 10 et un écart-type de 3.

Notons $(x_i)_{1 \leq i \leq 40}$ les notes initiales de moyenne et $(y_i)_{1 \leq i \leq 40}$ les notes obtenus après l'ajustement affine.

On désigne par $f(x) = a x + b$, l'ajustement affine effectué.

Déterminer les valeurs de a et de b .

Exercice 7

Les élèves d'une classe ont été divisés en deux groupes pour passer un contrôle écrit sur un même sujet.

On a consigné les résultats dans les tableaux ci-dessous.

Groupe A							
Note	5	7	8	9	10	11	16
Effectif	1	2	1	3	2	3	1

Groupe B								
Note	6	7	9	10	11	13	14	16
Effectif	2	1	2	2	1	3	2	1

- Lequel des deux groupes a obtenu en moyenne de meilleurs résultats ?
- Comparer la dispersion des deux séries de notes.

Exercice 8

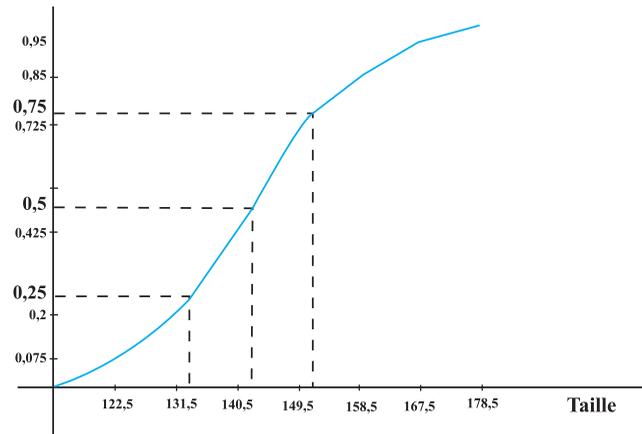
L'élève A a obtenu les dix notes suivantes : 10, 15, 16, 13, 8, 11, 12, 12, 13 et 15.

L'élève B a obtenu les dix notes suivantes : 11, 9, 9, 10, 15, 7, 12, 12, 14 et 13.

Quel est l'élève qui a obtenu les résultats les moins dispersés ?

Exercice 9

Dans le graphique ci-dessous, on a représenté le polygone des fréquences cumulées croissantes de la série des tailles (en cm) de 40 élèves d'une classe, rangées en classes d'amplitude 9 et tels que la valeur la plus faible observée est égale à 118.



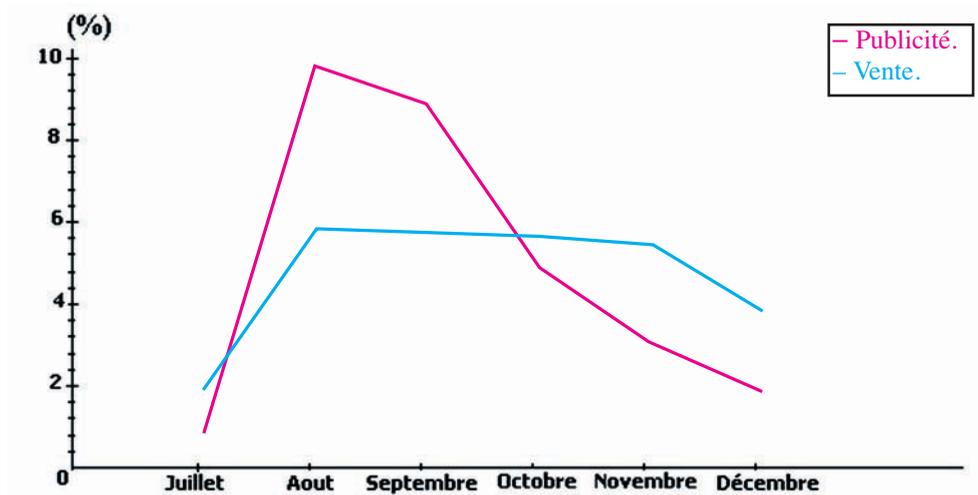
- Organiser les données de cette série en tableau, en précisant les classes et les effectifs correspondants.
- Déterminer la médiane, le premier et le troisième quartile de cette série.
 - Représenter le diagramme en boîte de cette série.
- Calculer la moyenne et l'écart-type de cette série.
- A-t-on une distribution normale ?

Exercice 10

Une entreprise qui fabrique des logiciels, lance sur le marché en juillet 2006 un nouveau logiciel. Elle accompagne le lancement du nouveau produit par une campagne publicitaire.

Après six mois, le département de marketing fait une étude pour juger de l'efficacité de la stratégie adoptée.

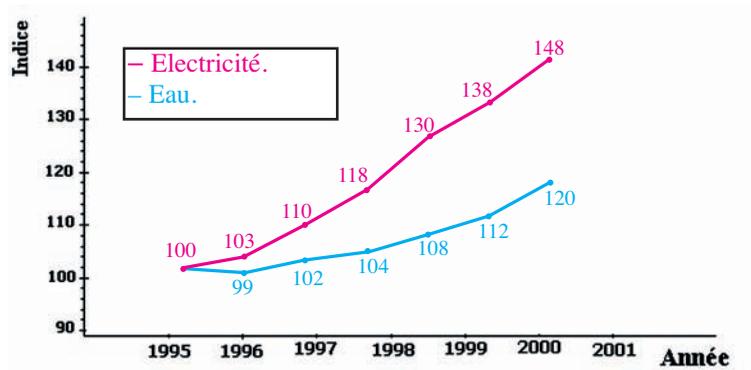
Le graphique ci-dessous représente la courbe des dépenses (en pourcentage du volume total des dépenses) consacrées à la promotion du logiciel et la courbe des ventes (en pourcentage du volume total des ventes).



- Comparer les variations des deux courbes.
- Est-ce qu'une augmentation du budget consacré à la publicité implique une augmentation du volume des ventes ?
- Expliquer la baisse du volume des ventes à partir de septembre.

Exercice 11

Le graphique ci-dessous décrit l'évolution de la production d'électricité (en 10^6 KWH) et l'évolution de la production d'eau (en 10^6 m³) en Tunisie entre les années 1995 et 2001.



1. Donner pour chacune des courbes, le coefficient multiplicateur qui permet de passer de 1995 à 2001.
2. On sait que la production d'eau en 2001 est égale à $373 \cdot 10^6$ m³.
Trouver la production d'eau en 2000.
3. On sait que la production d'électricité en 2001 est égale à $10853 \cdot 10^6$ KWH.
Trouver la production d'électricité en 2000.
4. Estimer les productions d'eau et d'électricité en 2010.

Exercice 12

Pour avoir une idée sur sa popularité, un directeur d'une grande entreprise effectue à la fin de chaque année un sondage auprès de ses employés.

Le résultat (en %) de l'année 1996 à l'année 2002 est représenté par le graphique ci-dessous.



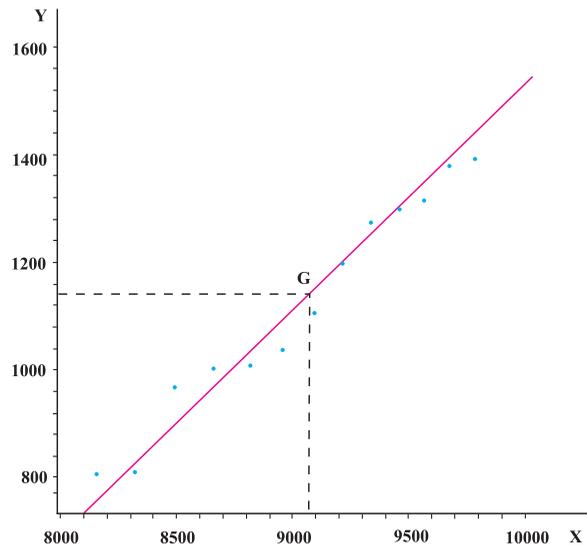
1. Pour chaque année additionner les pourcentages correspondants à la bonne et à la mauvaise popularité ?
A-t-on 100% chaque année ? Quelle explication peut-on donner ?
2. En quelle année la popularité de ce chef d'entreprise a-t-elle été la plus forte ?

Exercice 13

On a relevé durant 14 ans à partir de 1990, l'estimation de la population totale (en milliers) et le nombre de dentistes en Tunisie.

Dans le graphique ci-dessous, on a représenté les points $M(X, Y)$, où X désigne l'estimation de la population totale (en milliers) et Y le nombre de dentistes pour la même année, le point moyen $G(\bar{X}, \bar{Y})$ ainsi que la droite D passant par G et d'équation $y = 0.42x - 2665.5$.

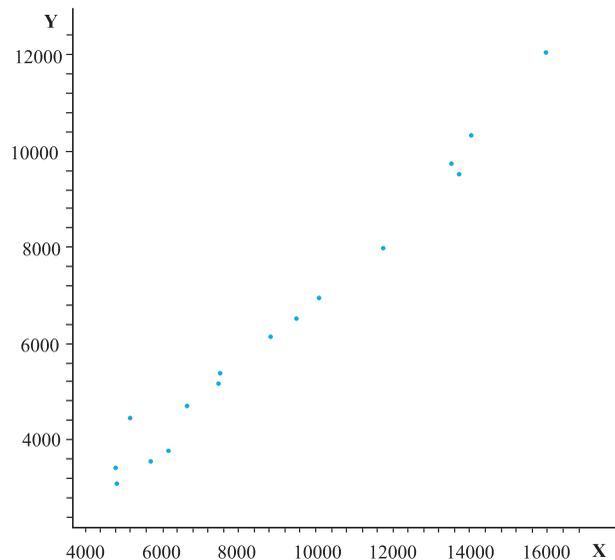
1. Comment semblent se répartir les points du nuage autour de la droite D ?
2. Donner une estimation du nombre de dentistes si la population atteint 9 millions d'habitants.
3. Donner une estimation de la population de sorte qu'il y ait au moins 1600 dentistes.



Exercice 14

On a relevé dans le tableau ci-dessous, le montant total (en million de dinars) du commerce extérieur en Tunisie (importations et exportations) depuis l'année 1990 jusqu'à l'année 2004.

	X : Importations	Y : Exportations
1990	4826.4	3087.4
1991	4788.9	3417.1
1992	5688.8	3549.7
1993	6172.1	3760
1994	6647.3	4696.6
1995	7464.3	5172.5
1996	7498.8	5372
1997	8793.5	6147.9
1998	9489.5	6518.3
1999	10070.5	6966.9
2000	11738	8004.8
2001	13697.3	9536.2
2002	13510.9	9748.6
2003	14038.9	10342.6
2004	15960.3	12054.9



1. a. Calculer la moyenne \bar{X} et l'écart-type σ_X de la variable X .
b. Calculer la moyenne \bar{Y} et l'écart-type σ_Y de la variable Y .
2. Comparer et commenter la dispersion des deux séries.
3. On a représenté ci-dessus, le nuage de points de la série double (X, Y) .
a. Placer le point $G(\bar{X}, \bar{Y})$.
b. Donner un ajustement affine de la série double (X, Y) .
c. Donner une estimation du montant des exportations si le montant de l'importation est égal à 17000 millions de dinars.

Exercice 15

On a relevé dans le tableau ci-dessous, l'âge et la tension artérielle maximale de 6 femmes.

X : Age	36	42	48	54	60	66
Y : Tension artérielle	11.8	14	12.6	15	15.5	15.1

1. Représenter le nuage de points de la série double (X, Y).
2. Donner un ajustement affine de la série double (X, Y).
3. Quelle tension maximale devrait avoir une femme de 25 ans ?

Exercice 16

On a relevé dans le tableau ci-dessous, les poids (en Kg) respectifs de 12 pères et de leurs fils aînés.

X : Poids du père	65	63	67	64	68	62	70	66	68	67	69	71
Y : Poids du fils	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

Quel poids devrait avoir le fils aîné d'un homme qui pèse 87 Kg ?

Exercice 17

On a relevé dans le tableau ci-dessous, l'intensité de travail (en Kilojoules par minute) et la fréquence cardiaque de 8 personnes.

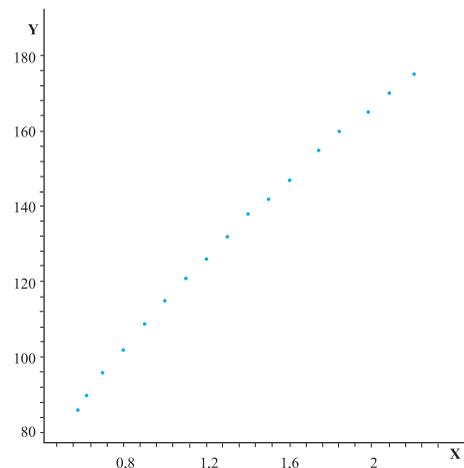
X : Intensité du travail	9.6	12.8	18.4	31.2	36.8	47.2	49.6	56.8
Y : Fréquence cardiaque	70	86	90	104	120	128	144	154

Quelle devrait être la fréquence cardiaque d'une personne dont l'intensité de travail est égale à 28.1 Kilojoules par minute ?

Exercice 18

On a représenté ci-dessous, le nuage de points de la série double (X, Y), où X est la surface corporelle (en m²) et Y est la taille (en cm) correspondante de 15 sujets.

Estimer la taille (en cm) que devrait avoir une personne dont la surface corporelle (en m²) est égale à 1.24.



Exercice 19

On a relevé dans le tableau ci-dessous l'évolution du chiffre d'affaire (en milliers de dinars) réalisé par une société à partir de 1995 jusqu'en 2004.

X : Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Y : Chiffre d'affaire	200	205	211	216	220	225	240	260	280	300

Utiliser deux méthodes pour estimer le chiffre d'affaire de cette société dans 10 ans.

Exercice 20

On a recueilli dans le tableau ci-dessous, le nombre de kilomètres parcourus avant la première grande panne et la puissance en chevaux fiscaux de 100 voitures.

X : Nombre de km \ Y : Puissance	Moins de 60	[60,100[[100,140[[140,180[[180,220[220 et plus
5	1	2	5	6	1	0
6	1	3	3	8	4	1
7	1	1	2	5	8	3
8	0	1	2	5	5	2
9	0	0	1	6	8	5
10 et plus	0	0	1	2	4	3

1. Représenter le nuage de points de la série double (X, Y).
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G.
3. Est-il possible de donner un ajustement affine de la série double (X, Y) ?
4. Présenter par un tableau chacune des distributions marginales des variables statistiques X et Y.
5. Etudier et commenter la dispersion de la série à variable statistique X.

Exercice 21

On a recueilli dans le tableau ci-dessous, le nombre de naissances suivant l'âge de la mère dans les 7 régions de la Tunisie, durant l'année 2001.

X : Classe d'âges \ Y : Région	[15,20[[20,25[[25,30[[30,35[[35,40[[40,45[[45,50[
District de Tunis	298	2983	6256	6505	3761	722	33
Nord-Est	523	4073	6191	5303	2721	493	61
Nord-Ouest	265	2492	4545	4124	2325	500	67
Centre-Ouest	657	4479	7645	6812	4605	1395	195
Centre-Est	1060	8437	12641	9858	5486	1132	194
Sud-Ouest	164	1436	2803	2843	1898	543	73
Sud-Est	245	2592	4718	4074	2536	720	67

1. Présenter par un tableau chacune des distributions marginales des variables X et Y.
2. a. Représenter la distribution marginale de la variable Y par un histogramme en bâtons.
b. Quelle région de la Tunisie présente le taux le plus élevé de naissances ?
3. a. Calculer la moyenne de la série à variable statistique X puis interpréter le résultat obtenu.
b. Représenter le polygone des effectifs de la série à variable statistique X.
c. La distribution de la variable X est-elle une distribution normale ?

Avec l'ordinateur

Le tableau ci-dessous présente le chiffre d'affaires d'un magasin en fonction des frais de publicité qu'il engage.

Frais de publicité (en dinars)	600	650	650	700	800	900	1000	1 100	1 100	1 150
Chiffre d'affaires (en dinars)	22 000	22 200	22 800	24 000	24 400	24 600	25 000	25 900	26 800	26 200

1. Saisie des données

Saisir les données de cette série statistique dans une feuille de calcul Excel

2. Tracé du nuage de points.

- Sélectionner l'ensemble du tableau en maintenant le bouton gauche de la souris enfoncé.

- Cliquer sur l'icône " Assistant graphique ".

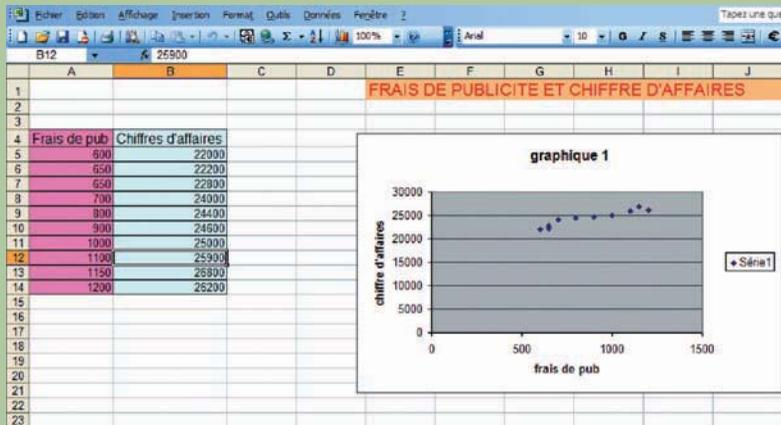
- Sélectionner " Nuage de points " et le type de graphique : " Points placés dans un repère " ; appuyer sur " Suivant ".

- Sélectionner " Titres " : taper le titre choisi " graphique 1 ".

- Sélectionner " Axe des abscisses " : taper " Frais de publicité ".

- Sélectionner " Axe des ordonnées " : taper " Chiffre d'affaires ".

- Sélectionner " Légende " : cliquer sur " Afficher la légende " ; cliquer sur " Suivant " ; puis " Afficher le graphique en tant qu'objet dans feuille 1 " ; cliquer sur " Fin ".



3. Point moyen de la série.

- Copier dans une nouvelle feuille, le tableau des données de la série.

- Surligner la colonne des " Frais de pub " puis sélectionner l'icône " Σ ".

- Recommencer l'opération pour la colonne " Chiffres d'affaires ".

- Calculer les moyennes de chaque colonne en taper en I5 " = C12 / 10 ".

- Recommencer les mêmes opérations en I7 " =D12/10 "

- En déduire les coordonnées du point moyen.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			Frais de pub	Chiffres d'affaires					
2			600	22000					
3			650	22200					
4			650	22800					
5			700	24000			Le frais moyen de publicité est	875	
6			800	24400					
7			900	24600			Le chiffre d'affaires moyen est	24390	
8			1000	25000					
9			1100	25900					
10			1150	26800					
11			1200	26200					
12			Totaux	8750	243900				
13									

4. Courbe de tendance.

- Faire un clic droit sur un point de la courbe.

- Choisir " Ajouter une courbe de tendance ".

- Choisir la droite. Choisir dans le menu Options : " Afficher une équation ". Valider.

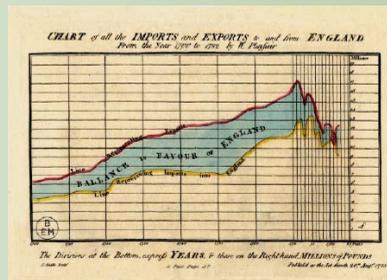
5. Exploitation de la courbe de tendance.

Les frais de publicité s'élevant à 1 300 dinars, déterminer le chiffre d'affaires de ce magasin.

Math – culture

A la fin du XVII^e siècle, on sent poindre une manière originale d'utiliser le calcul. John Graunt et William Petty en Angleterre, Witt en Hollande, créent une nouvelle science, qui est, comme l'écrit Diderot dans L'Encyclopédie, " celle dont les opérations ont pour but des recherches utiles à l'art de gouverner les peuples, telles que celles du nombre des hommes qui habitent un pays ; de la quantité de nourriture qu'il doivent consommer ; du travail qu'ils peuvent faire ; du temps qu'ils ont à vivre ; de la fertilité des terres ; de la fréquence des naufrages, etc. " .

Si cette conception présente quelques espoirs idéologiques, et une certaine aspiration à la perfection, cette science est de nos jours pratiquée selon une approche très objective, n'en faisant qu'un moyen d'estimer, selon une logique statistique, l'importance et l'influence de certains facteurs économiques sur la politique d'un Etat.



Probabilité

Chapitre 12

« Calculer la probabilité d'un événement n'a aucun sens une fois que l'on sait qu'il s'est produit. »

Jacquard

Pour commencer

Activité 1

Dans la plupart des calculatrices, il y a une touche Random.

Lorsqu'on appuie sur cette touche, il s'affiche un nombre appartenant à l'intervalle $[0, 1[$. Dans la plupart des cas, ce nombre s'affiche avec trois décimales. Chacun de ces nombres a la même chance d'apparaître. Cela permet d'obtenir chaque fois trois chiffres aléatoires.

Exemples :

Random = 0.268 donne 2, 6 et 8.

Random = 0.420 donne 4, 2 et 0.

Utiliser la calculatrice pour obtenir 50 chiffres aléatoires.

Activité 2

- On se propose de simuler 500 lancers d'une pièce de monnaie ;
 - utiliser la calculatrice pour obtenir 500 chiffres aléatoires,
 - noter P pour chaque chiffre pair obtenu et F pour chaque chiffre impair obtenu ,
 - organiser les résultats dans le tableau ci-dessous.

Issue	P	F
Fréquence		

Lorsqu'on tire au sort un nombre, ou qu'on lance une pièce de monnaie ou un dé, il est impossible de prévoir le résultat, car ce résultat est soumis au hasard. On dit alors que le résultat est aléatoire.

Les expériences telles que tirer au sort une question dans un examen, tirer au sort un nombre, lancer un dé non truqué ou une pièce de monnaie sont appelées expériences aléatoires ou épreuves.

- A-t-on autant de chances de voir apparaître P que de voir apparaître F ?

Activité 3

On a simulé 10000 lancers d'une pièce de monnaie puis on a organisé les résultats dans le tableau ci-dessous.

Nombre de lancers	100	500	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
Nombre d'apparitions de pile	52	242	502	1002	1513	2034	2513	3035	3544	4020	4518	5008

- Calculer la fréquence de l'issue «pile».
- Tracer dans un même repère la courbe de fréquence de l'issue «pile» et la droite d'équation $y = 0.5$.
- Vers quelle valeur la fréquence de l'issue «pile» tend-elle à se stabiliser ?

1. Définition d'une probabilité

Activité 1

Un sac contient 1000 jetons numérotés de 1 à 1000.
 Une expérience consiste à tirer un jeton au hasard.

1. Combien y-a-t-il d'issues possibles ?
2. Dénombrer chacun des évènements ci-dessous.
 - A «obtenir un jeton portant un numéro qui commence par 1».
 - B «obtenir un jeton portant un numéro qui finit par 2».
 - C «obtenir un jeton portant un numéro impair qui commence par 2».

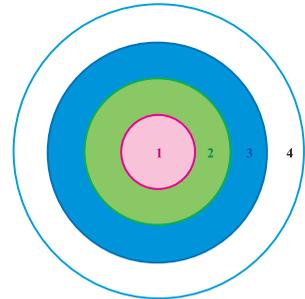
Lorsqu'on fait une expérience aléatoire, un résultat est appelé issue.
 L'ensemble des issues possibles est appelé univers des possibles.
 Un événement est une partie de l'univers des possibles.
 Un événement qui se réduit à une seule issue est appelé événement élémentaire.
 Deux événements sont dits incompatibles, si leur intersection est vide.

3. a. Montrer que les événements A et C sont incompatibles.
 b. Montrer que les événements B et C sont incompatibles.
4. On suppose que chaque issue apparaît avec la même fréquence égale à $\frac{1}{1000}$.
 Déterminer la fréquence d'apparition de chacun des évènements $A, \bar{A}, B, C, A \cap B, \bar{A} \cap B, A \cup B, A \cup B \cup C$.

Activité 2

Une cible est formée de quatre zones concentriques numérotées 1, 2, 3 et 4.

Les cercles limitant ces zones ont pour rayons respectifs, 10cm, 20cm, 30cm, 40cm.



Une expérience consiste à envoyer une fléchette sur la cible.

Une simulation a montré que les différentes zones sont atteintes avec les fréquences suivantes.

Zone	1	2	3	4
Fréquence	0.1	0.15	0.2	0.25

1. Déterminer la fréquence de l'événement «n'atteindre aucune zone».
2. Déterminer la fréquence de l'événement «atteindre la zone 1 ou 2».
3. Déterminer la fréquence de l'événement «ne pas atteindre la zone 1».

Définition

Soit E l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des événements de E. On appelle probabilité sur E, toute application p, de $\mathcal{P}(E)$ dans $[0, 1]$ telle que

- $p(E) = 1$,
- l'image $p(A)$ d'un événement A, est la somme des images des évènements élémentaires de A,
- l'image $p(\emptyset)$ de l'ensemble vide est égale à 0.

Vocabulaire

Soit $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ l'ensemble des issues et p une probabilité sur E .

L'événement E est appelé événement certain.

L'événement vide est appelé événement impossible.

L'image $p(A)$ d'un événement A est appelée probabilité de A .

Soit $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ l'ensemble des issues et p une probabilité sur E .

La probabilité d'un événement élémentaire $\{a_i\}$ est notée $p(a_i)$ et on a $\sum_{i=1}^n p(a_i) = 1$.

Activité 3

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1. Déterminer l'ensemble des issues de l'expérience.
2. On suppose que la probabilité d'apparition d'un nombre impair est le double de la probabilité q d'apparition d'un nombre pair.

Montrer que $9q = 1$ puis déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.

3. Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.

A «obtenir un nombre pair».

B «obtenir un nombre impair inférieur ou égal à 3».

C «obtenir un nombre pair strictement supérieur à 3».

D «obtenir un multiple de 3 ou un nombre pair».

Activité 4

Soit E un ensemble fini et p une probabilité sur E .

1. Soit A un événement et \bar{A} l'événement complémentaire.

Montrer que $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

2. Soit B un événement tel que A et B sont incompatibles.

Montrer que $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

3. Soit D un événement tel que A et D ne sont pas incompatibles.

On désigne par C l'ensemble des éléments de D qui n'appartiennent pas à A .

a. Montrer que $A \cup D = A \cup C$ et que $D = C \cup (A \cap D)$.

b. En déduire que $p(A \cup D) = p(A) + p(D) - p(A \cap D)$.

L'événement complémentaire d'un événement A est dit l'évènement contraire de A .

Soit E un ensemble fini et p une probabilité sur E .

- Pour tout événement A , $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.
- Pour tous événements A et B , $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- Pour tous événements incompatibles A et B , $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Activité 5

Un sac contient des jetons non identiques, numérotés de 10 à 19.

Une expérience aléatoire consiste à tirer un jeton du sac.

Le tableau ci-dessous donne les probabilités d'apparition des numéros.

a_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
p_i	0.2	0.1	0.05	0.06	0.04	0.1	0.1	0.15	0.15	0.05

Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.

1. Le chiffre obtenu est pair.
2. Le chiffre obtenu est un carré parfait.
3. Le chiffre obtenu est un multiple de 3 ou un multiple de 4.
4. Le chiffre obtenu n'est pas un carré parfait.
5. Le chiffre obtenu n'est ni un multiple de 3, ni un multiple de 4.

2. Loi uniforme

Lorsque dans une expérience aléatoire toutes les issues ont la même probabilité d'apparaître, on dit qu'il y a équiprobabilité.

C'est le cas, par exemple, lorsqu'on lance une pièce de monnaie bien équilibrée, on jette un dé non pipé ou on effectue un tirage au hasard.

Soit E un ensemble fini des issues dans une situation d'équiprobabilité.

Si le cardinal de E est égal à N et si p est la probabilité sur E , on a

- pour tout événement élémentaire a_i , $p(a_i) = \frac{1}{N}$,
- pour tout événement A , $p(A) = \frac{\text{card}A}{N}$.

Activité 1

Un joueur tire au hasard et simultanément trois cartes dans un jeu de 52 cartes.

Trouver la probabilité de chacun des événements ci-dessous.

A «obtenir trois cartes rouges».

B «obtenir trois cartes de même couleur».

C «obtenir trois as».

D «obtenir au moins un as».

E «n'obtenir aucun as».

Activité 2

Un sac contient des jetons, indiscernables et numérotés de 10 à 59.

On tire un jeton au hasard.

Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.

1. Le numéro obtenu commence par 2.
2. Le numéro obtenu est supérieur ou égal à 30.
3. Le numéro obtenu ne finit pas par un chiffre pair.
4. Le numéro obtenu ne finit pas par un chiffre impair.
5. Le numéro obtenu est divisible par 3 et comporte des chiffres distincts.

Activité 3

On a rangé trois paires de chaussures de couleurs différentes dans un tiroir.

On tire au hasard deux chaussures. Déterminer la probabilité de chacun des événements A «les chaussures appartiennent à la même paire» et B «il y a un pied droit et un pied gauche».

Activité 4

On lance deux dés, numérotés de 1 à 6 et on s'intéresse à la somme des chiffres obtenus. Déterminer la probabilité des événements ci-dessous.

1. La somme des deux chiffres est 8.
2. La somme des deux chiffres est paire.
3. La somme des deux chiffres est impaire.
4. La somme des deux chiffres est supérieure ou égale à 11.
5. La somme des deux chiffres est inférieure ou égale à 10.

Activité 5

1. On range quatre livres sur trois étagères.
 - a. Calculer la probabilité pour que les livres soient tous rangés sur la même étagère.
 - b. Calculer la probabilité pour que chaque livre soit rangé sur une étagère différente.
 - c. Calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins deux livres rangés sur une même étagère.
 - d. Calculer la probabilité pour que seulement deux livres soient rangés sur la même étagère.
2. Reprendre la question 1, avec quatre livres et cinq étagères.

Activité 6

Une chaîne de télévision organise un sondage, auprès de 500 téléspectateurs pour déterminer quels sont les films qu'ils apprécient. On donne ci-dessous les résultats.

- 150 téléspectateurs n'aiment ni les films policiers, ni les films de science fiction.
- 120 téléspectateurs n'aiment pas les films de science fiction et aiment les films policiers.
- 200 téléspectateurs aiment les films policiers et n'aiment pas les dessins animés.
- 180 téléspectateurs n'aiment ni les films policiers, ni les dessins animés.

On choisit un téléspectateur au hasard parmi ceux qui ont été interrogés.

Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.

1. Le téléspectateur aime les films policiers ou les films de science fiction.
2. a. Le téléspectateur n'aime pas les films de science fiction.
b. Le téléspectateur aime les films de science fiction.
3. a. Le téléspectateur n'aime pas les dessins animés.
b. Le téléspectateur aime les dessins animés.

Activité 7

Dans une gare les arrivées des trains se font toutes les heures de midi jusqu'à minuit. Chaque train reste deux heures dans la gare puis repart et ne revient que le lendemain.

On se propose de calculer la probabilité que deux trains A et B se rencontrent dans cette gare.

On désigne par a et b les heures d'arrivée respectives des trains A et B.

1. a. Vérifier que l'univers des possibles est défini par
 $E = \{(a, b) \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des entiers compris entre } 12 \text{ et } 24\}$.
b. Calculer le cardinal de E.
2. a. On suppose que le train A arrive à 17 heures. Quelles sont les heures d'arrivée possibles du train B, pour qu'il rencontre le train A ?
b. On suppose que le train A arrive à 23 heures. Quelles sont les heures possibles d'arrivée du train B pour qu'il rencontre le train A ?

3. On munit le plan d'un repère, et on désigne par G l'ensemble des points M de coordonnées (a, b) telles que les trains A et B se rencontrent.
 - a. Représenter l'ensemble G .
 - b. Quel est le cardinal de G ?
 - c. En déduire la probabilité pour que les deux trains A et B se rencontrent dans la gare.
 - c. On suppose que le train A arrive à midi. Quelles sont les heures possibles d'arrivée du train B pour qu'il rencontre le train A ?

3. Epreuves successives et événements indépendants

Activité 1

On lance une pièce de monnaie, bien équilibrée et on note à chaque fois le côté qui apparaît: P pour pile et F pour face.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir pile ?
2. On répète l'expérience deux fois et on note à chaque fois le côté qui apparaît.
Soit A_1 un événement réalisé lors du premier lancer et A_2 un événement réalisé lors du deuxième lancer.
 - a. La réalisation de A_1 influe-t-elle sur celle de A_2 ?
 - b. A l'aide d'un arbre de choix, déterminer et dénombrer l'ensemble E des issues possibles.
 - c. Déterminer la probabilité d'un événement élémentaire de E .
 - d. Calculer la probabilité des événements ci-dessous.
A «obtenir pile au premier lancer».
B «obtenir face au deuxième lancer».
C «obtenir face au premier lancer et pile au deuxième lancer».
 - e. Calculer la probabilité des événements \bar{A} , $A \cap B$, $\bar{A} \cap B$, $A \cup B$ et $A \cup B \cup C$.

On considère une expérience, constituée de n épreuves successives.

Soit A_1 un événement réalisé avec la probabilité p_1 lors de la première épreuve, A_2 un événement réalisé avec la probabilité p_2 lors de la deuxième épreuve, et A_n est un événement réalisé avec la probabilité p_n lors de la $n^{\text{ème}}$ épreuve.

On dit que les événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation du suivant. Dans ce cas la probabilité pour que les événements A_1, A_2, \dots, A_n soient successivement réalisés est égale à $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$.

Activité 2

Une urne contient deux boules blanches et huit boules rouges.

On tire au hasard une boule.

1. a. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
b. Calculer la probabilité de tirer une boule rouge.
2. On répète l'expérience trois fois en remettant après chaque essai la boule tirée dans l'urne.
Établir un arbre de choix, puis calculer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.

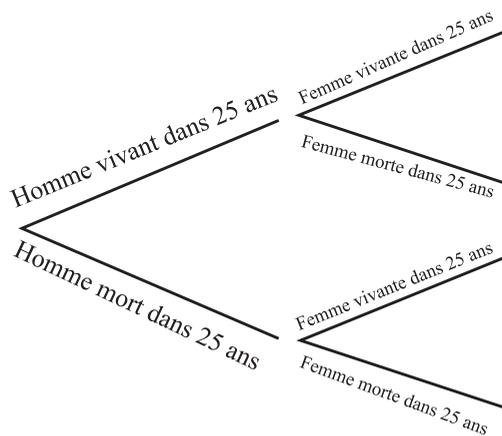
- La première boule tirée est blanche.
- La deuxième boule tirée est rouge.
- La dernière boule tirée est blanche.
- Aucune boule tirée n'est blanche.
- Le tirage contient au moins une boule blanche.

Activité 3

La probabilité pour qu'un homme soit vivant dans 25 ans est $\frac{3}{5}$ et la probabilité pour que sa femme soit vivante dans 25 ans est $\frac{2}{3}$.

Observer l'arbre de choix ci-contre et déterminer la probabilité pour que dans 25 ans

- les deux soient vivants.
- seulement l'homme soit vivant.
- seulement la femme soit vivante.
- au moins l'un des deux soit vivant.



Activité 4

Trois élèves A, B et C travaillent indépendamment sur un problème.

La probabilité que A résolve le problème est 0.5 ; celle de B est $\frac{1}{3}$ et celle de C est 0.4.

- Etablir un arbre de choix.
- Calculer la probabilité pour que le problème ne soit pas résolu.
- En déduire la probabilité que le problème soit résolu.

Activité 5

On suppose que 10% des ampoules produites par une machine sont défectueuses.

On choisit 10 ampoules au hasard. Quelle est la probabilité pour que parmi les 10 ampoules choisies

- aucune ampoule ne soit défectueuse ?
- au moins une ampoule soit défectueuse ?
- exactement une ampoule soit défectueuse ?
- au moins deux ampoules soient défectueuses ?

Activité 6

On suppose que les probabilités d'avoir un garçon ou une fille sont égales.

Parmi 500 familles à 4 enfants chacune, quelle est la probabilité qu'une famille

- n'ait aucune fille ?
- ait au moins un garçon ?
- ait exactement deux filles ?
- ait au moins deux garçons ?

4. Epreuves successives et événements dépendants

Activité 1

Une urne contient deux boules blanches et huit boules rouges.

On tire au hasard une boule.

1. a. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
- b. Calculer la probabilité de tirer une boule rouge.

On répète l'expérience deux fois sans remettre la boule tirée dans l'urne.

2. Etablir un arbre de choix, puis calculer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.
 - a. La première boule tirée est blanche.
 - b. La deuxième boule tirée est rouge.
 - c. La dernière boule tirée est blanche.
 - d. Aucune boule tirée n'est blanche.
 - e. Le tirage contient au moins une boule blanche.

On considère une expérience, constituée de n épreuves successives.

Soit A_1 un événement réalisé lors de la première épreuve, A_2 un événement réalisé lors de la deuxième épreuve et A_n est un événement réalisé lors de la $n^{\text{ème}}$ épreuve. On dit que les événements sont dépendants si la réalisation de l'un influe sur la réalisation du suivant.

Soit p_1 la probabilité de A_1 , p_2 la probabilité de A_2 si A_1 se réalise, et p_n la probabilité de A_n si A_{n-1} se réalise. Alors la probabilité pour que les événements A_1, A_2, \dots, A_n se réalisent successivement est égale à $p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n$.

Activité 2

Au cours d'une expérience sur le comportement des animaux, un lapin doit choisir entre quatre portes d'apparence identique, numérotées de 1 à 4.

S'il choisit la porte 1, l'expérience s'arrête.

S'il choisit l'une des autres portes, il retourne à la case départ et fait un autre essai.

1. On suppose qu'à chaque essai, le lapin ne se souvient pas de l'essai précédent.

Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.

 - A «le lapin choisit la porte 1 au premier essai».
 - B «le lapin choisit la porte 1 au deuxième essai».
 - C «le lapin choisit la porte 1 au sixième essai».
2. On suppose maintenant qu'à chaque essai le lapin évite la porte choisie auparavant et choisit entre celles qu'il n'a pas testées.

Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.

 - A «le lapin choisit la porte 1 au premier essai».
 - B «le lapin choisit la porte 1 au troisième essai».
 - C «le lapin choisit la porte 1 au cinquième essai».

Activité 3

Trois boîtes à bijoux identiques ont chacune deux tiroirs. Dans chaque tiroir de la première boîte il y a un collier en or, dans chaque tiroir de la deuxième il y a un collier en argent et dans l'un des tiroirs de la troisième boîte il y a un collier en or et dans l'autre un collier en argent.

On choisit une boîte au hasard. Quelle est la probabilité pour

- a. qu'au moins un tiroir contienne un collier en or ?
- b. qu'un seul tiroir contienne un collier en argent ?

Activité 4

Lors d'un examen, un élève doit tirer successivement et au hasard trois questions parmi 27 questions réparties de la manière suivante :

- 9 questions d'analyse,
- 9 questions de géométrie,
- 5 questions de probabilité,
- 4 questions de statistiques.

Calculer les probabilités des événements ci-dessous.

1. L'élève tire trois questions d'analyse.
2. L'élève ne tire aucune question d'analyse.
3. L'élève tire au moins une question de probabilité et une seule question de statistiques.
4. L'élève ne tire que des questions de géométrie et de probabilité.

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. En écrivant des mots de trois lettres distinctes avec les lettres Q, C et M, la probabilité d'obtenir le mot QCM est égale à

$\frac{1}{27}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}$.

2. En tirant simultanément deux jetons dans un sac contenant trois jetons blancs et trois rouges, la probabilité d'obtenir deux jetons blancs est égale à

0.5 $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{3}$.

3. On tire simultanément trois jetons dans un sac contenant deux jetons blancs et trois rouges ; on note p la probabilité de n'avoir que des jetons blancs et q la probabilité de n'avoir que des jetons rouges. Alors

$p < q$ $p > q$ $q = \frac{2}{3}$.

4. On lance deux fois de suite une pièce non truquée. La probabilité d'obtenir pile au second lancer est égale à

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$.

5. On lance simultanément deux pièces identiques non truquées. La probabilité d'obtenir pile et face est égale à

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La probabilité de la réunion de deux événements est la somme des probabilités de ces événements.
2. La probabilité de l'intersection de deux événements est le produit des probabilités de ces événements.
3. La probabilité de la réunion de deux événements élémentaires est la somme des probabilités de ces événements.
4. Si un événement A est inclus dans un événement B alors la probabilité de A est inférieure ou égale à celle de B.
5. Si un événement A est incompatible avec un événement B alors la probabilité de l'intersection de A et B est nulle.

Situation 1

Un singe frappe au hasard 4 fois sur les 50 touches d'un clavier d'ordinateur.

On considère l'événement « le singe écrit le mot MATH ».

1. a. Déterminer la probabilité pour que cet événement se produise.
b. En déduire la probabilité pour que cet événement ne se produise pas.
2. On répète l'expérience n fois, $n \geq 1$.
a. Déterminer la probabilité pour que cet événement se produise au moins une fois.
b. A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-8} près de p_{100} , p_{1000} , p_{10^5} , p_{10^6} , p_{10^7} , p_{10^8} , p_{10^9} .
c. Interpréter.

Situation 2

On se propose de calculer la probabilité pour que lors d'un dépouillement d'un scrutin, le vainqueur soit toujours en tête.

On admet que les dépouillements sont équiprobables.

I. Dans cet exemple on suppose qu'il y a 10 votants dont 6 ont voté pour A et 4 ont voté pour B.

Ainsi un dépouillement possible est ABBABAAABA.

1. Déterminer le nombre de dépouillements possibles.
2. On munit le plan d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) et on associe à un dépouillement le chemin défini comme suit :

On part du point O, chaque fois que le bulletin tiré est pour le candidat A, on monte en effectuant une translation de vecteur $\vec{i} + \vec{j}$, sinon on descend en effectuant une translation de vecteur $\vec{i} - \vec{j}$.

On a représenté ci-contre le chemin correspondant au dépouillement ABBABAAABA.

- a. Tracer deux autres chemins associés à d'autres dépouillements. En quel point ces chemins se terminent-ils?
- b. Vérifier que dénombrer les dépouillements où A reste toujours strictement en tête revient à dénombrer les chemins commençant par une montée et ne rencontrant plus l'axe des abscisses.

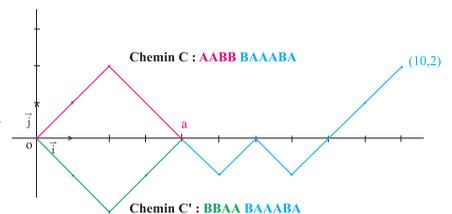
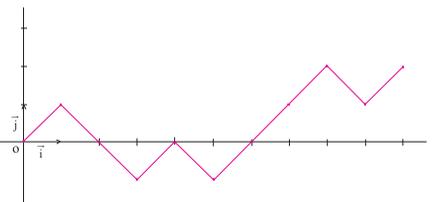
On appelle bons chemins de tels chemins.

3. On appelle mauvais chemin tout chemin commençant par une montée et rencontrant l'axe des abscisses.

On considère un mauvais chemin C qui rencontre l'axe des abscisses la première fois en un point d'abscisse a .

On lui associe un chemin C' commençant par une descente définie comme l'indique la figure ci-contre.

- a. Tracer un autre mauvais chemin C et son associé C'.
- b. Tracer un chemin C' commençant par une descente et le chemin C auquel il est associé.



On remarque qu'on a autant de mauvais chemins que de chemins commençant par une descente.

c. Montrer que le nombre de chemins commençant par une descente est égal à C_9^3 .

4. a. Montrer que le nombre de bons chemins est égal à $C_{10}^4 - 2C_9^3$.

b. En déduire la probabilité pour que lors d'un dépouillement du scrutin le candidat A reste toujours strictement en tête.

II. En appliquant le même procédé, montrer que s'il y a n bulletins pour A et m bulletins pour B ($n > m$), alors la probabilité pour que lors d'un dépouillement du scrutin le candidat A reste toujours strictement en tête est égale à $\frac{n - m}{m + n}$.

Exercices et problèmes

Exercice 1

Un dé équilibré a deux faces portant le chiffre 4, trois faces portant le chiffre 3 et une face portant le chiffre 6. On lance ce dé une fois.

1. Déterminer l'univers des possibles E ainsi que les probabilités d'apparition de chacun des chiffres.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 ou 6 ?

Exercice 2

Un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6, est pipé de sorte que la probabilité d'obtenir un chiffre soit proportionnelle à ce chiffre.

On lance ce dé une fois.

1. Déterminer l'univers des possibles E ainsi que les probabilités d'apparition de chacun des chiffres.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre multiple de 3 ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre strictement supérieur à 2 ?

Exercice 3

On considère un univers $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ et p une probabilité définie sur $\mathcal{P}(E)$ telle que $p(a_1) = 0.04$,

$$p(a_2) = \frac{p(a_1) + p(a_2)}{2} \text{ et } p(a_3) = \frac{p(a_2) + p(a_4)}{2}.$$

Déterminer p .

Exercice 4

Une urne contient deux boules blanches, trois boules rouges et cinq boules noires.

On tire une boule de l'urne et on observe sa couleur.

1. Déterminer l'univers des possibles E ainsi que les probabilités d'apparition de chacune des boules.
- On répète l'expérience deux fois en remettant à chaque fois la boule dans l'urne.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?
 3. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?
 4. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur ?
 5. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes ?
 6. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche et une boule rouge ?
 7. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche ?

Exercice 5

Un centre de transfusion sanguine diffuse le tableau suivant donnant la répartition des principaux groupes sanguins des habitants d'une même ville. Par ailleurs, le sang humain possède une caractéristique appelée facteur Rhésus. Cette caractéristique peut revêtir deux formes que l'on appelle Rhésus + et Rhésus -.

	O	A	B	AB
R ₊	39%	36%	9.1%	2.8%
R ₋	5.1%	4.9%	1.4%	1.7%

Un couple de cette ville est choisi au hasard ; déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.

1. L'homme est OR₊ et la femme est BR₋.
2. L'homme est A et la femme est AB.
3. L'homme et la femme sont A.
4. L'homme est A et la femme n'est pas A.
5. L'homme ou la femme est A.
6. L'homme et la femme sont R₊.
7. L'homme ou la femme est R₋.
8. L'homme et la femme sont de Rhésus différents.

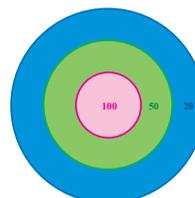
Exercice 6

On considère une population de lapins où le nombre de mâles est la moitié du nombre de femelles. Des études statistiques ont montré que dans cette population 4% des mâles avaient le caractère albinos et 0.26% des femelles avaient ce caractère.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une femelle de cette population prise au hasard ne soit pas albinos ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'un lapin de cette population pris au hasard soit albinos ?
3. Quelle est la probabilité pour qu'un lapin albinos de cette population pris au hasard soit un mâle ?

Exercice 7

Une cible est dessinée à l'aide de trois cercles concentriques, de rayons 10, 20 et 30cm. Le disque central donne 100 points, la couronne extérieure donne 20 points et la couronne restante donne 50 points.



On lance une flèche et on suppose que la probabilité d'obtenir 100 points est $\frac{1}{18}$, celle d'avoir 50 points est $\frac{1}{9}$ et celle d'avoir 20 points est $\frac{5}{18}$.

1. Déterminer la probabilité de ne pas atteindre la cible.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins 50 points.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir au plus 50 points.

Exercice 8

Une urne contient quatre boules numérotées (6) et cinq boules numérotées (-3), indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer deux boules portant deux nombres différents ?
2. Quelle est la probabilité de tirer deux boules portant le même nombre ?
3. On note S la somme des nombres des deux boules tirées.
 - a. Quelles sont les différentes valeurs possibles de S ?
 - b. Déterminer la probabilité de chaque valeur possible de S.
 - c. Quelle est la probabilité que S soit positive ?
 - d. Quelle est la probabilité que S soit paire ?

Exercice 9

On considère une droite munie d'un repère (O, \vec{i}) et le point A d'abscisse 10.

On place au hasard deux points M et N d'abscisses entières, sur le segment $[OA] \setminus \{O, A\}$.

On obtient alors trois segments de longueurs x, y et z. On se propose de calculer la probabilité de pouvoir construire un triangle dont les côtés mesurent x, y et z.

1. a. Justifier que l'univers des possibles est défini par $E = \{(x, y) \mid x \text{ et } y \text{ sont des entiers compris entre } 0 \text{ et } 10 \text{ tels que } x + y \leq 10\}$.
- b. Représenter dans un repère l'ensemble E.
- c. Calculer le cardinal de E.
2. a. Montrer que l'événement étudié correspond à la partie A définie par $A = \{(x, y) \in E \mid x < 5, y < 5 \text{ et } x + y > 5\}$.
- b. Représenter la partie A.
- c. Quel est le cardinal de A ?
- d. Conclure.

Exercice 10

Dans une classe, il y a 20 filles et 18 garçons. Le professeur de mathématiques interroge l'un après l'autre trois élèves différents choisis au hasard. Calculer la probabilité des événements ci-dessous.

1. Le professeur interroge trois filles.
2. Le professeur interroge trois élèves de même sexe.
3. Le professeur interroge une fille et deux garçons.
4. Le troisième élève interrogé est une fille.

Exercice 11

On lance 100 fois une pièce de monnaie équilibrée.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 100 fois pile ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 50 fois pile ?

Exercice 12

On lance deux dés non truqués, un vert et un bleu. Les faces de chacun d'eux sont numérotées de 1 à 6.

On note p le résultat donné par le dé vert et q le résultat donné par le dé bleu.

On considère l'équation (E) : $x^2 + px - q = 0$.

1. Déterminer la probabilité pour que 0 soit solution de E.
2. Déterminer la probabilité pour que 1 soit solution de E.
3. Déterminer la probabilité pour que -1 et 1 soient solutions de E.
4. Déterminer la probabilité pour que E admette deux solutions distinctes.
5. Déterminer la probabilité pour que E admette une solution double.
6. Déterminer la probabilité pour que E n'admette pas de solutions.

Exercice 13

Dans une classe de 36 élèves aucun élève n'est né un 29 février.

Est-il plus raisonnable de parier sur le fait que deux élèves au moins fêtent leur anniversaire le même jour que de parier sur le contraire ?

Exercice 14

Expliquer pourquoi, lorsqu'on lance trois dés discernables tels que les faces de chacun sont numérotées de 1 à 6, on obtient plus souvent la somme 10 que la somme 9, bien que ces sommes soient obtenues chacune de six façons différentes.

Exercice 15

On considère un octogone régulier ABCDEFGH.

1. Combien peut-on former de triangles distincts ayant pour sommets trois des sommets de l'octogone ?
2. Une urne contient 8 boules notées A, B, C, D, E, F, G et H. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Calculer la probabilité pour que ces trois lettres désignent les sommets d'un triangle
 - a. isocèle,
 - b. non isocèle,
 - c. équilatéral,
 - d. rectangle,
 - e. rectangle et isocèle.

Exercice 16

Le chevalier de Méré, philosophe et homme de lettres vivait au XVII^{ème} siècle. Il augmentait ses revenus de la façon suivante : il pariait qu'avec un dé non truqué, il était capable d'obtenir au moins un six en 4 coups.

Il se mit alors à parier qu'il était capable d'obtenir au moins un double six avec deux dés en 24 coups. Il commença à perdre !

1. Déterminer la probabilité de faire apparaître au moins un six en 4 coups avec un dé.
2. En déduire pourquoi le chevalier de Méré gagnait plus de fois qu'il ne perdait lorsqu'il disait faire apparaître au moins un six en 4 coups.
3. Expliquer pourquoi le chevalier de Méré commençait à perdre lorsqu'il pariait sur l'apparition d'au moins un double six en 24 coups avec deux dés.
4. S'il avait parié sur l'apparition d'au moins un double six en 25 coups avec deux dés aurait-il continué de gagner plus de fois qu'il n'aurait perdu ?

Exercice 17

La probabilité qu'un joueur X gagne une partie d'échec est 0.6.

Dans un tournoi de quatre parties, trouver la probabilité de chacun des événements ci-dessous.

1. X gagne la première partie, la troisième partie et perd les deux autres.
2. X gagne au moins une partie.
3. X gagne exactement une partie.
4. X gagne au moins deux parties.
5. X gagne au moins quatre parties.

Exercice 18

Trois personnes A, B et C visent une cible. Ils jouent une seule fois, l'un après l'autre dans l'ordre alphabétique avec des probabilités respectives de l'atteindre

de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.

1. Quelle est la probabilité pour qu'aucun n'atteigne la cible ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un joueur atteigne la cible ?
3. Quelle probabilité a chaque joueur d'atteindre le premier la cible ?

Exercice 19

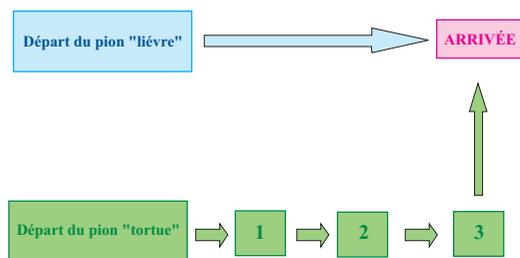
On lance un dé bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Si le résultat est pair le jeu s'arrête et on note S le résultat, sinon on tire au hasard un jeton d'une urne en contenant trois (numérotés 1, 2 et 3) et on note S la somme des chiffres donnés par le dé et le jeton.

1. Déterminer la probabilité pour que S soit égal à 4.
2. Déterminer la probabilité pour que S soit un nombre pair.
3. Déterminer la probabilité pour que S soit inférieur ou égal à 7.

Exercice 20

On considère le jeu décrit ci-dessous.



On lance un dé bien équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Si le résultat est 6 le pion « lièvre » atteint la case arrivée et gagne, sinon le pion « tortue » avance d'une case.

On continue jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant.

Quelle est la situation la plus enviable : celle du pion « lièvre » ou celle du pion « tortue » ?

Lancer de deux dés.

Une expérience consiste à lancer deux dés puis faire la somme des nombres apparus. On se propose de simuler à l'aide d'un tableur cette expérience, 50 fois, 100 fois et 200 fois afin de calculer la fréquence d'apparition des événements élémentaires.

1. Simulation

- Dans chacune des cellules A1 et B1, on tape la formule =ENT(ALEA()*6+1) pour générer des entiers compris entre 1 et 6.
- Dans la cellule C1, on écrit la formule =A1+B1 pour déterminer la somme des deux faces apparentes des dés lancés.
- Sélectionner A1 et à l'aide de la poignée de recopie, la copier jusqu'à la cellule A200.
- Sélectionner B1 et à l'aide de la poignée de recopie, la copier jusqu'à la cellule B200.
- Sélectionner C1 et à l'aide de la poignée de recopie, la copier jusqu'à la cellule C200.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	
1	6	1	7																
2	6	5	11					Simulation du lancer de deux dés distincts											
3	4	5	9																
4	3	2	5																
5	5	4	9																
6	5	2	7																
7	1	5	6					Somme obtenue	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	1	6	7					Fréquence d'apparition pour 50 lancers	0	0.1	0.02	0.12	0.08	0.24	0.08	0.12	0.06	0.14	0.04
9	5	6	11					Fréquence d'apparition pour 100 lancers	0.03	0.05	0.08	0.1	0.08	0.2	0.1	0.13	0.12	0.09	0.02
10	4	1	5					Fréquence d'apparition pour 200 lancers	0.025	0.065	0.06	0.13	0.13	0.19	0.12	0.12	0.09	0.07	0.01
11	6	5	11																
12	1	2	3																
13	6	5	11																
14	6	3	9																
15	6	6	12																

2. Fluctuation des fréquences

- On écrit d'abord les titres comme l'illustre la figure ci-haut : "Somme obtenue", "Fréquence d'apparition pour 50 lancers, pour 100 lancers et pour 200 lancers", ainsi que les valeurs possibles des sommes.
- Dans la cellule H8, on écrit la formule =NB.SI(\$C\$1 :\$C\$50 ;H7)/50.
- Sélectionner H8 et la copier jusqu'à R8 en utilisant la poignée de recopie.
- Dans la cellule H9, on écrit la formule =NB.SI(\$C\$1 :\$C\$100 ;H7)/100.
- Sélectionner H9 et la copier jusqu'à R9 en utilisant la poignée de recopie.
- Dans la cellule H10, on écrit la formule =NB.SI(\$C\$1 :\$C\$200 ;H7)/200.
- Sélectionner H10 et la copier jusqu'à R10.
- On pourra donner de nouvelles simulations, en appuyant sur la touche F9 du clavier.

Math – culture

Les premières références publiées sur les chances de gagner au jeu, datent de Cardan (1501-1576) dans son livre " De Ludo Alae ". Des calculs de probabilité apparaissent aussi dans les livres de Kepler (1571-1630) et de Galilée (1564-1642).

Mais les historiens semblent être d'accord sur le fait que le sujet commence réellement à être développé par Pascal (1623-1662) et Fermat (1601-1665), vers 1650 comme un calcul combinatoire. Huyghens, Bernoulli, De Moivre, Euler et Gauss développèrent les idées de Pascal et Fermat, mais il fallut, pour développer la théorie, faute d'outils mathématiques puissants, attendre Laplace qui donna une application magistrale du calcul différentiel et intégral à la théorie des probabilités, dans son " Traité analytique des probabilités " (en 1812).



Blaise Pascal



Jean Bernoulli

D'après les archéologues, les jeux de hasard seraient apparus au troisième millénaire avant notre ère, en Extrême Orient et en Égypte. Platon désignait Toth, dieu égyptien sans doute adopté par les Grecs sous le nom d'Hermès, comme l'inventeur des jeux de hasard. Les "fils" des pharaons seraient donc les premiers " joueurs de hasard ". On a découvert des dés "pipés" dans des sarcophages vieux de 2000 ans !



Citation

" Je parle beaucoup au hasard, c'est mon plus cher confident " .

Alfred De Musset

