RÈPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTÈTRE DE L'ÈDUCATION

Mathématiques

2éme année de l'enseignement secondaire

Section sport

Auteurs

Abdallah Abdessamad
Inspecteur principal

Nizar Cherif
Inspecteur

Mohamed Msekni
Professeur principal

Abderraouf Orfi
Professeur principal

Evaluateurs

Abderrahmen Mimouni
Inspecteur principal

Ahmad Whibi
Inspecteur

Préface

Ce manuel a été conçu pour répondre aux objectifs fixés par le programme officiel et pour favoriser les apprentissages des élèves de la deuxième année secondaire, section sport.
Dans ce but, les chapitres ont été structurés comme suit :

Pour commencer

Dans cette rubrique sont proposées des activités dans le but de réinvestir les connaissances acquises précédemment par les élèves et nécessaires à l'acquisition des nouveaux concepts.

Le cours

Dans cette partie, un cours est construit de façon progressive. Il propose des activités d'approche des nouvelles notions étudiées, des définitions, les résultats utiles et des activités d'application pour permettre aux élèves de s'assurer de leur bonne compréhension des notions développées dans le cours.

Essentiel du Cours

L'essentiel du cours résume les acquis fondamentaux du cours.

S'auto-évaluer

Dans cette partie, des *vrai-faux* et des *QCM* balayant l'ensemble des acquis du chapitre sont proposées et leurs corrigés figurent en fin d'ouvrage.

Activités T.I.C.E

Dans cette rubrique, on invite l'élève à utiliser l'outil Informatique pour contrôler et pour conjecturer certains résultats du cours et ce à travers des activités avec GeoGebra.

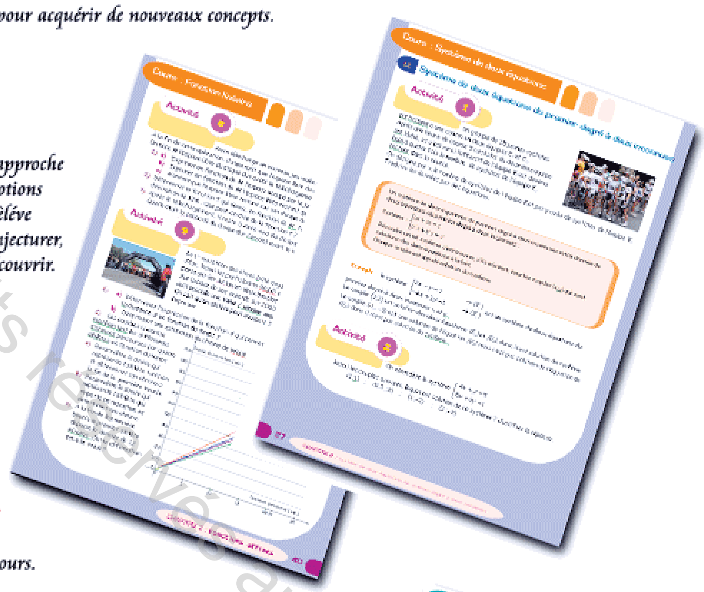
Exercices

Cette rubrique est constituée :
- d'exercices d'application directe ordonnés suivant la progression du cours.
- des problèmes touchant à des domaines variés et qui permettant de voir les notions abordées dans un cadre plus concret (vie quotidienne, milieu sportif,....)

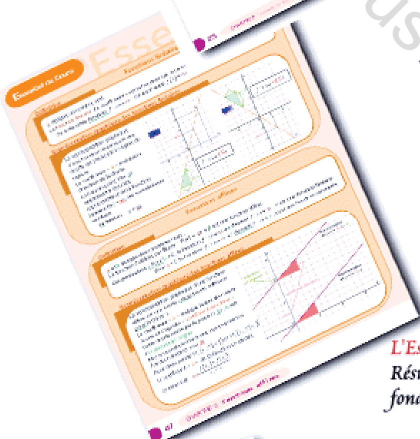
Découvrir votre manuel

Au Fil Du Temps
cette rubrique comporte un aperçu historique sur une notion mathématique ou sur un savant

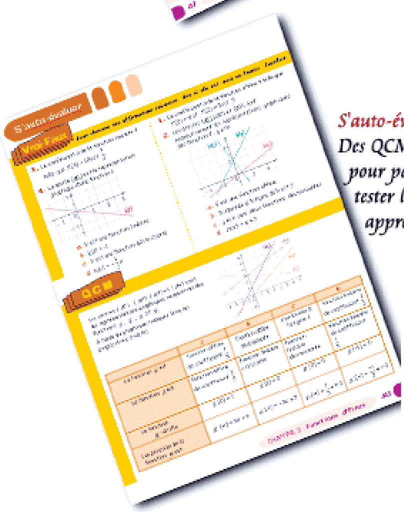
Pour commencer
Des activités, dans le but de réinvestir les connaissances nécessaires pour acquérir de nouveaux concepts.



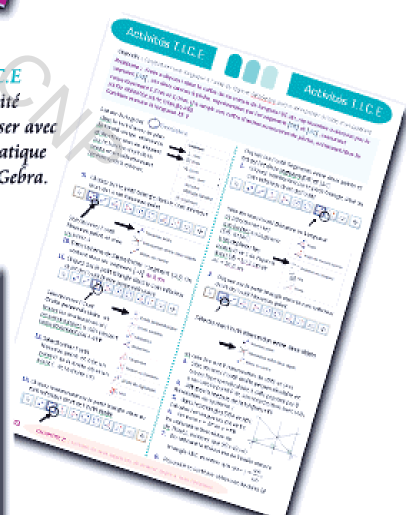
Le Cours
Les activités d'approche des nouvelles notions permettent à l'élève de chercher, conjecturer, raisonner et découvrir.



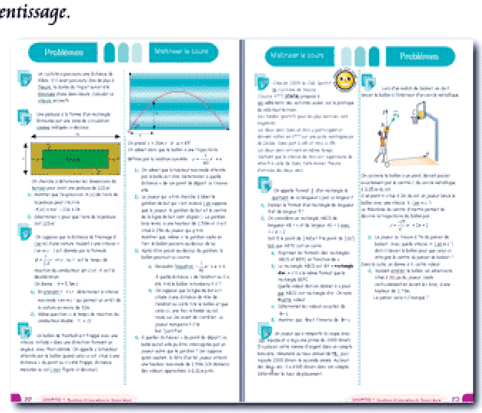
L'Essentiel du cours
Résume les acquis fondamentaux du cours.



S'auto-évaluer
Des QCM et Vrai-faux pour permettre à l'élève de tester l'essentiel de son apprentissage.



Activités T.I.C.E
L'élève est invité à se familiariser avec l'outil informatique à travers GeoGebra.



Exercices et Problèmes
Cette rubrique comporte de nombreux exercices qui permettent à l'élève d'affermir ses connaissances.

Projet de répartition du programme de 2$^{\text{éme}}$ année sport

	1 heure par semaine	1 heure par semaine
Première trimestre	• Equation et inéquation du second degré • Système de deux équations à deux inconnues réelles	• Calcul vectoriel
Deuxième Trimestre	• Fonctions affines	• Base et repère cartésien
Troisième trimestre	• Fonctions de type : $x \mapsto ax^2$ et $x \mapsto \frac{a}{x}$	• Barycentre de deux points • Activités dans un repère orthonormé

Cette répartition est proposée à titre indicatif.

Sommaire

1 Second degré

- Pour commencer 8
- Cours.....................9
- S'auto évaluer............18
- Activités TICE........19
- Exercices...................20

2 Systhème de deux équations de premier degré à deux inconnues

- Pour commencer 24
- Cours.....................25
- S'auto évaluer 31
- Activités TICE.........32
- Exercices.....................33

3 Fonctions affines

- Pour commencer 36
- Cours.....................25
- S'auto évaluer 48
- Activités TICE.........49
- Exercices.....................50

4 Fonctions de type: $x \mapsto ax^2$; $x \mapsto \frac{a}{x}$

- Pour commencer 54
- Cours.....................55
- S'auto évaluer 69
- Activités TICE.........70
- Exercices.....................71

5 Calcul vectoriel

- Pour commencer 74
- Cours.....................75
- S'auto évaluer 80
- Activités TICE.........81
- Exercices.....................82

6 Base et repère cartésien

- Pour commencer 86
- S'auto évaluer 103
- Exercices...................105
- Cours.....................87
- Activités TICE......104

7 Barycentre de deux points

- Pour commencer 110
- S'auto évaluer 117
- Exercices..................119
- Cours.................111
- Activités TICE......118

8 Activités dans un repère orthonormé

- Pour commencer 122
- S'auto évaluer 134
- Exercices...................136
- Cours..................123
- Activités TICE......135

- Logiciel GeoGebra................................139
- Corrigés des QCM et Vrai-Faux...........142

CHAPITRE 1

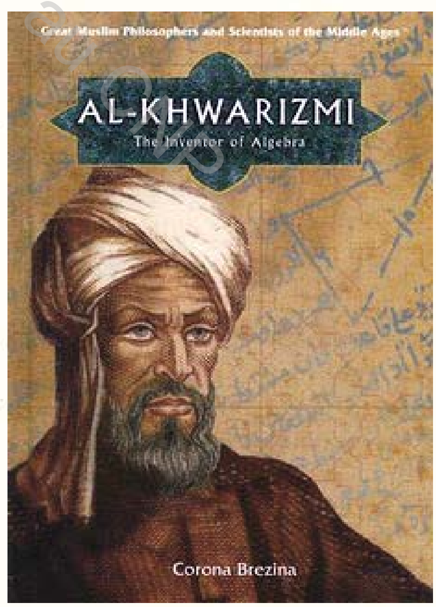
Equations et inéquations du second degré

Contenu du chapitre

- Pour commencer
- Cours
  - Equations du second degré
  - Inéquations du second degré
- S'auto évaluer
- Activité TICE
- Exercices et problèmes

AU FIL DU TEMPS

Muhammad ibn Moussa Al-Khawarizmi (788-850) fut un astronome de bagdad né à *Khwarizem* (Ouzbékistan), d'où son nom.
Ses travaux sur le calcul algébrique dans le *livre abrégé du calcul par al-jabr* (transposition) *et al-muqabala* (réduction) ont révolutionné les techniques de résolution d'équations.
Vers 820-830, AL-Khawarizmi fut le premier à décrire une méthode générale algorithmique de résolution d'équations du 2^{nd} degré. Les solutions négatives resteront néanmoins inconnues jusqu'à la fin du XVI^{e} siècle.



Pour commencer

Activité 1

Se rappeler

Pour tout réels a et b

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Choisir pour chaque question la réponse exacte parmi celles proposées

1.	Quelle est l'expression développée de $(3x+5)^2$?	$9x^2+15x+25$	$9x^2+25$	$9x^2+30x+25$
2.	Quelle est la forme factorisée de $16x^2-49$	$(4x-7)^2$	$(4x-7)(4x+7)$	$(16x-7)(16x+7)$
3.	Quelle est la forme factorisée de $(x+1)^2-9$	$(x-2)(x+4)$	x^2+2x-8	$(x-8)(x+10)$

Activité 2

Soit a et b deux réels avec $a\neq 0$ toute expression de la forme $ax+b$ est appelée binôme du premier degré

Factoriser les expressions suivantes :

$A=4x^2-36$ $\quad B=4x^2-4x+1$

$C=3x^2+18x+27$ $\quad D=2x^2-2\sqrt{2}x+1$

Activité 3

Se rappeler

a et b deux réels

(ab = 0)

équivaut à

(a = 0 ou b = 0)

Résoudre les équations suivantes :

- $(2x-1)(3x-5)=0$
- $4x^2+5x=0$
- $4x^2-9=0$
- $x^2+11=0$
- $(x-1)^2-121=0$

Activité 4

Se rappeler

Signe d'un binôme du premier degré

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
ax+b		signe de (-a)	0	signe de a	

Déterminer suivant les valeurs de x le signe des expressions suivantes :

- $3x-6$
- $x(3x-6)$
- $(x-2)(x+3)$
- $-4\left(x-\sqrt{2}\right)(x+4)$

Équations du second degré :

I Définition et vocabulaire :

Activité 1

1) Vérifier que pour tout réel x on a :

$$x^2-6x+5=(x-3)^2-4 \quad ; \quad -3x^2+6x-5=-3\left((x-1)^2+\frac{2}{3}\right)$$

2) Compléter : $2x^2+8x+3=2\left((\ldots+\ldots)+\frac{3}{2}\right)=2\left((\ldots+\ldots)^2-4+\frac{3}{2}\right)=2\left((\ldots+\ldots)^2-\ldots\right)$

3) Résoudre les équations suivantes :

$$x^2-6x+5=0 \quad ; \quad 2x^2+8x+3=0 \quad ; \quad -3x^2+6x-5=0$$

Soient a, b et c trois réel avec $a \neq 0$.

- L'expression ax^2+bx+c avec x un réel est appelée **trinôme du second degré .**
- L'équation $ax^2+bx+c=0$ est dite **équation du second degré à une inconnue réelle x.**
- Les réels a, b et c sont dits les **coefficients** du trinôme ou de l'équation.
- Si u est un réel vérifiant : $au^2+bu+c=0$.
  On dit que u est une solution ou une racine de l'équation : $ax^2+bx+c=0$.
  On dit aussi que u est une racine ou un zéro du trinôme ax^2+bx+c.

Activité 2

Déterminer, parmi les équations suivantes, les équations du second degré qui admettent 2 comme solution.

$x-2=0$; $t^2-4=0$; $y(y-2)=0$; $x^2+x-6=0$; $x+\frac{1}{x}-\frac{3}{2}=0$;

$3z^2-z-10=0$; $x^2+4=0$

Activité 3

Soit le trinôme du second degré ax^2+bx+c.

Vérifier que : $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$

Le réel b^2-4ac est appelé **discriminant** du trinôme ax^2+bx+c ou de l'équation : $ax^2+bx+c=0$. On le note Δ (lire « delta »).

L'écriture $a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$ est appelée forme canonique du trinôme ax^2+bx+c.

II Résolution de l'équation du second degré et factorisation du trinôme du second degré :

Activité 1

1) Calculer le discriminant de chacun des trinômes suivants :

$4x^2-4x+1$; $2x^2+x-1$; $9x^2-6x+4$

2) Vérifier que :

$4x^2-4x+1=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$; $2x^2+x-1=2\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right)$; $9x^2-6x+4=9\left(\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\right)$

3) Écrire, lorsque c'est possible, chacun des trinômes $4x^2-4x+1$; $2x^2+x-1$ et $9x^2-6x+4$ sous la forme factorisée : $a(x-\alpha)(x-\beta)$.

4) Compléter le tableau suivant :

Équation	Signe de Δ	Nombre de solutions	Forme factorisée du trinôme
$4x^2-4x+1=0$			
$2x^2+x-1=0$			
$9x^2-6x+4=0$			

Activité 2

Soit l'équation du second degré : $ax^2+bx+c=0$.

1) Vérifier que si $\Delta=0$ alors $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

2) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ dans le cas où $\Delta=0$.

Soit ax^2+bx+c un trinôme du second degré et $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant. Lorsque $\Delta=0$, l'équation : $ax^2+bx+c=0$ a une unique solution réelle, $x_0=-\frac{b}{2a}$ (dite « solution double ou racine double ») et on a : $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$.

Activité 3

1) Résoudre les équations suivantes :

$3x^2-\sqrt{6}x+2=0$;

$2x^2+\left(2+\sqrt{2}\right)x+3+2\sqrt{2}=0$

2) Donner une équation du second degré qui admet -3 comme solution double.

Activité 4

Soit l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$

1) Montrer que si $\Delta>0$ alors $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

2) En déduire que dans ce cas l'équation admet deux solutions distinctes que l'on déterminera.

Soit ax^2+bx+c un trinôme du second degré et $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant. Lorsque $\Delta>0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ a exactement deux solutions réelles distinctes :
$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et on a : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Activité 5

1) Résoudre les équations suivantes :

$$3x^2-6\sqrt{2}x+5=0$$
$$9x^2-11x+2=0$$

2) Donner deux équations du second degré qui admettent -2 et 5 comme solutions.

Activité 6

Montrer que si $\Delta<0$ alors $ax^2+bx+c\neq 0$ pour tout réel x .

Soit ax^2+bx+c un trinôme du second degré et $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant.
Lorsque $\Delta<0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solutions et le trinôme ax^2+bx+c ne peut pas s'écrire sous la forme de produit de deux binômes du premier degré.

Activité 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a. $2x^2+5x-7=0$ **b.** $x^2-2x-1=0$

c. $5x^2+x+4=0$ **d.** $2x^2-20x+50=0$

Activité 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$x^2+1{,}1x+0{,}1=0$; $x^2-3\sqrt{2}x+4=0$; $x^2-3=0$; $x^2-5x=0$

$(x+1)^2=16$; $5x^2+2x=4x^2-5x+8$; $3x(3x+2)=4x^2-6x-7$; $(2x+3)^2=3x-5$

Activité 9

Si cela est possible, factoriser les expressions ci-dessous en Produit de binômes du premier degré :

$P_1(x)=10x^2+3x-1$; $P_2(x)=2x^2-3x+10$ et $P_3(x)=\frac{1}{3}x^2-6x+27$

II Équations particulières du second degré :

Activité 1

1) Proposer une équation du second degré : $ax^2+bx+c=0$ telle que $ac<0$.
Cette équation admet-elle des solutions ?

2) L'équation : $2013^{2014}x^2+2014^{2015}x-2015^{2016}=0$ admet-elle des solutions ?

> Soit $ax^2+bx+c=0$ une équation du second degré.
> Si a et c sont de signes contraires alors l'équation admet deux solutions distinctes.

Activité 2

1) Donner un trinôme du second degré qui admet deux racines distinctes.

2) Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

a) Si l'équation du second degré : $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions distinctes alors a et c sont de signes contraires.

b) Si a et c sont de même signe alors l'équation du second degré : $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solutions.

Activité 3

Soit l'équation : $2x^2-5x+3=0$.

1) Calculer la somme des coefficients de l'équation.

2) Vérifier que 1 et $\frac{3}{2}$ sont les solutions de cette équation.

3) Que peut-on conjecturer ?

4) Cette conjecture est-elle vraie pour l'équation : $-x^2+3x-2=0$?

Activité 4

Soit $ax^2+bx+c=0$ une équation du second degré telle que $a+b+c=0$.

1) Vérifier que $ax^2+bx+c=(x-1)(ax-c)$.

2) Résoudre alors l'équation : $ax^2+bx+c=0$.

> Soit $ax^2+bx+c=0$ une équation du second degré.
> Si $a+b+c=0$ alors l'équation admet deux solutions $x_1=1$ et $x_2=\frac{c}{a}$.

Activité 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$2x^2 - 2015x + 2013 = 0$; $\sqrt{2}x^2 - \left(1+\sqrt{2}\right)x + 1 = 0$; $5x^2 - 10x + 5 = 0$

Remarque : 1 peut être la solution double d'une équation du second degré dont la somme de ses coefficients est nulle.

Activité 6

1) Donner une équation du second degré dont la somme du premier et du troisième coefficient soit égale à son deuxième coefficient.

2) Vérifier que l'équation : $2x^2 - 6x - 8 = 0$ répond à la première question.

3) **a)** Vérifier que -1 et 4 sont les solutions de l'équation : $2x^2 - 6x - 8 = 0$.
b) Que peut-on conjecturer ?

4) Cette conjecture est-elle valable pour l'équation proposée dans **1)**.

Activité 7

Soit $ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré telle que $a + c = b$.

1) Vérifier que $ax^2 + bx + c = (x+1)(ax+c)$.

2) Résoudre alors l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$.

Soit $ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré.
Si $a + c = b$ alors l'équation admet deux solutions $x_1 = -1$ et $x_2 = -\dfrac{c}{a}$.

Activité 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + \dfrac{3}{2} = 0$; $2^6x^2 + 2^5x - 2^5 = 0$

$\left(1-\sqrt{3}\right)x^2 + x + \sqrt{3} = 0$; $\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}x + \sqrt{2} = 0$

Remarque : -1 peut être la solution double d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ vérifiant : $a + c = b$.

Activité 9

Soit $ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré.

1) Montrer que si -1 et 1 sont solutions de l'équation alors b = 0 et a = -c.

2) La réciproque est-elle vraie ?

3) Donner la forme des équations du second degré qui admettent -1 et 1 comme solutions.

III Somme et produit des racines d'une équation du second degré :

Activité 1

Soit l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$.

On suppose qu'elle admet deux racines distinctes x_1 *et* x_2.

1) Montrer que : $x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}$.
2) Montrer que : $x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$.
3) Vérifier que les égalités établies restent vraies dans le cas d'une solution double.

Soit $ax^2+bx+c=0$ une équation du second degré admettant deux racines distinctes ou non x_1 et x_2. On a : $x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}$ et $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

Activité 2

On considère l'équation : $x^2-\left(2+\sqrt{5}\right)x+2\sqrt{5}=0$.

1) Vérifier que 2 est une racine de cette équation.
2) Déduire alors l'autre racine.

Exercice corrigé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2x^4-26x^2+72=0$.

On pose $u=x^2$

On obtient l'équation d'inconnue u : $2u^2-26u+72=0$

On calcule son discriminant : $\Delta=(-26)^2-4\times2\times72=100$

On remarque que $\Delta>0$ donc cette équation admet deux racines distinctes :

$$u_1=\frac{-(-26)+\sqrt{100}}{2\times2}=\frac{26+10}{4}=\frac{36}{4}=9$$

$$\text{et } u_2=\frac{-(-26)-\sqrt{100}}{2\times2}=\frac{26-10}{4}=\frac{16}{4}=4$$

On déduit alors les valeurs de x :

$u=x^2=9$ *équivaut à* $x=3$ *ou* $x=-3$

$u=x^2=4$ *équivaut à* $x=2$ *ou* $x=-2$

L'ensemble des solutions de cette équation est : $S_{\mathbb{R}}=\{-3;-2;2;3\}$.

Inéquations du second degré :

Activité 1

On considère les deux trinômes suivants : $P(x)=-14x^2+x+2011$ et $Q(x)=5x^2-15x+3$.

1) Chaïma assure que $P\left(2013^{2014}\right)<0$. Es-tu d'accord ?

2) Omar pourvoit que $Q(x)\geq 0$ uniquement lorsque x = 1 ou x = 3. Qu'en dis-toi ?

Soit ax^2+bx+c un trinôme du second degré.
Une inéquation du second degré est une inéquation qui a l'une des formes suivantes :
$ax^2+bx+c<0$; $ax^2+bx+c\leq 0$; $ax^2+bx+c>0$; $ax^2+bx+c\geq 0$.

Activité 2

Soient les trinômes $P(x)=2x^2-12x+18$, $Q(x)=-5x^2-5x+10$ et $R(x)=-2x^2+x-3$.

1) Calculer les discriminants des deux trinômes P(x) et Q(x).

2) Factoriser P(x) et Q(x) .Etudier alors leurs signes.

3) Calculer le discriminant de R(x) puis justifier que pour tout réel x , $R(x)<0$.

Activité 3

Soit $P(x)=ax^2+bx+c$ un trinôme du second degré admettant une racine double x_0.
Montrer que pour tout $x\neq x_0$, P(x) est du signe de a.

Soit $P(x)=ax^2+bx+c$ un trinôme du second degré.
Lorsque P(x) admet une racine double x_0
P(x) est du signe de a, pour tout $x\neq x_0$.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
P(x)		Signe de a	0	Signe de a	

Activité 4

Soit $P(x)=ax^2+bx+c$ un trinôme du second degré admettant deux racines distinctes x_1 et x_2.
Compléter le tableau ci-contre :
(On suppose dans ce tableau que $x_1<x_2$).

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$			0	+			
$x-x_2$				-	0		
$(x-x_1)(x-x_2)$			0	-	0		
$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$			0	Signe de (-a)	0		

Soit $P(x)=ax^2+bx+c$ un trinôme du second degré. Lorsque P(x) admet deux racines distinctes x_1 et x_2, $P(x)$ est du signe de a ,sauf lorsque x est entre les racines auquel cas P(x) et a sont de signes contraires.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
P(x)		Signe de a	0	Signe de -a	0	Signe de a	

Activité 5

Soit $P(x)=ax^2+bx+c$ un trinôme du second degré.

On rappelle que $P(x)=a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$. Que peut-on dire du signe du trinôme ax^2+bx+c dans le cas où $\Delta<0$?

Lorsque $\Delta<0$, le trinôme du second degré $P(x)=ax^2+bx+c$ est toujours du signe de a .

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
P(x)	Signe de a

Activité 6

Établir le tableau de signe de chacun des trinômes suivants :

$P_1(x)=-2x^2+8x-11$; $P_2(x)=-3x^2+4x-\dfrac{4}{3}$; $P_4(x)=2x^2-x-3$.

Activité 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$\dfrac{1}{3}x^2-4x+12\le 0$; $-x^2+5x+24>0$; $-3x^2+x-5\ge 0$

$16x^2-144>0$; $-3x^2-15x\le 0$.

Essentiel du Cours

Soit le trinôme défini par : $P(x)=ax^2+bx+c$ avec a≠0 Son discriminant est Δ= b²- 4ac			
	Equation $ax^2+bx+c=0$	Factorisation de $P(x)=ax^2+bx+c$	Tableau de signe de $P(x)=ax^2+bx+c$
Δ>0	Deux solutions : $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation $P(x)=0$.	x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation P(x) = 0 et $x_1<x_2$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & x_1 & & x_2 & +\infty \\ \hline P(x) & \text{Signe de (a)} & 0 & \text{signe de (-a)} & 0 & \text{signe de (a)} \end{array}$
Δ=0	Une seule solution : $\dfrac{-b}{2a}$	$P(x)=a(x-x_0)^2$ où x_0 est la solution de l'équation $P(x)=0$.	x_0 est l'unique solution de l'équation $P(x)=0$ $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & x_0 & +\infty \\ \hline P(x) & \text{Signe de (a)} & 0 & \text{signe de (a)} \end{array}$
Δ<0	Pas de solution.	P(x) n'est pas factorisable sous forme d'un produit de binômes du premier degré.	$\begin{array}{c\|cc} x & -\infty & +\infty \\ \hline P(x) & \text{Signe de (a)} & \end{array}$

Une méthode de résolution d'équations du second degré datant du IX^e siècle

Dans ses écrits, AL-KHAWARIZMI propose une méthode pour déterminer une solution de certaines équations du second degré. Il expose sa méthode sur un exemple.

A Écrit avec les notations actuelles, l'équation qui sert d'exemple est : $x^2+10x=39$
Dans le langage de l'époque, x² est appelé « un carré » et x est appelé « une racine »
AL-KHAWARIZMI ne s'intéresse qu'aux nombres positifs

Extraits du procédé d'AL-KHAWARIZMI
(trad.Roshdi Rasched parue, Al-Khawarizmi, le commencement de l'algèbre, coll « Sciences dans l'Histoire », éd.Blanchard).

Un carré plus dix racines sont égaux à trente- neuf dirhams.	$x^2+10x=39$
Partage en deux moitiés le nombre des racines	$\dfrac{10}{2}=5$
Il vient, dans ce problème, cinq, que tu multiplies par lui-même ;	$5^2=25$
tu l'ajoutes à trente-neuf ;	$25+39=64$
tu prends la racine	$\sqrt{64}=8$
de laquelle tu soustrais la moitié du nombre des racines	$8-\dfrac{10}{2}=8-5=3$
qui est la racine du carré que tu veux	X = 3

1) Vérifier que 3 est bien une solution de l'équation : $x^2+10x=39$.
2) Retrouver l'autre racine de cette équation .

B On considère l'équation : $x^2+8x=20$
1) Appliquer le procédé d'Al-Khawarizmi pour déterminer une racine de cette équation.
2) Vérifier par le calcul que le résultat obtenu est bien une solution de l'équation : $x^2+8x=20$

Vrai-Faux

Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

1. $(2x+1)^2+9$ est la forme canonique du trinôme $4x^2+4x+10$

2. le trinôme « $-x^2+2x$ » admet comme discriminant : $\Delta=2^2-4\times(-1)=8$

3. Le réel -2 est une solution de l'équation $x^2+x+6=0$

4. L'équation $3x^2+2013=0$ n'a pas de solutions.

5. Le discriminant de l'équation $(2x-1)(-x+3)=0$ est négatif.

6. L'équation $1509x^2-18x-12=0$ admet deux solutions.

7. Si $x>2$ alors $x^2-x+6<0$

8. Si $-2x^2-2x+4>0$ alors $-2<x<1$.

9. Si l'on double les coefficients d'un trinôme du second degré admettant deux racines, alors ses racines sont multipliées par 2.

10. Si -1515 est le discriminant d'un trinôme du second degré P(x) alors P(x) < 0 .

11. L'équation proposée a une seule solution.

a. $(x+2)^2=0$ **b.** $2x^2-3x+1=0$

c. $x^2-5x=0$ **d.** $-x^2+6x-9=0$

12. Une forme factorisée de $-3x^2+5x+2$ est :

a. $-3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)$ **b.** $(-x+2)(3x+1)$

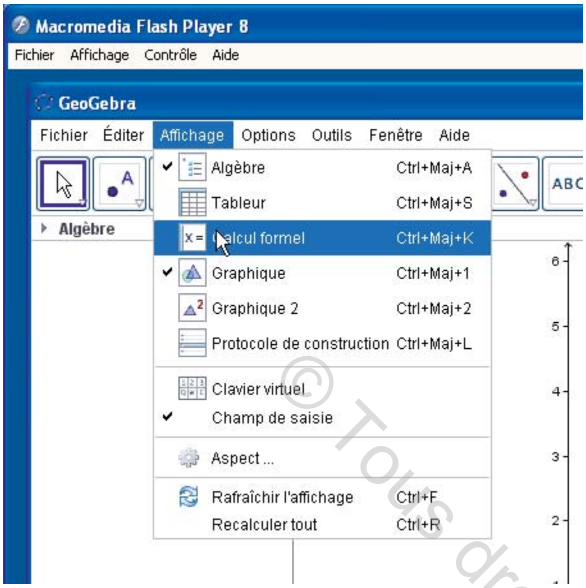
c. $-3(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)$ **d.** $(3x-6)\left(-x+\frac{1}{3}\right)$

Q C M

Pour chaque proposition, indiquer la seule proposition exacte.

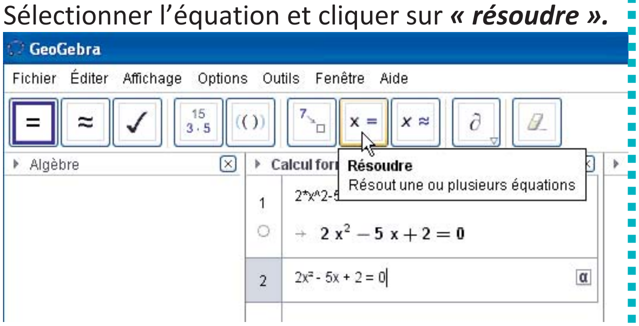
	A	B	C	D
1. L'équation : $3x^2-5x+2=0$	a une seule solution	a deux solutions -1 *et* $-\frac{2}{3}$	n'a pas de solution	a deux solutions 1 *et* $\frac{2}{3}$
2. L'équation : $(x-3)^2=16$	a une seule solution le réel 7	deux solutions les réels -1 et 7	deux solutions, les réels -3 et 3	une seule solution le réel -1
3. L'ensemble des solutions de l'inéquation : $2x^2+x-1\geq 0$ est	$]-\infty;-1[\cup]\frac{1}{2};+\infty[$	$\left[-1;\frac{1}{2}\right]$	$]-\infty;-1]\cap\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$	$]-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$
4. Le tableau de signe suivant x | $-\infty$ $+\infty$ ..... | -	Peut être celui de $3x^2-5x+4$	Peut être celui de $-3x^2+5x+4$	Peut être celui de $3x^2-5x-4$	Peut être celui de $-3x^2+5x-4$
5. Le trinôme du second degré ax^2+bx+c est strictement positif sur $\mathbb{R}$ si :	$a>0$ et $b^2-4ac>0$	$a<0$ et $b^2-4ac>0$	a, b et c sont strictement positifs	$a>0$ et $b^2-4ac<0$
6. $\frac{1}{4}x^2-\frac{4}{5}x+\frac{16}{25}\leq 0$ a pour solutions	$\mathbb{R}$	$\left]-\infty;\frac{8}{5}\right]$	$\left\{\frac{8}{5}\right\}$	$\varnothing$

Dans cette activité nous allons utiliser le programme **GéoGebra.**
Lancer **GéoGebra,** aller à l'onglet : « ***affichage »*** puis : « ***calcul formel »,***

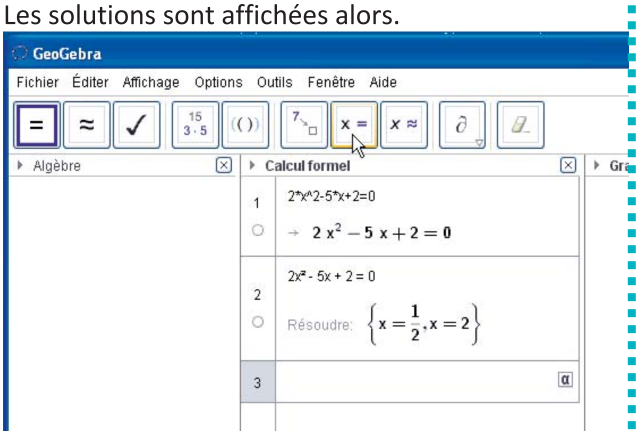


Une nouvelle fenêtre ***: « Calcul formel »*** s'ouvre.
Dans la zone numéroté (1) écrire : x^2 - 2*x + 3 = 0
Puis cliquer ***entrer,*** l'équation : $x^2 - 2x + 3 = 0$ s'affiche.

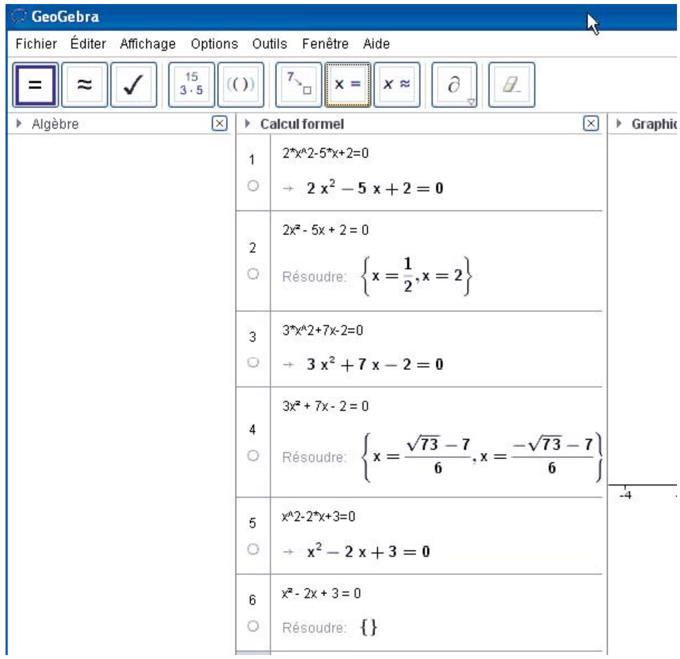
Sélectionner l'équation et cliquer sur ***« résoudre ».***



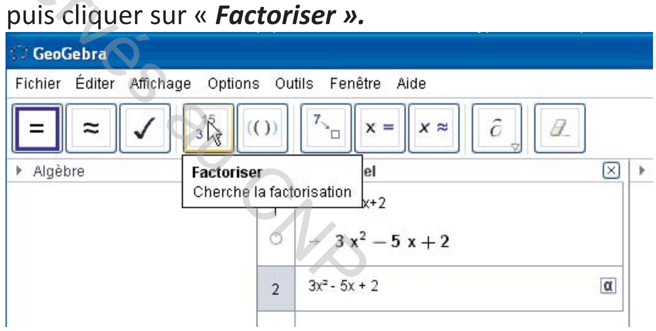
Les solutions sont affichées alors.



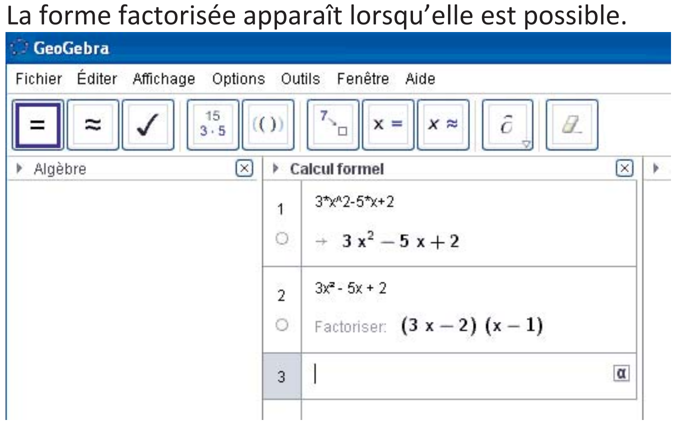
Reprendre le même procédé avec d'autres exemples.
Dans le cas d'une équation qui n'a pas de racines, le résultat { } s'affiche indiquant l'ensemble vide.



On peut factoriser un trinôme de second degré, pour cela faite entrer l'expression du trinôme :
3*x^2 – 5*x + 2 sélectionner le trinôme qui apparaît puis cliquer sur « ***Factoriser ».***



La forme factorisée apparaît lorsqu'elle est possible.



1 Dans chaque cas, écrivez le trinôme sous forme canonique.

a) $x^2 - 16x + 1$ b) $6x^2 + x - 1$
c) $-x^2 + 2x + 4$ d) $x^2 + 9x$
e) $-4x^2 + x + 3$ f) $x^2 + 1$
g) $-x^2 + 7x - 10$ h) $3x^2 + 12x + 12$

2 Résoudre les équations suivantes :

a) $x^2 - x - 6 = 0$ b) $u^2 + 5u - 6 = 0$
c) $x^2 - 3x = 0$ d) $1 - t - 2t^2 = 0$
e) $y^2 + 2013 = 0$ f) $-x^2 + 2x - 1 = 0$
g) $-x^2 = 2014$ h) $2x^2 + 5x = 0$
i) $3x^2 - 12x + 12 = 0$ j) $9 - (3x - 1)^2 = 0$
k) $x^3 - 5x = 0$

3 Résoudre les équations suivantes :

a) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$
b) $0,02x^2 - 1,72x + 1,7 = 0$
c) $-3x^2 + 7x + 1 = 0$
d) $\left(1 + \sqrt{5}\right)x^2 + \sqrt{5}x - 1 = 0$

4 Résoudre les équations suivantes :

a) $-m^2 + m + 20 = 0$
b) $t - 1 + 3t^2 = 0$
c) $y^2 + y = -1$
d) $\dfrac{m - m^2 + 20}{m^2 + m + 1} = 0$
e) $\dfrac{m - m^2 - 20}{m^2 - 16} = 0$

5 Vérifier que 2 est une solution de l'équation :
$6x^2 - 5x - 14 = 0$
Déduisez-en alors l'autre solution.

6 Soit α la mesure d'un angle en degré tel que $0 < \alpha < 90$
Résoudre l'équation d'inconnue x :
$\left(\cos^2 \alpha\right)x^2 + x + \left(\sin^2 \alpha\right) = 0$

7 Comment choisir le réel m pour que l'équation :
$2x^2 + x - m = 0$ admette -1 pour racine ?
Déduisez-en alors l'autre solution.

8
a) Pour quelle valeur de m l'équation $x^2 - 4x + m - 1 = 0$ admet-elle une solution double ?
b) Calculer cette solution.

9 Ecrivez les trinômes suivants sous forme d'un produit de binômes du premier degré

- $A(x) = x^2 - 7x + 10$
- $P(x) = 2x^2 - 5x$
- $Q(x) = -3x^2 + 4x + 4$
- $S(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

10 Dans chacun des cas suivants, déterminer un trinôme du second degré admettant :
a) Les réels 2 et -5 comme racines.
b) Le réel -7 comme racine double.

11 On considère le trinôme du second degré :
$Q(x) = \sqrt{2}x^2 - x - \sqrt{2}$
a) Calculer $Q\left(\sqrt{2}\right)$
b) Factoriser alors $Q(x)$

12 Factoriser les trinômes suivants :

- $x^2 - x - 2$
- $\left(a^2 + 1\right)x^2 - a^2x - 1$; a un réel quelconque.

13 Etudier suivant les valeurs de x, le signe des trinômes suivants :

a) $-x^2 + 6x - 5$ b) $-x^2 + 2x - 3$
c) $2x^2 - 8x$ d) $3x^2 - 9$
e) $x^2 - 4x + 4$ f) $3^{2013}x^2 + 2013^3$

14 Résoudre les inéquations suivantes :

a) $x^2 - 3x + 2 > 0$ b) $x^2 + 25 \geq 0$
c) $m^2 + m - 20 \leq 0$ d) $x^2 - 2x < 0$
e) $x^2 + 7x + 12 > 0$ f) $-x^2 - 9 > 0$
g) $2y^2 < 4 - y$ h) $24x > 2x^2 + 72$

15 Soit le trinôme $P(x) = -x^2 + 11x - 21$
Les propositions suivantes sont-elles vraies ?
a) $P(2013{,}2012) > 0$ b) $P(-5{,}005) < 0$
c) $P(10{,}5) \leq 0$ d) $P(0) = 0$

16 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $2x^2+3x-5=0$ b) $-x^2-10x+6=0$

c) $-4x^2+9x-22=0$ d) $x^2+6x+9=0$

e) $3x^2-9x+6=0$ f) $7x^2+9=0$

g) $3x^2-5x=0$ h) $9x^2-42x+49=0$

i) $x^2+\frac{1}{25}=\frac{2}{5}x$ j) $x^2+12=5x\sqrt{2}$

17 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{6x^2-x+1}{2x-1}=3$ b) $\frac{x+6}{x^2-6x+5}=1$

c) $\frac{x+3}{2x-1}=\frac{x-3}{x-1}$ d) $\frac{3x^2+x-4}{x^2-2x+1}=2$

18 On considère l'expression

$A(x)=2x^3-5x^2-x+6$

a) Vérifier que $A(x)=(x-2)(2x^2-x-3)$

b) Résoudre alors l'équation $A(x)=0$

19 a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $9x^2+10x+1=0$

b) Déduire alors les solutions de l'équation $9x^4-10x^2+1=0$

c) Résoudre alors les équations :

- $2x^4+x^2-6=0$
- $x^4+4x^2-5=0$
- $x^4-8x^2+12=0$

20 Factoriser si c'est possible chacun des trinômes.

a) $A(x)=5x^2+6x-8$

b) $B(x)=4x^2+8x+13$

c) $C(x)=x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$

d) $D(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{x}{5}-\frac{26}{15}$

e) $E(x)=(1-7x)^2+10$

f) $F(x)=(2x-1)^2-(x+4)(3x-6)$

21 Déterminer le réel c de telle sorte que le réel 3 soit solution de l'équation $-x^2+7x+c=0$.
Trouver l'autre solution.

22 Déterminer le réel a tel que l'équation $ax^2+3x+9=0$ n'admet qu'une solution.
Quelle est cette solution

23 Déterminer la longueur d'un terrain de sport de périmètre 180m et dont l'aire est égale à 1001 m2

24 Déterminer un nombre tel que, si on ajoute 18 à son triple, on trouve son carré.

25 La somme d'un réel non nul et son inverse est $\frac{58}{21}$. Quel est ce réel ?

26 Déterminer trois nombres entiers consécutifs, sachant que la somme des carrés de ces nombres est égale à 1877.

27 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{9}{x}-\frac{x}{3}=2$

b) $x+\frac{1}{x-3}=5$

c) $x^3-x^2-6x=0$

28 Dresser le tableau de signe des trinômes suivants :

a) $A(x)=x^2+2x-24$

b) $B(x)=12x^2+5x+11$

c) $C(x)=9x^2+6x+1$

d) $D(x)=3x^2-4x+1$

29 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

a) $x^2+9x-10>0$

b) $-x^2+x-2\geq 0$

c) $3x^2-x+15<0$

d) $9x^2+6x+1>0$

e) $x^2+6x<0$

30 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

a) $(x+3)^2-16<0$

b) $11x^2+15x-9\leq 9x+8$

c) $(1-9x)^2>(5x+3)^2$

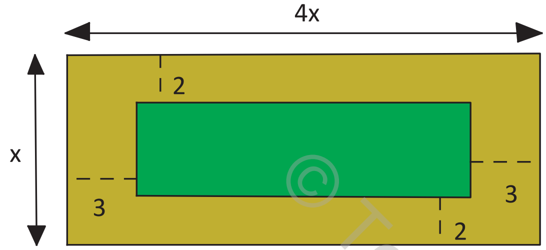
d) $-9x^2+x<4$

31 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

a) $\frac{5x^2+18x+13}{x-7}\leq 0$ b) $\frac{5}{x-6}\leq 3x-2$

32 Un cycliste a parcouru une distance de 90km. S'il avait parcouru 2km de plus à l'heure, la durée du trajet aurait été diminuée d'une demi-heure. Calculer sa vitesse en km/h.

33 Une pelouse rectangulaire entourée par une zone de circulation comme présentée ci-dessous

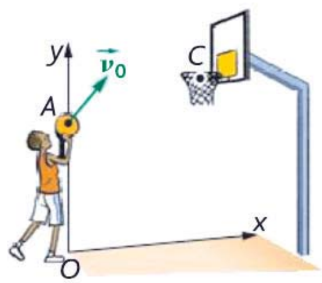


terrain pour avoir une pelouse de 120 m²

1) Montrer que l'expression $A(x)$ de l'aire de la pelouse peut s'écrire : $A(x) = 4x^2 - 22x + 24$

2) Déterminer x pour que l'aire de la pelouse soit égale à 120 m²

34 Lors d'un match de basket, on doit lancer le ballon à l'intérieur d'un cercle métallique.



On assimile le ballon à un point qui doit passer par le centre C du cercle métallique situé à 3,05 m du sol.
D'un point A situé à 2m du sol, un joueur lance le ballon avec une vitesse V_0 (en $m.s^{-1}$)
Le théorème du centre d'inertie permet de décrire la trajectoire du ballon par :

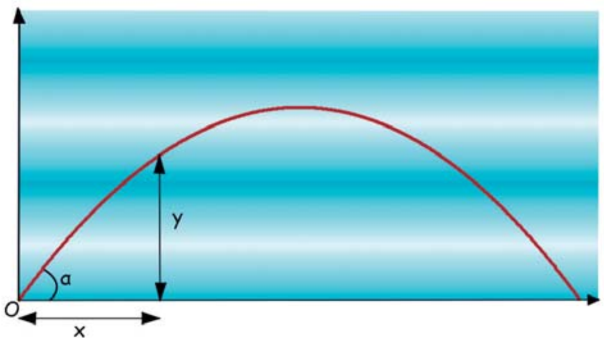
$$y = \frac{-25}{V_0^2}x^2 + 2x + 2$$

1) Le joueur se trouve à 7m du panier de basket. Avec quelle vitesse V_0 (en $m.s^{-1}$) doit-il lancer le ballon pour que celui-ci atteigne le centre du panier de basket ?

Dans la suite, on donne à V_0 cette valeur.

2) Voulant arrêter le ballon, un adversaire, situé à 90 cm du joueur, saute verticalement en levant les bras à une hauteur de 2,70m.
Le panier sera-t-il marqué ?

35 Un ballon de football est frappé avec une vitesse initiale v dans une direction formant un angle α avec l'horizontale. On appelle y la hauteur atteinte par le ballon quand celui-ci est situé à une distance x du point où il a été frappé, distance mesurée au sol (voir figure ci-dessous).



On prend $v = 20 m.s^{-1}$ et $\alpha = 45°$
On admet alors que le ballon a une trajectoire définie par la relation suivante : $y = -\frac{1}{40}x^2 + x$

1) On admet que la hauteur maximale atteinte par la balle est 10m. Déterminer à quelle distance x de son point de départ se trouve-elle ?

2) Le joueur qui a frappé la balle cherche à lober le gardien de but qui s'est avancé (on suppose que le joueur, le gardien de but et le centre de la ligne de but sont alignés). Le gardien bras levés, a une hauteur de 2,50m et il est situé à 25m du joueur qui a tiré le ballon.
Montrer que, même si le gardien saute en l'air, le ballon passera au-dessus de lui.

3) Après être passé au-dessus du gardien, le ballon poursuit sa course.

a) Résoudre l'équation $-\frac{1}{40}x^2 + x = 0$. À quelle distance x de l'endroit où il a été tiré le ballon retombera-t-il ?

b) On suppose que la ligne de but est située à une distance de 41m de l'endroit où le ballon a été tiré et que celui-ci, une fois retombé au sol, roule 2m avant de s'arrêter.
Le joueur marquera-t-il le but ?justifier.

4) À quelles distances x du point de départ, sa balle aurait-elle pu être interceptée par un joueur autre que le gardien ? (on suppose qu'en sautant, la tête d'un tel joueur atteint une hauteur maximale de 2,50m.)On donnera des valeurs approchées à 0,01 m prés.

CHAPITRE 2

Système de deux équations à deux inconnues réelles

Contenu du chapitre

- Pour commencer
- Cours
  - Équation du premier degré à deux inconnues réelles
  - Système de deux équations à deux inconnues réelles
  - Résolution d'un système linéaire
- S'auto-évaluer
- Activité TICE
- Exercices et problèmes

AU FIL DU TEMPS

La méthode de Gauss (qui consiste à résoudre un système linéaire) est due à Karl Friedrich Gauss astronome , mathématicien et physicien allemand (1777 ,Brunswick-1855, Göttingen)

Pour commencer

Activité

Indiquer pour chaque énoncé ,la (ou les) bonne(s) réponse(s).

		A	B	C
1	Si p = 2 et q = -3 alors :	2p – 3q = 0	3p + 2q = 0	-12p - 8q = 0
2	La valeur de l'expression $2x+3y+2$ pour x = 0 et y = 1 est :	4	5	7
3	La solution de l'équation $-3x+6=0$ est :	-2	3	2
4	Si $3a+b=3a-b$ alors :	a = 0	b = 0	a = 0 et b = 0
5	Le plan est muni d'un repère cartésien $(O;\vec{i};\vec{j})$ On considère le point M(a+2 ; 3-a) avec a un réel	On peut trouver a tel que M(0 ; 5)	On peut trouver a tel que M(3 ; 4)	On peut trouver a tel que M(5 ; 0)
6	La relation $3x-2y=1$ est vérifiée :	Pour $x=\frac{1}{6}$ et $y=-\frac{1}{4}$	Uniquement pour $x=\frac{1}{6}$ et $y=-\frac{1}{4}$	Pour toutes les valeurs de x et y
7	Si $2x+3y=6$ alors :	$x=6-3y$	$x=3-\frac{3}{2}y$	$y=2-3x$
8	Si $2x+5y=3$ et $5x-3y=-3$ alors :	$7x+2y=6$	$-3x+8y=6$	$19y=9$
9	Si un cycliste roule constamment à la vitesse de 20 Km/h alors il parcourait 52 Km en	2h 30 min	2h 32 min	2h 36 min

I Équation du premier degré à deux inconnues :

Activité 1

Une équipe de football a gagné 20 points sur un nombre de matchs joués sans défaite.

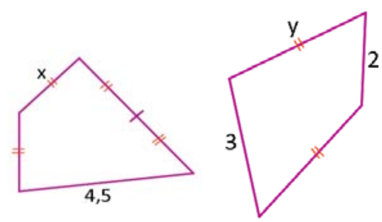
1) Compléter le tableau suivant :

x : nombre de matchs gagnés	1		
y : nombre de matchs nuls		8	
Nombre de matchs joués			

2) **a)** Quel est le nombre maximal de matchs nuls.

b) Quel est le nombre maximal de matchs gagnés.

Activité 2



1) Le fait que les deux figures suivantes aient le même périmètre se traduit par l'équation :

a) $8{,}5x = 7y$

b) $4x + 4{,}5 = 2y + 5$

c) x + 4,5 = y + 5

2) Compléter le tableau suivant :

Les valeurs de x et y	Les deux périmètres sont égaux **(vraie ou faux)**
$x = \frac{5}{8}$; $y = 1$	
x = 3 ; y = 2	
$x = 1$, $y = \frac{7}{4}$	
$x = \dots$, $y = \dots$	**vraie**

a, b et c sont trois réels tels que a et b sont non tous nuls.
L'équation *ax+by+c = 0*, où x et y sont deux inconnues réelles, est appelée équation du premier degré à deux inconnues.
Résoudre une telle équation c'est trouver tous les couples (x , y) pour lesquels l'égalité est vraie.
Chaque couple vérifiant l'égalité est appelé solution de cette équation.

Exemple : 2x +3y = -2 est une équation du premier à deux inconnues **x** et **y** .
Le couple (**5** ; **4**) est une solution de cette équation car : $2\times5-3\times4=-2$.

Remarque : Attention à l'ordre des nombres dans un couple ! (**4** ; **5**) n'est pas une solution.

Activité 3

On considère l'équation à deux inconnues : $2x - y = -2$

1) Trouver y lorsque x = 10. Trouver alors un couple de solution.

2) pour chacun des couples suivants, préciser s'il est solution de cette équation ou non :

(0 ;2)	(1 ;-3)	(2 ;2)

II Système de deux équations du premier degré à deux inconnues :

Activité 1

Un groupe de 25 jeunes cyclistes participent à une course en deux équipes E_1 et E_2.
Après une heure de course 5 cyclistes du deuxième équipe ont lâché, et c'est ainsi que l'effectif de l'équipe E_1 est devenu égal à quatre fois le nombre de cyclistes de l'équipe E_2 restant dans la course.
On désigne par x le nombre de cyclistes de l'équipe E_1 et par y celui de cyclistes de l'équipe E_2.
Traduire les données par des équations.

Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues est la donnée de deux équations du premier degré à deux inconnues :

Système : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

Résoudre un tel système c'est trouver, s'ils existent, tous les couples (x,y) qui sont solutions des deux équations à la fois.
Chaque couple est appelé solution du système.

Exemple : le système $\begin{cases} 2x-y=1 & \rightarrow (E_1) \\ -4x+3y=1 & \rightarrow (E_2) \end{cases}$ est un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y .

Le couple $(2;3)$ est solution de chacune des équations *(E_1)* et *(E_2)*, donc il est solution du système

Le couple (-1 ; -3) est une solution de l'équation *(E_1),* mais il n'est pas solution de l'équation *(E_2),* donc il n'est pas solution du système .

Activité 2

On considère le système $\begin{cases} 4x+y=5 \\ 5x+3y=1 \end{cases}$

Parmi les couples suivants, lequel est solution de ce système ? Justifier la réponse.

(1 ;1) ; (0,5 ;3) ; (1 ;-2) ; (2 ;-3)

III Méthodes de résolution d'un Système de deux équations :

1) Principe de la méthode de résolution par substitution

Activité 1

Iheb a payé 4,5 dinars pour avoir 3 croissants et 4 pains chocolat.
Par contre Omar a payé 2,75 dinars pour avoir 1 croissants et 3 pains chocolats.
On désigne par c le prix en dinars d'un croissant et par p celui d'un pain chocolat.

1) Ecrire deux équations qui traduisent les données.
2) a) Exprimer c en fonction de p dans l'une des deux équations.
   b) Remplacer c par l'expression trouvée dans l'autre équation et résoudre l'équation obtenue, d'inconnue p .
3) En déduire le prix d'un croissant et celui d'un pain chocolat.

Résolution par substitution :

1 Exprimer une inconnue en fonction de l'autre dans l'une des deux équations.

2 Remplacer dans l'autre équation cette inconnue par l'expression trouvée.

3 Résoudre l'équation obtenue, à une seule inconnue.

4 Utiliser l'expression trouvée dans la première étape pour déterminer l'autre inconnue.

Activité 2

Omar, cycliste, gravit un col (aller/retour) et parcourt 36 km, il effectue la montée à la vitesse de 12 km/h et la descente à la vitesse de 40 km/h. sachant que le temps de la descente est le 1/3 de celui de la montée, déterminer le temps de l'aller et celui du retour.

Activité 3

Une mule se plaignant d'être trop chargé dit à l'ânesse : « Si je te donnais un de mes sacs, nous en aurions autant toutes les deux ! »
L'ânesse : « oui, et si je te donnais une de mes sacs, tu en aurais le double de mois »
Combien de sacs portent la mule et l'ânesse chacune ?

Activité 4

Reprendre les données de l'activité N°1 page 26

1) Donner un système qui traduit les données.
2) Résoudre par substitution le système obtenu. En déduire l'effectif de chaque équipe.

2) Principe de la méthode de résolution par élimination

Activité 1

À la terrasse d'un café, Mohamed observe deux commandes distinctes et note les montants à payer en dinars.
Il pense pouvoir retrouver le prix d'un café et le prix d'un soda.
On note x le prix d'un soda et y le prix d'un café.

1) Traduire par une équation, notée (1), la première commande.
2) Traduire par une équation, notée (2), la seconde commande.
3) Noter (3) l'équation traduisant une commande comprenant 2 sodas et 2 café.
4) En utilisant les commandes (2) et (3), en déduire le prix d'un café.
5) Trouver ensuite le prix d'un soda.

Activité 2

On considère le système suivant : $\begin{cases} -3x+2y=5 \\ 2x-y=-3 \end{cases}$

1) Multiplier les deux membres de la première équation par 2 et ceux de la deuxième par (-3). Vérifier que le nouveau système est $\begin{cases} -6x+4y=10 \\ -6x+3y=9 \end{cases}$

2) Garder la première équation et soustraire la deuxième de la première. Que remarquez-vous ?
3) Achevez la résolution.

Résolution par élimination :

1 Multiplier les deux membres des deux équations par des nombres convenablement choisis de manière à obtenir le même coefficient ou des coefficients opposés de l'une des inconnues dans les deux équations.

2 Garder l'une des nouvelles équations obtenues et faire, suivant le cas, la somme ou la différence des deux équations.

3 Résoudre l'équation obtenue, à une seule inconnue.

4 Utiliser l'autre équation pour déterminer la valeur de l'autre inconnue.

Activité 3

On remplit 14 pots avec exactement 6 kg de confiture. Certains pots ont une contenance de 500g et d'autres une contenance de 375g.
Déterminer le nombre de pots utilisés de chaque type.

Activité 4

Un train est constitué de deux locomotives identiques et de dix wagons-citernes du même modèle. Ce train mesure alors 151 m de long.
Après avoir vidé le contenu des wagons-citernes, on décroche une locomotive et on ajoute deux nouveaux wagons-citernes vides.
Le train ainsi constitué mesure 160m de long.
On cherche la longueur x d'une locomotive et la longueur y d'un wagon-citerne.

1) Écrire un système de deux équations à deux inconnues représentant la situation.
2) Résoudre le système obtenu.
3) En déduire la longueur, en mètres, d'une locomotive et celle d'un wagon-citerne.

Activité 5 Exemple de système n'admettant pas de solution

Soit le système $(1)\begin{cases} -4x+2y=2 \\ -6x+3x=-9 \end{cases}$

1) Justifier que la résolution du système (1) se ramène à la résolution du système $(2)\begin{cases} y=2x+1 \\ y=2x-3 \end{cases}$
2) Conclure quant à la résolution du système (1) .

Activité 6 Exemple de système admettant une infinité de solutions

Soit le système $\begin{cases} 4,5x+1,5y=3 \\ -7,5x-2,5y=-5 \end{cases}$

1) $(0;2)$ est-il solution du système ?
2) Peut-on trouver un autre couple solution de ce système ?
3) Exprimer dans chacune des deux équations, y en fonction de x.
4) Que peut-on penser des expressions obtenues ?
5) En déduire l'ensemble des couples qui sont solutions de ce système.

Activité 7

Un parcours à vélo est composé d'une partie plate de 20 km et d'une partie en côte de 10 km.
Anis a effectué tout le parcours en 108 minutes.
Sa vitesse sur une surface plate est supérieure de 15 km/h à sa vitesse en côte.
Quelles sont les vitesses moyennes de Anis en côte et sur du plat ?

Système de deux équations du 1er degré à deux inconnues

Définition

Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues désignées par x et y est de la forme : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ sont deux équations du premier degré à deux inconnues x et y.

Résolution d'un système

Méthode par élimination

Exemple : Résoudre le système $\begin{cases} 7x-2y=1 & (1) \\ 3x+5y=18 & (2) \end{cases}$

Étape	Action	Expression
1	On choisi d'éliminer y dans l'une des équations	Pour avoir : -10y dans (1) : on multiplie par 5 10y dans (2) : on multiplie par 2
2	On multiplie les deux membres de la première équation par 5 et les deux membres de la seconde équation par 2	$\begin{cases} 7x-2y=1 & \times(5) \\ 3x+5y=18 & \times(2) \end{cases}$
3	On garde la première équation et on additionne membre à membre pour obtenir la deuxième équation	$\begin{cases} 7x-2y=1 \\ 41x=41 \end{cases}$
4	On trouve la valeur de x	$\begin{cases} 7x-2y=1 \\ x=1 \end{cases}$
5	On calcule ensuite la valeur de y dans la première équation en remplaçant x par 1	$\begin{cases} y=3 \\ x=1 \end{cases}$

Le couple (1 ; 3) est la solution du système

Méthode par substitution

Exemple : Résoudre le système $\begin{cases} x-2y=-1 & (1) \\ 4x+3y=29 & (2) \end{cases}$

Etape	Action	Expression
1	Dans l'équation (1), on exprime x en fonction de y	$x-2y=-1$ *donne* : $x=2y-1$ (3)
2	On garde l'équation $x=2y-1$ et dans l'équation (2), on remplace (on substitue) x par 2y – 1	$\begin{cases} x-2y=-1 \\ 4\times(2y-1)+3y=29 \end{cases}$ *équivaut à* $\begin{cases} x-2y=-1 \\ y=3 \end{cases}$
3	On remplace y par sa valeur dans l'équation (3)	$\begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$

Vrai-Faux

Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

1. x et y sont deux réels ayant une somme égale à 1. en ajoutant 3 au plus petit parmi eux, on trouve la valeur de l'autre diminuée de 2.

x et y sont solutions du système $\begin{cases} 3x+3y=3 \\ -x+y=5 \end{cases}$

2. Omar a résolu par élimination le système :

$$\begin{cases} 3x+5y=15 \\ 55x-15y=-13 \end{cases}$$

Je multiplie par 3 et j'obtiens le système :

$$\begin{cases} 9x+15y=45 \\ 55x-15y=-13 \end{cases}$$

J'ajoute chaque membre des deux équations :

$64x = 32$ *donc* $x = \frac{32}{64} = 0{,}5$.

Je remplace et je résous :

$3x + 5 \times 0{,}5 = 15$ *donc* $3x + 2{,}5 = 15$

$3x = 13{,}5$ *donc* $x = 4{,}5$

Le couple-solution est : $(0{,}5 \,;\, 4{,}5)$.

Son ami Iheb lui dit que sa réponse est fausse.

3. Tout système de deux équations du premier degré à deux inconnues admet au moins une solution.

4. Le couple (2 ; 0,5) est solution du système : $\begin{cases} 2x+3y=5{,}5 \\ 3x+y=4{,}05 \end{cases}$

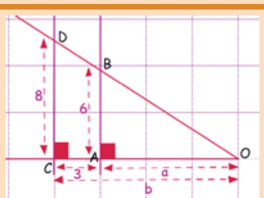
5. La seule solution du système : $\begin{cases} 3x-6y=12 \\ -5x+10y=-20 \end{cases}$ est (6 ; 1) .

6. Le système : $\begin{cases} -6x+3y=3 \\ 4x-2y=5 \end{cases}$ n'a pas de solutions.

7. (-1 ; 3) et (1 ; 3) sont deux solutions du système : $\begin{cases} x-3y=-10 \\ 3x-y=0 \end{cases}$

Q C M

Pour chaque question, indiquer la seule proposition exacte.

	A	B	C	D
Pour 24 stylos et 12 cahiers, on paie 60 D et pour deux stylos et deux cahiers, on paie 7 D. Quel système peut traduire cet énoncé ?	$\begin{cases} 24x+12y=60 \\ x-y=-7 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x-2y=10 \\ 2x+2y=7 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y=10 \\ 2x+2y=7 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y=5 \\ 2x+2y=7 \end{cases}$
Le système $\begin{cases} x-y=4 \\ -3x+3y=-12 \end{cases}$ n'est pas vérifié par :	(10 ; 6)	(0 ;-4)	(2 ; 6)	(4 ; 0)
Le système $\begin{cases} -5x+6y=4 \\ 2{,}5x-3y=-2 \end{cases}$	n'admet pas de solutions	admet exactement deux solutions	admet une unique solution	admet une infinité de solutions
 Les nombres a et b sont solutions du système :	$\begin{cases} 3b-3a=9 \\ 3b-4a=3 \end{cases}$	$\begin{cases} b-a=3 \\ 3b+4a=0 \end{cases}$	$\begin{cases} b-a=1 \\ 3b-4a=0 \end{cases}$	$\begin{cases} b-a=3 \\ -3b+4a=0 \end{cases}$

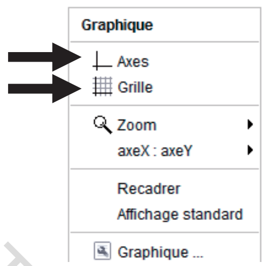
Objectifs : *Conjecturer une longueur à l'aide du logiciel GéoGebra puis la démontrer à l'aide d'un système*

Problème : Amin a déposer dans le coffre de sa voiture de longueur 90 cm, représentée ci-dessous par le segment $[AB]$, ses deux cannes à pêche, représentées par les segments $[DB]$ et $[AC]$, mesurant respectivement 1,02m et 1,06m. il a rempli son coffre d'autres accessoires de pêche, en laissant libre la partie délimitée par le triangle AEB.

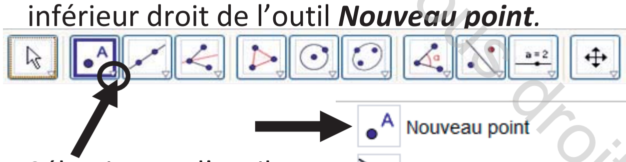
Combien mesure la longueur EF ?

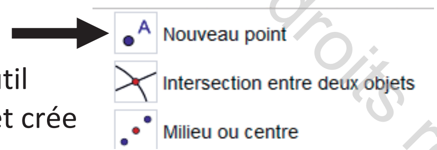
Lancer le logiciel GeoGebra

Dans le but d'avoir un plan de travail vierge, enlevez la grille et les axes en cliquant sur le bouton droit de la souris et en sélectionnant les éléments à enlever.



1. Cliquez sur le petit triangle dans le coin inférieur droit de l'outil ***Nouveau point***.

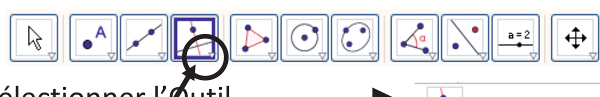




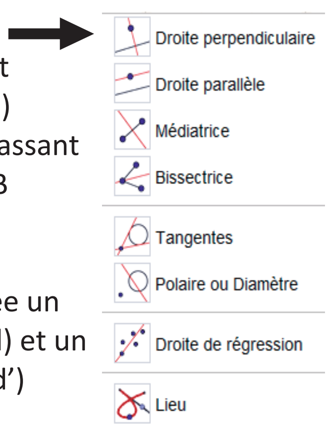
Sélectionner l'outil ***Nouveau point*** et crée un point A

2. Dans la barre de Saisie Entrer « segment [A,9] On obtient alors un segment $[AB]$ de 9 cm

3. Cliquez sur le petit triangle dans le coin inférieur droit de l'outil ***Droite perpendiculaire***

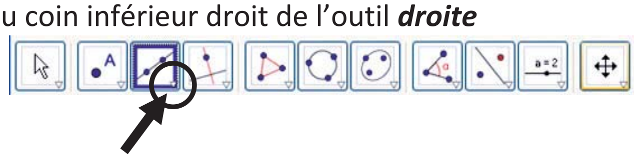


Sélectionner l'outil ***Droite perpendiculaire*** et tracer les droites(d) et (d') perpendiculaires à (AB) passant respectivement par A et B



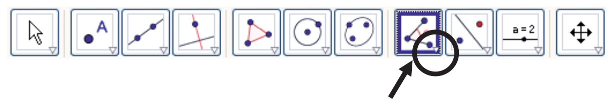
4. Sélectionner l'outil ***Nouveau point*** et crée un point D de la droite (d) et un point C de la droite (d')

5. Cliquez maintenant sur le petit triangle situé au coin inférieur droit de l'outil ***droite***

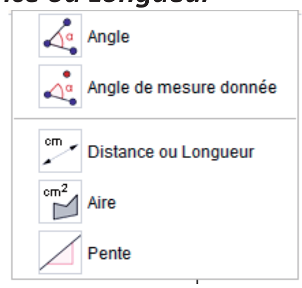


Cliquez sur l'outil ***Segments entre deux points*** et tracer les deux segment [DB] et [AC]

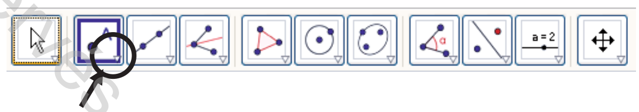
6. Cliquez maintenant sur le petit triangle situé au coin inférieur droit de l'outil



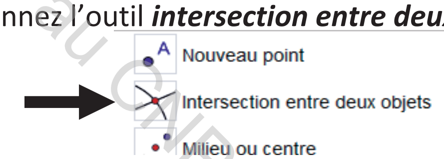
Sélectionnez l'outil ***Distance ou Longueur*** et sélectionner les extrémités du segment [DB] et [AC] puis déplacer les points D et C de façon à avoir DB = 10,2 cm et AC = 10,6 cm



7. Cliquez sur le petit triangle dans le coin inférieur droit de l'outil **Nouveau point**.



Sélectionnez l'outil ***intersection entre deux objets***

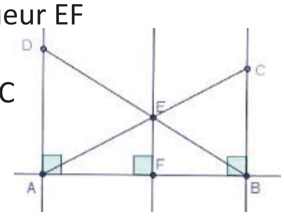


et crée le point E intersection de (DB) et (AC)

8. Sélectionner l'outil ***droite perpendiculaire*** et tracer la perpendiculaire à (AB) passant par E puis crée le point F de son intersection avec (AB)

9. Afficher la mesure de la longueur EF

***Résolution du système* :**



10. Dans les triangles DBA et ABC Calculer les longueurs DA et BC.

11. On pose x = EF et y = FB En utilisant le théorème de de Thalès, montrer que 90x-48y=0.

12. En utilisant le théorème de Thalès dans le triangle ABC, montrer que $90-y=\frac{90}{56}x$

13. Résoudre le système obtenu et déduire EF-

1 On considère l'équation :

$(E): 3x - 2y + 5 = 0$

1) Vérifier que (-1,1) et (1,4) sont solutions de l'équation *(E)*
2) Déterminer le réel a pour que le couple $\left(\frac{a}{2};3a\right)$ soit solution de *(E)*.

2 On considère le système $\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases}$

Parmi les couples suivants, lequel est solution de ce système ? Justifier la réponse.

(1 ;1) (0,5 ;3) (1 ;-2) (2 ;-3)

3 Résoudre chaque système par substitution :

a. $\begin{cases} x + 5y = 12 \\ 4x - 3y = 2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 5x + y = 12 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} a + b = 7 \\ 2a + 5b = -7 \end{cases}$ d. $\begin{cases} 2x - y = -2 \\ 6x + 3y = 12 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 4a + 3b = 2 \\ 3a + b = 1 \end{cases}$ f. $\begin{cases} -3x - 3y = -12 \\ -x + y = -2 \end{cases}$

4 Résoudre chaque système par élimination

a. $\begin{cases} -2x + 5y = 8 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ 3x - 5y = 11 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 5x + 2y = 6,2 \\ 3x - 4y = -7,2 \end{cases}$ d. $\begin{cases} 2a + 4b = 4 \\ 6a + 3b = 3 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x - 5y = 13 \\ -5x + 3y = -21 \end{cases}$ f. $\begin{cases} a + 5b = 21 \\ 3a - 2b = 12 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 2a + 3,5b = 94,75 \\ 2a + 10b = 176 \end{cases}$

5 Résoudre par la méthode la plus judicieuse chacun des systèmes :

a) $\begin{cases} x + 3y = 12 \\ 2x - 5y = -9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 7y = 9 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ x + 7y = 12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x - 3y = 9 \\ 2x + 7y = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x + 3y = 9 \\ x - 9y = -1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 8x - 3y = 2 \\ 6x + 4y = 1 \end{cases}$

6
1) Expliquer pourquoi le système $\begin{cases} -12x + 20y = 112 \\ 63x - 21y = -168 \end{cases}$ a les mêmes solutions que le système $\begin{cases} -3y + 5y = 28 \\ 9x - 3y = -24 \end{cases}$
2) Résoudre le système par la méthode d'élimination.

7
1) Résoudre le système $\begin{cases} 6x + 5y = 57 \\ 3x + 7y = 55,5 \end{cases}$
2) Pour classer des photos, un magasin propose deux types de rangement : des albums ou des boîtes.

Iheb achète 6 boîtes et 5 albums et paie 57 dinars ; Omar achète 3 boîtes et 7 albums et paie 55,7 dinars.

Déterminer le prix d'une boîte et celui d'un album ?

8 a et b désignent deux nombres tels que $a > 3$ et $b > 7$. L'unité de longueur est le mètre.

On considère un rectangle de largeur a et de longueur b.

1) On augmente la largeur du rectangle de 4m et on diminue sa largeur de 7m.
   L'aire du rectangle reste la même.
   Écrire une équation qui traduit cette information.
2) On diminue la largeur du rectangle de 3m et on augmente sa longueur de 9m.
   Là encore, l'aire du rectangle reste la même.
   Écrire une équation qui traduit cette information.
3) Résoudre le système formé par les deux équations.
4) En déduire les dimensions et l'aire du rectangle.

9
1) Résoudre le système $\begin{cases} 8x + 3y = 39,5 \\ 7x + 9y = 50,5 \end{cases}$
2) Une balade d'une heure en mer est

Proposée à deux groupes de personnes.
Le premier groupe, composé de 8 adultes et de 3 enfants, paie 39,5 dinars. Le second, composé de 7 adultes et de 9 enfants, paie 50,5 dinars.

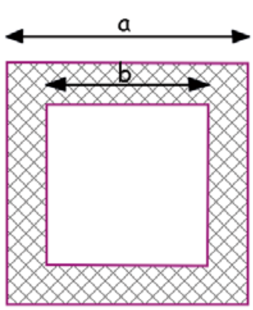
Quel est donc le prix d'un ticket pour un adulte ? pour un enfant ?

10 Un bouquet constitué de 4 roses et de 4 tulipes coûte 10 dinars.
Un bouquet constitué de 4 roses et 2 tulipes coûte 8 dinars.

1) En notant y le prix d'une tulipe et x le prix d'une rose, écrire un système traduisant le problème.
2) Résoudre le système et déduire le prix d'une rose et celui d'une tulipe.

11

1) La différence des périmètres des deux carrés ci-dessous est égale à 16 cm. Traduire par une équation d'inconnues a et b cette information.



2) L'aire comprise entre les deux carrés est égale à 76cm^2 , montrer que l'on peut traduire cela par l'équation $a^2 - b^2 = 76$
3) Déduire des questions précédentes que $a + b = 19$
4) Résoudre le système obtenu et trouver les valeurs de a et b.

12 On veut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{12}{(x+2)} + \dfrac{18}{(y+1)} = 10 \\ \dfrac{3}{(x+2)} + \dfrac{4}{(y+1)} = 5 \end{cases}$$

1) Si l'on pose $a = \dfrac{1}{(x+2)}$ et $b = \dfrac{1}{(y+1)}$, écrire le nouveau système obtenu
2) Résoudre ce système et trouver les valeurs de a et b.
3) En déduire les valeurs de x et y.

12

1) Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$$
2) En déduire les solutions des systèmes :

a) $\begin{cases} 2|x| + |y| = 5 \\ 3|x| + 4|y| = 10 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{y+2} = 5 \\ \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{4}{y+2} = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2|2-x| + y^2 = 5 \\ 3|2-x| + 4y^2 = 10 \end{cases}$

13 Au départ du bus, il y'a deux fois plus d'hommes que de femmes. Six hommes descendent au premier arrêt et six femmes montent, il y'a alors deux fois plus de femmes que d'hommes.
Quel est le nombre d'hommes et de femmes au départ du bus.

14 Deux tonneaux contiennent ensemble 700 litres et sont pleins d'huile. Si on soutire 105 litres d'huile du premier et 85 litres du deuxième, il reste la même quantité d'huile dans les deux tonneaux.

Quelle est la capacité de chacun des tonneaux ?

CHAPITRE 3

Fonctions affines

Contenu du chapitre

- Pour commencer
- Cours
  - Fonction linéaire
  - Fonction affine
  - Sens de variation d'une fonction affine
  - Système et application affine
- S'auto-évaluer
- Activités TICE
- Exercices et problèmes

AU FIL DU TEMPS

Le mot « fonction » est utilisé pour la première fois par Gottfried Leibniz (1646-1716, photo ci-contre) à la fin du XVII^{e} siècle à propos de l'étude des courbes.
La notion est ensuite affinée par Leonhard Euler (1707-1783) qui définit les fonctions à partir d'expressions algébriques littérales (comme, par exemple, 2x + 4xx) et qui est le premier à utiliser la notion f(x).
Enfin, la fonction en tant que correspondance, telle qu'on la définit aujourd'hui, n'émerge qu'au milieu du XIX^{e} siècle, pour devenir une notion réellement centrale en mathématiques.

Pour commencer

Activité 1 — Proportionnalité

Se rappeler

Les réels x,y,z et t sont respectivement proportionnels aux réels non nuls a, b, c et d s'il existe un réel non nul k tel que

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{t}{d}=k$$

Le nombre k s'appelle le coefficient de proportionnalité

Indiquer pour chaque proposition la (ou les) bonne(s) réponse(s)

<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th></tr>
<tr><td>Les nombres 3 ; 7 ; 13 Sont respectivement proportionnels aux nombres</td><td>12 ; 35 ; 52</td><td>15 ; 35 ; 26</td><td>12 ; 28 ; 52</td></tr>
<tr><td>Ce tableau de données correspond à une situation de proportionnalité :</td><td><table><tr><td>5</td><td>3</td><td>8,2</td></tr><tr><td>2,5</td><td>1,5</td><td>4,1</td></tr></table></td><td><table><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>4</td><td>9</td><td>16</td></tr></table></td><td><table><tr><td>3</td><td>30</td></tr><tr><td>40</td><td>400</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>80% du prix d'un tenu de sport vaut 50 dinars. Le prix de ce tenu est :</td><td>40 dinars</td><td>60 dinars</td><td>62,5 dinars</td></tr>
</table>

Activité 2 — Repère cartésien du plan

Se rappeler

Soient O, I et J trois points non alignés du plan

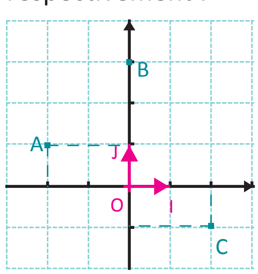
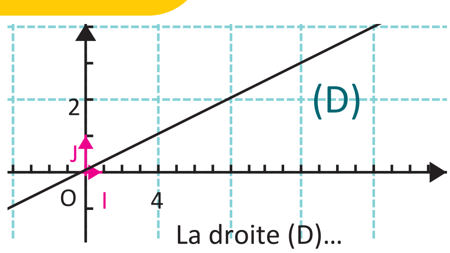
Le triplet $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ est appelé repère cartésien du plan

Pour tout point M du plan il existe un unique couple (x ; y) tels que :

$$\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OI}+y\overrightarrow{OJ}$$

(x ; y) est le couple de coordonnées de M dans le repère $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$

Indiquer pour chaque proposition la (ou les) bonne(s) réponse(s)

<table>
<tr><th></th><th>A</th><th>B</th><th>C</th></tr>
<tr><td>Les coordonnées des points A, B et C sont respectivement :

</td><td>(-2 ; -1)
(0 ; 3)
(1 ; -2)</td><td>(-2 ; 1)
(3 ; 0)
(-1 ; 2)</td><td>(-2 ; 1)
(0 ; 3)
(2 ; -1)</td></tr>
<tr><td>

La droite (D)…</td><td>Passe par l'origine</td><td>Passe par le point A(6,3)</td><td>Passe par le point B(16 ; 4)</td></tr>
</table>

I Fonction linéaire :

1) Expression d'une fonction linéaire

Activité 1

Un fabricant vend des paquets de cartes visites à 5.7 dinars chacun.

1) a) Recopier et compléter ce tableau :

Nombre de paquets	0	1	2	3	4
Prix payé (en Dinars)					

b) Le prix payé est-il proportionnel au nombre de paquets achetés ?

2) On désigne par x le nombre de paquets achetés et par P(x) le prix de ces paquets. Exprimer p(x) en fonction de x.

Activité 2

Un constructeur automobile annonce dans une publicité que son véhicule consomme 6,5 litres de carburant aux 100 km.

1) Calculer la consommation pour 200km, 500km, 150km et 70km.

2) On désigne par L(x) le nombre de litres de carburant consommés associé à un parcours de x $_{km}$. Exprimer L(x) en fonction de x.

3) Le réservoir de la voiture contient 45 litres et il est plein. Quelle distance maximale peut-elle parcourir ?

Soit ***a*** un nombre réel.
Le procédé qui, à chaque réel x associe le réel $f(x)=ax$, est une **fonction linéaire f de coefficient a**. On note $f : x \mapsto ax$. Lire f est la fonction qui à x associe ax
On écrit aussi $f(x)=ax$

Vocabulaire :

✓ Soit $f : x \mapsto \frac{1}{3}x$

- f est la fonction linéaire de coefficient $a=\frac{1}{3}$
- Dans l'égalité $f(-15)=-5$, -5 désigne l'**image de** -15 par f et -15 désigne l'**antécédent** de -5 par f

✓ La fonction linéaire $f : x \mapsto 0$ est appelée la fonction nulle.

Activité 3

On considère la fonction linéaire f définie par $f : x \mapsto -4x$.

1) Calculer l'image par f de chacun des réels : 4 ; -6 ; 7 ; 0 et 1.

2) Déterminer l'antécédent par f de chacun des réels : 45 ; $\frac{-2}{3}$ et $\sqrt{2}$.

Activité 4

1) Soit g la fonction linéaire telle que g(1) = -2.
Calculer l'image de 2013 par g.

2) Soit h une fonction linéaire vérifiant $h\left(\sqrt{2}\right)=2$. Calculer $h\left(\sqrt{3}\right)$.

2) Représentation graphique d'une fonction linéaire

Activité 5

Soit f une fonction linéaire.

1) Compléter le tableau suivant :

2) Soit $(O;I;J)$ un repère du plan.

a) Placer les points $M(x,f(x))$ avec $x\in\{-3;-1;0;2;5\}$.

b) Quelle conjecture peut-on émettre ?

3) Tracer la droite D passant par O et A(-1 ;-3).

4) **a)** Soit B le point de la droite D d'abscisse 1,5. Placer le point B et lire son ordonnée.

b) On désigne par C le point de la droite D d'ordonnée -6. Placer le point C et lire son abscisse.

c) Que remarque-t-on quand aux coordonnées des points B et C ?

d) Placer un point M(x ;y) tel que y différent de f(x). Le point M appartient-il à la droite D ?

Soit (O,I,J) un repère du plan et f une fonction linéaire.
On admet que l'ensemble des points $M(x,f(x))$ avec x un réel, appelé représentation graphique de la fonction linéaire f, est une droite passant par l'origine.

Vocabulaire : Soit D la représentation graphique d'une fonction linéaire *g* dans un repère (O,I,J). La relation $y=g(x)$ est dite une équation de la représentation graphique de *g*.
On note $D: y=g(x)$.

Exemple : Soit la fonction linéaire $h: x\mapsto\sqrt{3}x$ et Δ sa représentation graphique dans un repère (O,I,J). On a ainsi , $\Delta: y=\sqrt{3}x$. On dit que $\sqrt{3}$ est le **coefficient directeur** de Δ.

Activité 6

On donne un repère et une droite D passant par l'origine

1) Soit f une fonction linéaire tel que 1,5 est le coefficient directeur de sa représentation graphique Δ.

a) Tracer Δ

b) Donner une équation de Δ

c) Quelle est l'abscisse du point G appartenant à la droite Δ et d'ordonnée $\frac{-2012}{3}$.

2) La droite D représente-t-elle une fonction linéaire ? si oui identifier cette fonction.

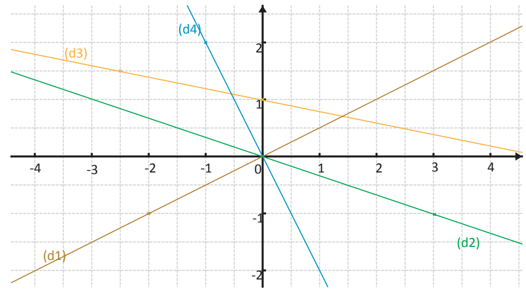
Activité 7

On utilise les représentations graphiques ci-contre.

1) Quelles sont les droites représentant chacune une fonction linéaire ? Justifier la réponse.

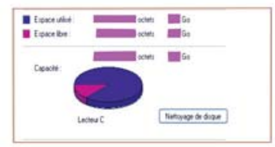
2) Quelle est la droite qui représente la fonction $f : x \mapsto -\frac{1}{3}x$? Justifier la réponse.

3) Déterminer les fonctions g et h dont les Représentations Graphiques respectives sont (d_1) et (d_4).



Activité 8

Amin télécharge un nouveau jeu vidéo sur son ordinateur.
À la fin de cette opération, il s'aperçoit que l'espace libre du disque dur a diminué de 12% .
On note ***N*** l'espace libre du disque dur avant le téléchargement.



1) **a)** Exprimer en fonction de ***N*** l'espace occupé par le jeu.
b) Exprimer en fonction de ***N*** l'espace libre restant après cette installation.
c) Montrer que l'espace libre restant sur son disque dur est égal à ***0,88N***

2) Déterminer la fonction f qui donne, en fonction de ***N***, l'espace libre après une diminution de 12%. Que peut-on dire de la fonction f ?

3) Après le téléchargement, il reste à Amin 660 Go d'espace libre.

Activité 9

Le 1er marathon des olives a été organisé le 16 décembre 2012 à Sfax. Parmi les participants Wajdi est un athlète tunisien qui doit parcourir les 42 km en deux boucles.
Sur la base de ses records sur 2000 et 3000 mètres, il a été établi qu'il possède une ***VMA (vitesse maximale aérobie) de 18 km/h .*** On sait qu'un athlète peut soutenir **75%** de sa ***VMA*** tout au long de l'épreuve .

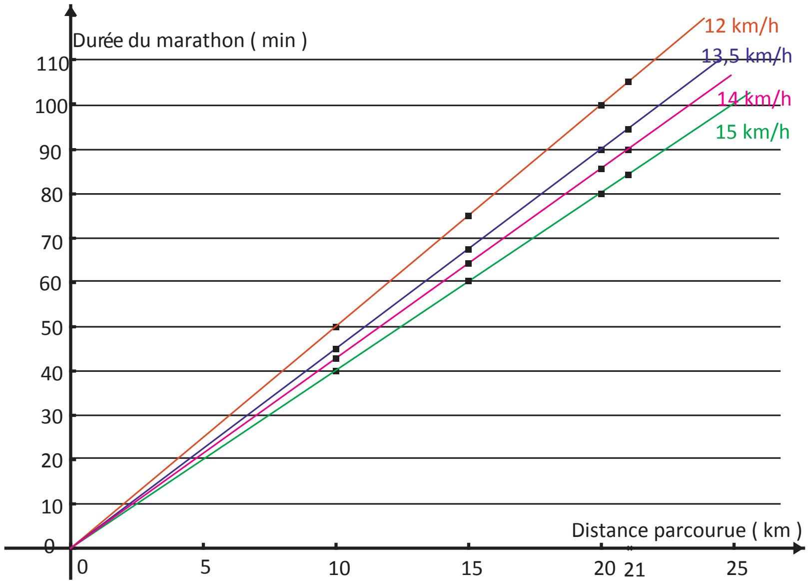
1) **a)** Déterminer l'expression de la fonction temps *(t)* en fonction de la distance parcourue *(d)* .
b) Déterminer une estimation du chrono de Wajdi .

2) Utiliser les représentations Graphique suivant pour répondre aux questions suivantes.

a) Reconnaître la droite qui représente l'athlète tunisien et déterminer son chrono à la fin de la première boucle.

b) Reconnaître la droite qui représente l'athlète qui a emporté ce marathon et déterminer son chrono.

c) A la fin de la première boucle le premier athlète dépasse le dernier de 22 minutes . Cette affirmation est-elle vraie ?



II Fonction affine :

1) Expression d'une fonction affine

Activité 1

La direction d'une piscine municipale a fixé l'abonnement à 20 dinars pour accéder à la piscine avec un prix de 3 dinars pour une heure de natation.

1) Déterminer le coût d'une semaine pour un adhérent qui passe une heure quotidiennement.
2) Déterminer le mensuelle pour un adhérent qui nage deux heures chaque séance trois fois par semaine.
3) Déterminer l'expression C(x) du coût pour un adhérent qui passe x heurs à la piscine.

Activité 2

Pour calculer le montant hors taxe d'une facture, la Steg prend en compte deux éléments : l'abonnement et la consommation.
L'abonnement est de 2,2 dinars par mois (quelque soit la consommation) et pour l'autre partie, le tarif est de 0,09 dinars par KWh consommé.

1) Quel est le montant annuel de l'abonnement ?
2) On désigne par m(x) le montant hors taxe d'une facture pour une consommation annuelle de x KWh. Exprimer m(x) en fonction de x.
3) Calculer la consommation en KWh correspondant à une facture de 250 dinars .

Soit a et b deux réels.
Le procédé qui, à chaque réel x associe le réel $ax+b$, est appelé fonction affine de coefficients a et b .
On note $f : x \mapsto ax+b$ (On lit : *f* qui à x associe *ax + b*).
Ou bien $f(x)=ax+b$. (On lit : $f(x)$ est l'image de x par *f*) .

Vocabulaire :

- ✓ Soit la fonction affine *f* définie par $f(x)=-2x+3$
  - *f* est la fonction affine de premier coefficient -2 et de deuxième coefficient 3.
  - Dans l'égalité $f(-1)=5$ on a 5 est l'image de -1 par *f* et -1 est l'antécédent de 5.
- ✓ Si $b=0$, $f(x)=ax$ et dans ce cas f est linéaire. Donc les fonctions linéaires sont aussi des fonctions affines.
- ✓ Si $a=0$, $f(x)=b$ et dans ce cas f est une fonction constante.

Activité 3

a) Déterminer l'expression d'une fonction affine f de premier coefficient -2 et vérifiant $f(2)=1$.
b) Déterminer l'antécédent de 3 par f.

Activité 4

Soit f une fonction affine vérifiant : $f(-2)=5$ *et* $f(1)=2$

a) Déterminer le premier coefficient a de f.
b) Déterminer l'expression de f.
c) Calculer l'image de 0 par f.

2) Représentation graphique d'une fonction affine

Activité 5

Soit f une fonction affine telle que $f(x)=2x-1$

1) Compléter le tableau suivant :

x	0	1	5	-2	...	...
f(x)	-1	...	...	...	-3	0

2) Soit $(O;I;J)$ un repère du plan

a) Placer les point $M(x, f(x))$ avec $x \in \{-2;-1;0;1;5\}$
b) Quelle conjecture peut-on émettre ?

Soit (O,I,J) un repère du plan et f une fonction affine.
On admet que l'ensemble des points $M(x, f(x))$, appelé représentation graphique de f, est une droite.

Vocabulaire: Soit D la représentation graphique d'une fonction affine h dans un repère (O,I,J).
La relation *y = h(x)* est dite une équation de la représentation graphique de la fonction h.
On note $D: y = h(x)$

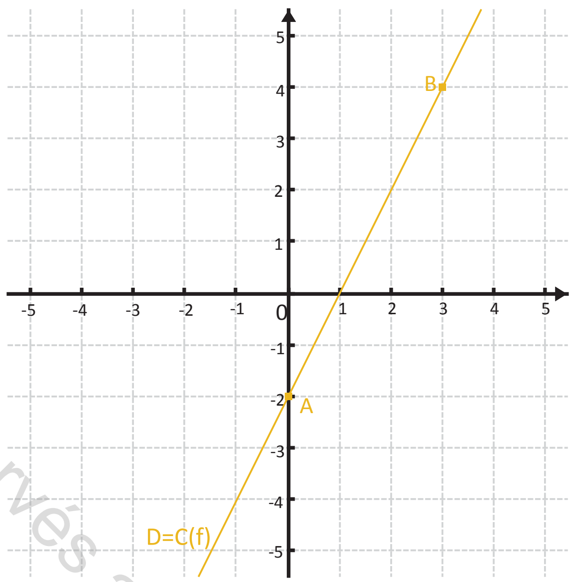
Exemple : Soit la fonction f définie par : $f(x) = 2x - 1$ et par Δ sa représentation graphique dans un repère (O,I,J). On a ainsi, $\Delta : y = 2x - 1$
2 est le coefficient directeur de la droite Δ

Activité 6

Dans un repère (O,I,J) on a tracé la représentation graphique d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$.

1) Utiliser le graphique ci-contre pour déterminer : $f(0)$, $f(3)$ et $f(1)$.

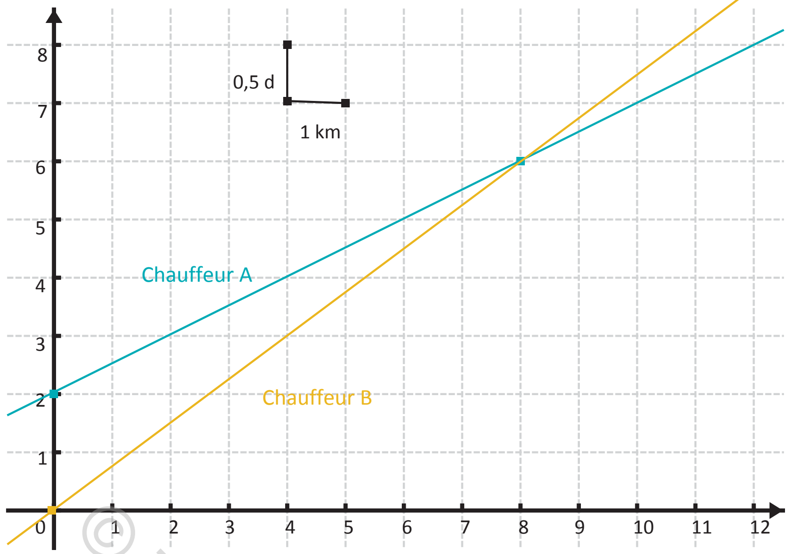
2) En déduire les deux coefficients de la fonction affine f.



Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine et Δ sa représentation graphique dans un repère (O,I,J)
Le coefficient b est appelé l'ordonné à l'origine (c'est l'ordonnée du point d'abscisse 0 de la droite Δ)

Activité 7

Le graphique ci-dessous représente le prix demandé par deux chauffeurs de taxis en fonction de la distance parcourue. Le chauffeur de taxis A demande un prix fixe de prise en charge, puis 0,5 dinars par kilomètre parcouru.
Le chauffeur de taxi B ne demande pas de prise en charge, mais prend 0,75 dinars par Kilomètre parcouru.
Pour un trajet de x kilomètres, on note $f(x)$ et $g(x)$, les prix respectifs payés au chauffeur A et au chauffeur B.



1) a) Quel est le prix de prise en charge demandé par le chauffeur A.
   b) Quel est le prix payé pour le chauffeur A pour un trajet de 4 km.
   c) Un client a choisi le taxi B pour parcourir un trajet qui a été payé 3 dinars. Quel est la longueur de ce trajet.
2) Quel est la longueur du trajet où les deux chauffeurs demandent la même somme. Quelle est cette somme ?
3) Est-il raisonnable de choisir le taxi A pour parcourir un trajet de 5 km.
4) Exprimer f(x) et g(x) en fonction de x.

3) Sens de variation d'une fonction affine

Activité 8

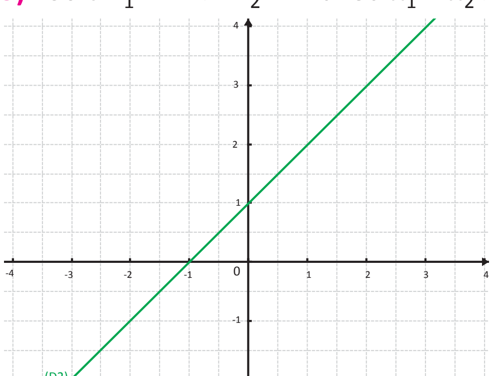
On a représenté ci-dessous deux fonctions affines f et g dont les Représentations graphiques respectives sont (D1) et (D2).

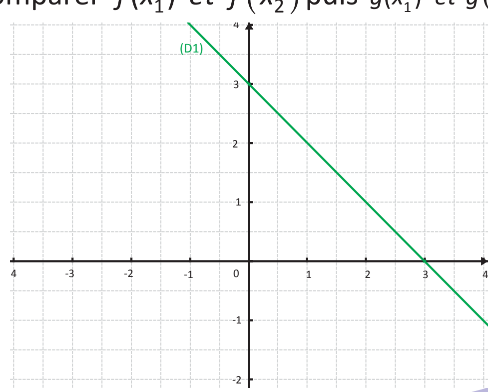
1) Déterminer les expressions de f et g.
2) a) Compléter les tableaux suivants :

x	-1	0	1	2
$f(x)$				

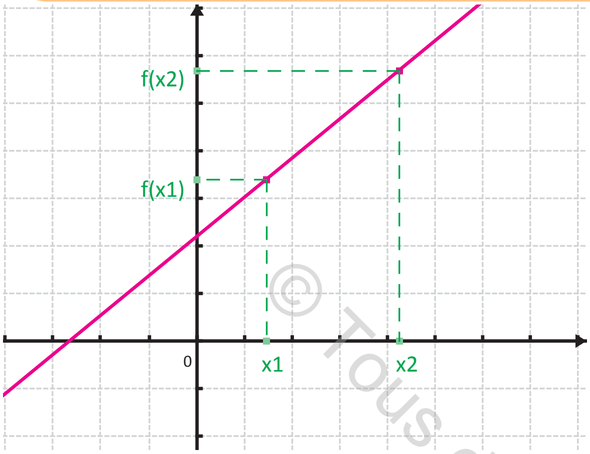
x	-2	-1	1,5	3
$g(x)$				

   b) Que remarque-t-on ?
3) Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ avec $x_1 < x_2$. Comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$ puis $g(x_1)$ et $g(x_2)$

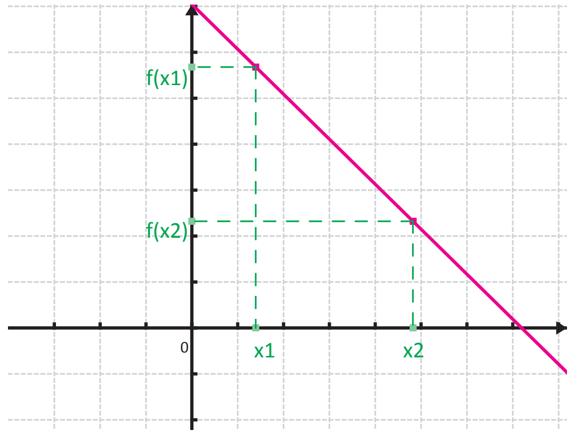




Dire qu'une fonction affine f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$ signifie que pour tous réels x_1 *et* x_2 ,
$x_1 < x_2$ *implique* $f(x_1) < f(x_2)$



Dire qu'une fonction affine f est **strictement décroissante** sur $\mathbb{R}$ signifie que pour tous réels x_1 *et* x_2 ,
$x_1 < x_2$ *implique* $f(x_1) > f(x_2)$



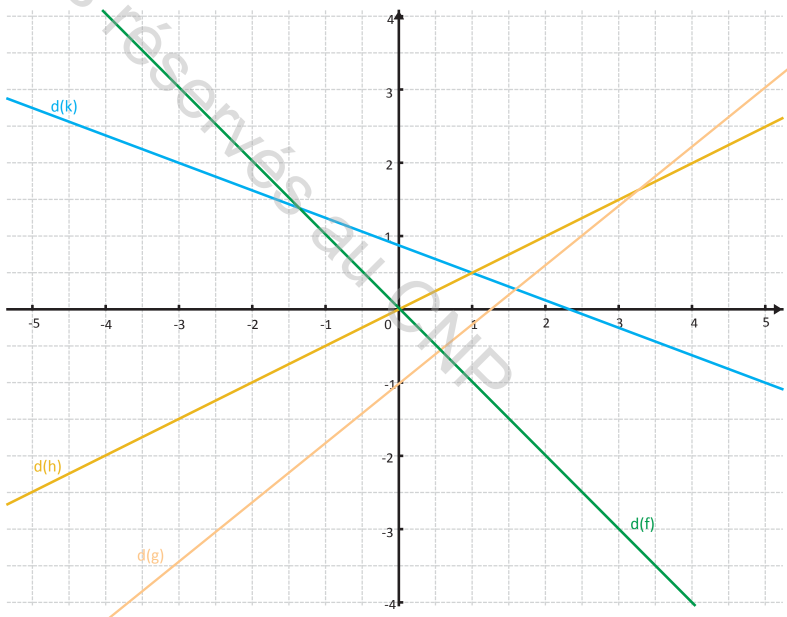
Activité 9

On donne ci-dessous les représentations graphiques de quatre fonctions affines f, g, h et k .

1) Déterminer le sens de variation de chacune des fonctions f,g,h et k.

2) Compléter le tableau suivant :

Fonction	f	g	h	k
Signe du premier coefficient de la fonction				
Sens de variation				



Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$
- ✓ Si $a > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- ✓ Si $a < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Activité 10

Parmi les fonctions affines suivantes, déterminer celles qui sont strictement croissantes.

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}x - 3 \;;\quad g : x \mapsto -x + 3 \;;\quad h : x \mapsto \frac{-3}{2}x + 1 \text{ et } k : x \mapsto 3x$$

III Système et application affine :

Activité 1

1) Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine dont la droite (AB) est sa représentation graphique.
Utiliser le graphique pour :

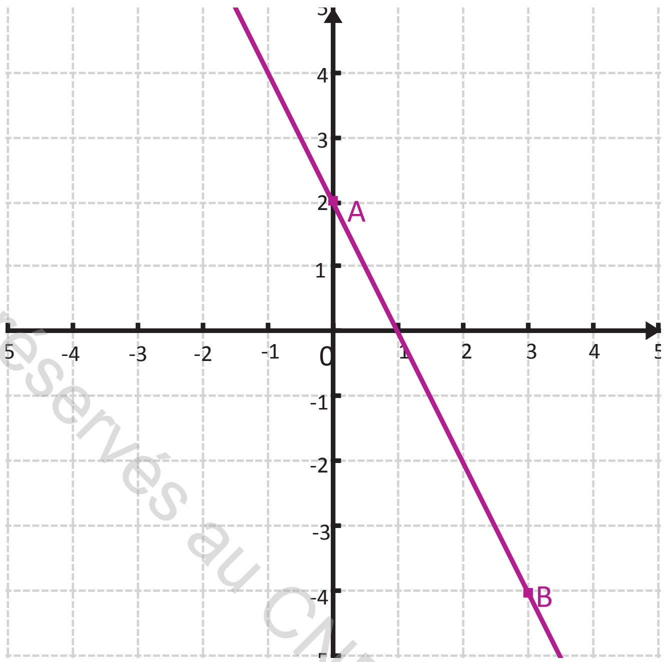
- **a)** Déterminer f(1) et f(3).
- **b)** Déduire le premier coefficient de f.
- **c)** Déterminer f(0) et déduire b.

2) On considère la fonction affine
$g : x \mapsto x - 4$

- **a)** Calculer g(0) et g(4).
- **b)** Reprendre le graphique ci-contre et tracer (D) : représentation graphique de g dans le même repère.

3) Déterminer graphiquement le point d'intersection de (AB) et (D).

4) Retrouver par le calcul le résultat précédent.



Activité 2

Un vidéoclub propose deux tarifs pour la location de vidéos.
Tarif A : 2 dinars pour la location de chaque vidéo.
Tarif B : 40 dinars pour l'abonnement annuel et 0,5 dinars pour la location de chaque vidéo.
Soit x le nombre de vidéos louées par un adhérent en un an. On note f(x) le prix total payé avec le tarif A et g(x) le prix total payé avec le tarif B.

1) Exprimer f(x) et g(x) en fonction de x.
2) Tracer les représentations graphiques de f et g dans le même repère.
3) Déterminer graphiquement pour quelles valeurs de x chaque tarif est plus intéressante que l'autre pour l'adhérent.
4) Déterminer par le calcul le nombre de vidéos louées où les deux tarifs se coïncident.

Activité 3

Jamila décide d'aller régulièrement à la piscine pendant un an.
Voici les tarifs proposés :

- **Tarif 1** : 100 dinars pour un an avec nombre illimité d'entrées ;
- **Tarif 2** : 40 dinars d'adhérence par ans puis 1 dinars par entrée ;
- **Tarif 3** : 2 dinars par entrée.

1) Quel prix paiera-t-elle avec chaque tarif, si elle va à la piscine une fois par mois ?
quel tarif sera-t-il intéressant dans ce cas ?

2) On appelle x le nombre de fois où Jamila ira à la piscine.
Exprimer, en fonction de x :
$t_1(x)$ le prix qu'elle paiera avec le tarif 1 ;
$t_2(x)$ le prix qu'elle payera avec le tarif 2 ;
$t_3(x)$ le prix qu'elle payera avec le tarif 3.

3) Représenter graphiquement ces trois fonctions dans un même repère.

4) En considérant qu'il y a 4 semaines pleines dans un mois : Combien d'entrées Jamila devra-t-elle payer si elle va à la piscine une fois par semaine ?
Et si elle va deux fois par semaine ?

5) Par lecture graphique, déterminer le tarif le plus intéressant pour Jamila dans ces deux cas.

6) A partir de combien d'entrées, Jamila aura-t-elle intérêt à prendre un abonnement au tarif 1.

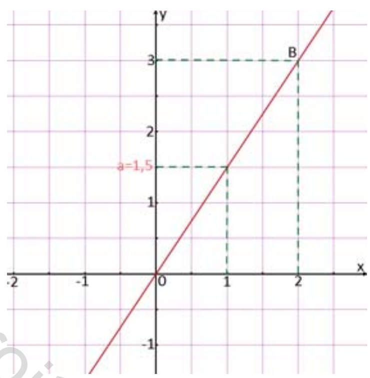
Fonctions linéaires

Définition

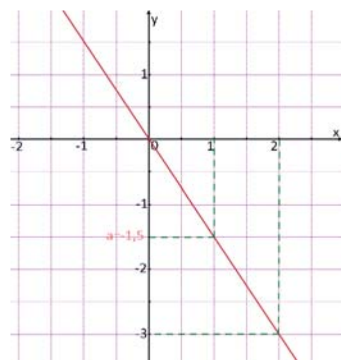
a désigne un nombre réel .
La **fonction linéaire** de coefficient **a** est le procédé qui, à un nombre réel x, associe le nombre **ax**
On note cette fonction $f : x \mapsto ax$. On écrit aussi $f(x) = ax$

Représentation graphique des fonctions linéaires

- La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère.
- $f(1) = a$
- Lorsqu'un point M(x ;y) appartient à la droite représentative de la fonction linéaire f définie par f(x) = ax , ses coordonnées vérifient la relation : y = ax



$f : x \mapsto 1{,}5x$



$f : x \mapsto -1{,}5x$

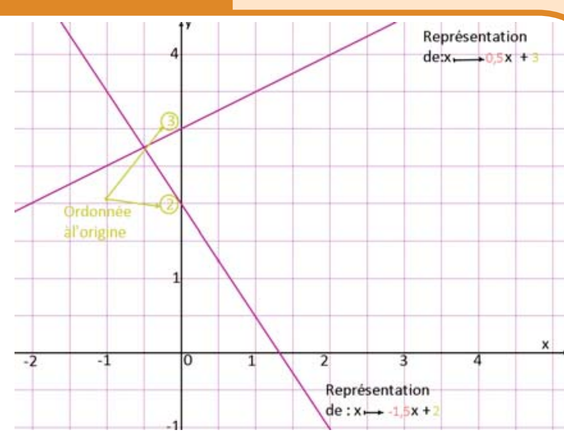
Fonctions affines

Définition

a et **b** sont deux réels .
La **fonction affine** f de coefficients a et b est le procédé qui, à un nombre réel x, associe le réel ax + b .
Cas particuliers : Pour b = 0, la fonction $f : x \mapsto ax + b$ devient $f : x \mapsto ax$, c'est une fonction **linéaire**
Pour a = 0, la fonction $f : x \mapsto ax + b$ devient $f : x \mapsto b$, c'est une fonction **constante**

Représentation graphique des fonctions affines

- La représentation graphique d'une fonction affine est une droite .
- Pour deux points distinctes $M_1(x_1 ; f(x_1))$ et $M_2(x_2 ; f(x_2))$ le coefficient « **a** » de la fonction se calcule comme suit : $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
- Une fonction affine de premier coefficient a est : - strictement croissante si a > 0
  - strictement décroissante si a < 0



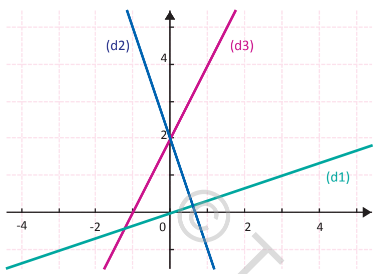
S'auto-évaluer

Vrai-Faux

Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

1. Le premier coefficient de la fonction affine f telle que $f(3)=8$ et $f(2)=5$ est égal à 5.

2. Les droites (*d1*) (*d2*) et (*d3*) sont respectivement les représentations graphiques des fonction affines f , g et h.



e. f est une fonction linéaire.

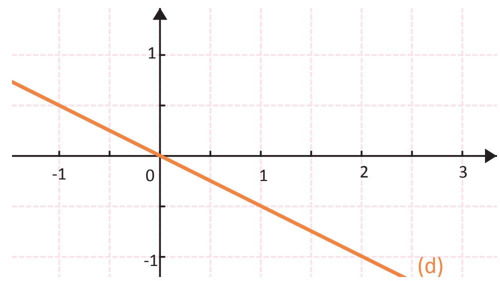
f. l'ordonnée à l'origine de h est égale à 2.

g. g et h sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$.

h. $h(x)=x+2$

3. Le coefficient a de la fonction linéaire f telle que $f(4)=18$ est $\frac{9}{2}$

4. La droite (*d*) est la représentation graphique d'une fonction linéaire k



a. k est une fonction affine .

b. k(1) = -1.

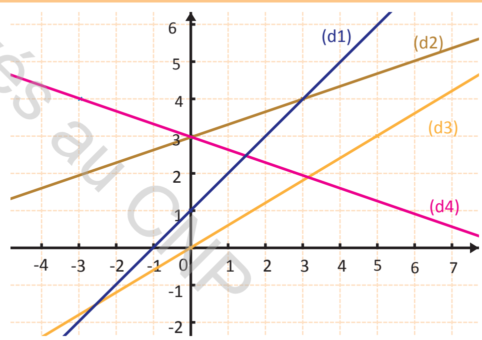
c. k est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d. k(x) = $-\frac{1}{2}x$

Q C M

Les droites (*d1*) , (*d2*), (*d3*) et (*d4*) sont les représentations graphiques respectives des fonctions affines g_1, g_2, g_3 et g_4

À l'aide du graphique, indiquer la ou les propositions exactes

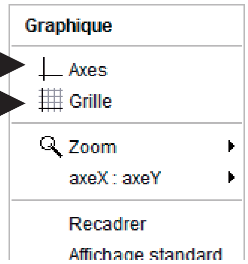


	A	B	C	D
La fonction g_2 est une fonction	affine de premier coefficient $\frac{1}{3}$	affine strictement décroissante	affine d'ordonnée à l'origine 1	linéaire de coefficient $\frac{1}{3}$
La fonction g_3 est une	fonction affine de premier coefficient $\frac{1}{5}$	fonction linéaire strictement croissante	fonction linéaire strictement décroissante	fonction linéaire de coefficient $\frac{1}{5}$
La fonction affine g_1 vérifie	$g_1(0)=1$	$g_1(1)=0$	$g_1(0)=0$	$g_1(-1)=0$
L'expression de la fonction affine g_4 est :	$g_4(x)=3x+3$	$g_4(x)=-3x+3$	$g_4(x)=\frac{1}{3}x+3$	$g_4(x)=\frac{-1}{3}x+3$

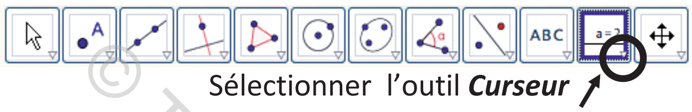
Objectif : *observer de façon dynamique la représentation graphique d'une fonction affine en faisant varier ses coefficients*

Lancer le logiciel GeoGebra

1) Afficher la grille et les axes en cliquant sur le bouton droit de la souris et en sélectionnant les éléments à activés.

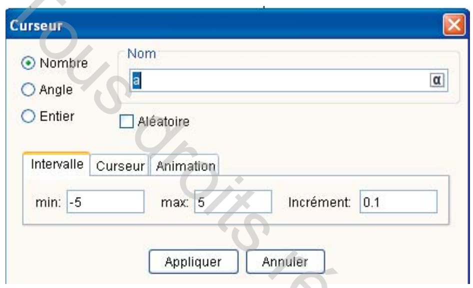


2) Cliquez sur le petit triangle dans le coin inférieur droit de l'outil ***Curseur***



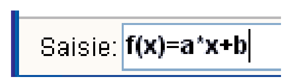
Sélectionner l'outil ***Curseur***

Construire deux curseurs nommés a et b tels que les nombres a et b varient entre 5 et-5 avec un pas de 0,1

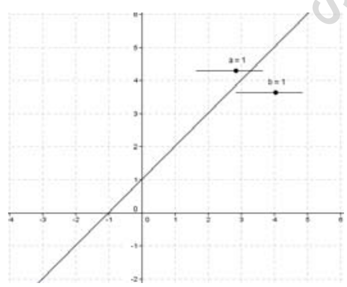


3) On va afficher la représentation graphique de la fonction *f* définie par $f(x)=ax+b$, où a et b sont deux nombres définis par les curseurs.

a. Dans le champ de saisie, entrer l'expression $f(x)=a*x+b$ de la fonction *f*



b. Donner une expression algébrique de la fonction *f* dont la droite est affichée à l'écran.



Manipulation et observation

A l'aide des deux curseurs a et b, il est possible de modifier l'expression algébrique de la fonction *f*

4) Afficher la droite représentation de la fonction $f(x)=0{,}4x+2$. Donner les coordonnées du point d'intersection de la droite avec l'axe des abscisses

5) Donner l'expression de la fonction dont la droite représentative a pour coefficient directeur -0,8 et passe par le point de coordonnées (-5 ;2)

6) Déplacer le curseur b seulement.

Que peut-on dire des droites qui possèdent le même coefficient directeur ?

7) Déplacer le curseur a seulement

Que peut-on dire des droites qui possèdent la même ordonnée à l'origine ?

8) Etudier l'inclinaison de la droite en fonction du signe de son coefficient directeur

1 On considère la fonction linéaire f définie par : $f(x)=-5x$. Calculer les images par f des nombres suivants :

a. 6 **b.** -2,5 **c.** -4 **d.** 0 **e.** $\frac{3}{4}$

2 On considère la fonction linéaire f définie par : $f(x)=\frac{2}{5}x$. Calculer les antécédents par f des nombres suivants :

a. $\frac{4}{5}$ **b.** $\frac{2}{10}$ **c.** -4 **d.** 0 **e.** $\frac{7}{4}$

3 Déterminer une expression de chacune des fonctions linéaires f, g, h et k telles que :

a. $f(3)=-12$ **b.** $g(-1)=5$

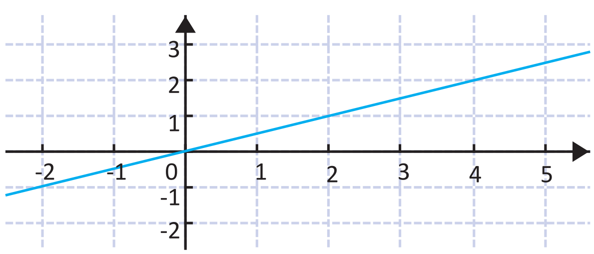
c. $h(5)=6$ **d.** $k(-3)=4$

4 Déterminer une expression de chacune des fonctions linéaires f et g telles que :

a. L'image de 4 par la fonction f est $-\frac{2}{5}$

b. 5 est l'antécédents de -1 par la fonction g

5 On a représenté ci-dessous la fonction affine f dans un repère :



a. La fonction f est-elle linéaire ? justifier.
b. Lire graphiquement les images de -2 et 4 par f.
c. Lire graphiquement l'antécédent de 1 par la fonction f .
d. Donner l'expression de la fonction f.
e. Calculer l'image de -9 par f.

6 Représenter les fonctions linéaires suivantes dans le même repère :

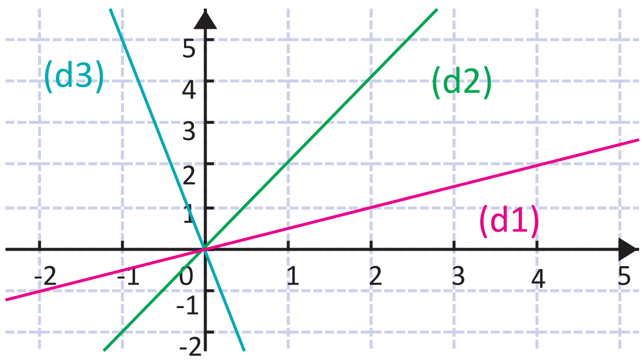
$f: x \mapsto 3x$; $g: x \mapsto -x$

$h: x \mapsto 1{,}5x$ et $k: x \mapsto \frac{2}{3}x$

7 Associer à chaque fonction linéaire f, g et h sa droite représentative :

$f: x \mapsto 2x$; $g: x \mapsto -5x$

$h: x \mapsto 0{,}5x$



8

1) Représenter graphiquement dans un repère (O,I,J) la fonction linéaire g telle que $g(x)=0{,}6x$

2) Les points $M(-2;-1{,}2)$ et $N(0{,}8;0{,}5)$ appartiennent-ils à la droite représentative de g.

3) Déterminer les réel m et n pour que les points $E(m;-4)$ et $F(-5;n)$ appartiennent à la droite représentative de g .

9 On considère les fonctions linéaires f,g et h dont les droites représentatives (d), (d') et (d'') ont pour coefficients directeurs respectifs 2, 5 et 8.

1. Sur quelle droite le point d'abscisse 1 a-t-il l'ordonnée la plus grande ?
2. Sur quelle droite le point d'abscisse -4 a-t-il l'ordonnée la plus grande ?
3. Sur quelle droite le point d'ordonnée 2 a-t-il l'abscisse la plus petite ?

10 On considère la fonction affine f telle que : $f(x)=-4x-7$.

Calculer l'image par f de chacun des réels :

a. 8 *b.* -4 *c.* -2 *d.* 0 *e.* $\dfrac{3}{2}$

11 On considère la fonction affine f telle que : $f(x)=-5x-20$.

Calculer l'antécédent par f de chacun des réels

a. -45 *b.* -15 *c.* -5 *d.* -30 *e.* -17.5

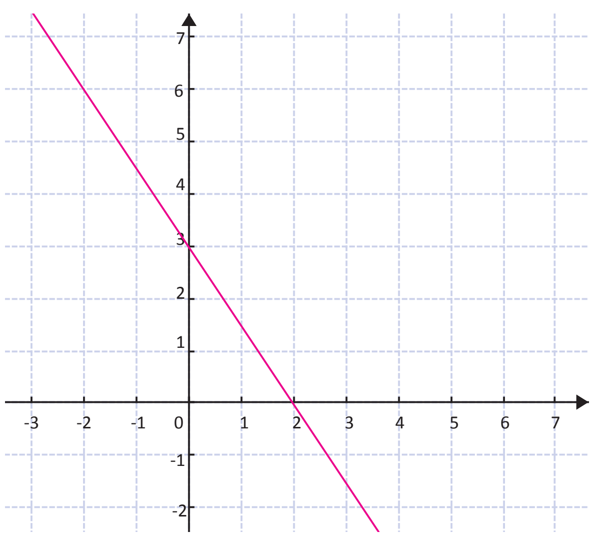
12 f est une fonction affine de la forme : $f:x\mapsto ax+b$ telle que $f(1)=7$ *et* $f(3)=11$

Calculer a et b et déduire l'expression de f.

13 g est une fonction affine telle que $g(-1)=7$ *et* $g(4)=8$.

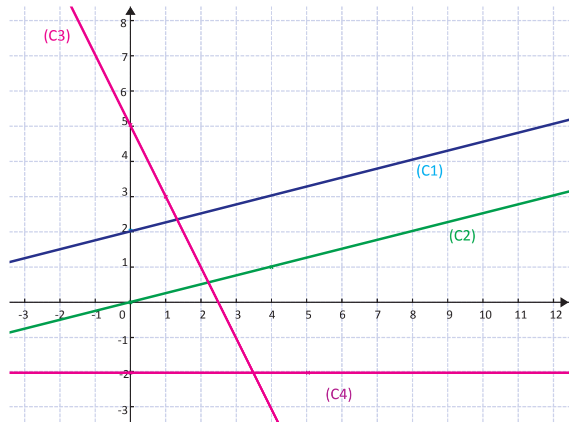
Donner l'expression de *g.*

14 On a représenté ci-dessous la fonction affine f dans un repère :



1) La fonction f est-elle linéaire ? Justifier.
2) Lire Graphiquement :
   a. L'image de -2 et celle de 2 par f et calculer le premier coefficient de f.
   b. L'antécédent de 3 par f.
3) Donner l'expression de f.
4) Calculer l'image de 12 par *f.*
5) Déterminer l'antécédent de 12 par *f.*

15 On considère (C_1), (C_2), (C_3) *et* (C_4) les représentations graphiques respectives des fonctions affines f_1, f_2, f_3 *et* f_4.



1) Justifier que la fonction f_2 est linéaire et donner son expression.
2) Déterminer la fonction affine ayant le même premier coefficient que la fonction f_2.
   Déterminer son expression.
3) Reconnaître la fonction affine de premier coefficient négatif et donner son expression.
4) Reconnaître la fonction affine de premier coefficient nul et donner son expression.

16 On considère la fonction affine définie par : $f(x)=\dfrac{4}{5}x+1$.

1) Construire la courbe représentative (D) de la fonction f dans un repère (O,I,J).
2) Placer le point $M(3;3,5)$.
3) Le point M appartient-il à la droite D.

17 Lorsque Sami transfère des données de son ordinateur vers son disque dur externe, la vitesse de transfert est de 80Mo/min.

1) Combien de temps lui faudra-t-il pour copier un dossier de 450Mo.
2) Même question pour un dossier de 2Go (1Go = 1000Mo).
3) Donner l'expression de la fonction temps (en min) de transfert T(x) en fonction de la taille x (en Mo) du dossier.

18 Durant les soldes, le magasin de sport CitySport fait une réduction de 30% sur tous les vêtements vendus dans son magasin.

1) Donner l'expression du nouveau prix P(x) en fonction de l'ancien prix x après la réduction.
2) Calculer alors le prix après réduction d'un survêtement qui coûtait 59 Dinars.
3) Quel était le prix d'un tee-shirt avant réduction, qu'on a payé 18 Dinars.

19 Un site propose de télécharger des chansons. Si l'internaute paie un abonnement forfaitaire annuel (a) , il pourra télécharger autant de chansons qu'il souhaite à un tarif (b) intéressant.

1) Vérifier que le prix P(x) à payer en fonction du nombre x de chansons téléchargées est la fonction affine de premier coefficient (b) et de deuxième coefficient (a)
2) Iheb a téléchargé cette année 142 chansons et a payé (abonnement compris) 82,2 Dinars. sur le même site, Omar a téléchargé cette année 123 chansons et a payé(abonnement compris) 86,8 Dinars. Donner une expression algébrique de la fonction de la question 1)
3) En déduire le prix de l'abonnement et le prix d'une chanson.

20 Un centre de loisir aquatique propose pour ces clients deux tarifs :

- Tarif (1) : 6 Dinars l'entrée ;
- Tarif (2) : achat d'une carte de 25 Dinars donnant droit à un tarif réduit de 3,5 Dinars l'entrée.

1) Quel est le tarif le plus intéressant pour 7 entrées ? pour 15 entrées ?
2) On note x le nombre d'entrées.
   a) Exprimer en fonction de x, le prix f(x) payé avec le tarif (1) puis le prix g(x) payé avec le tarif(2) .
   b) Quel est la nature des fonctions f et g.
3) Représenter graphiquement dans un même repère les fonctions f et g (on prendra en abscisse 1cm pour 1 entrée et en ordonnée 1 cm pour 10 Dinars).
4) Déterminer par lecture graphique le tarif le plus intéressant en fonction de x.
5) Retrouver le résultat précédent par calculs.

21 Le nœud est une unité de mesure de vitesse utilisé dans l'aviation et la marine.
On donne : 1noeud = 1mile/h et 1mile ≃ 1852m.

1) Moez prétend que son petit hors-bord est plus rapide qu'une voiture. Sa vitesse maximale est de 45 nœuds. A-t-il raison ?
2) Avec son planeur, Amin vole à une vitesse d'environ égale à 70 km/h. Son ami lui a conseillé avant son départ de ne pas dépasser 50 nœuds. A-t-il respecté les conseils de son ami ?
3) Aujourd'hui, les deux amis Moez et Amin ne pourraient pas s'abonner à leurs passions. Selon l'échelle de Beaufort, les vents sont de Force9(41 à 47 nœuds). À quelles vitesses, en km/h, correspondent des vents de forces 9 ?

22 Les parents de Mariam souhaitent l'inscrire dans un club d'équitation qui propose trois formules différentes :

- Formule A : 18 Dinars la séance.
- Formule B : 165D la carte de 10 séances
- Formule C : Paiement d'une cotisation annuelle de 70 Dinars plus 140 Dinars la carte de 10 séances.

Partie A :

1) Vérifier que le coût de 7 séances est de :
   126 dinars avec la formule A ;
   165 Dinars avec la formule B ;
   210 Dinars avec la formule C .
2) Déterminer le coût de 18 séances avec chaque formule.

Partie B :

Mariam désire faire le cheval toute l'année.
Ses parents décident de comparer la formule B et la formule C.
Soit x le nombre de cartes de 10 séances achetées.

1) Exprimer en fonction de x le prix f(x) payé par la famille en choisissant la formule B.
2) Exprimer en fonction de x le prix g(x) payé par la famille en choisissant la formule C.
3) À partir de combien de cartes achetées la formule C devient-elle la plus avantageuse ?

CHAPITRE 4

Fonctions de type: $x \mapsto ax^2$; $x \mapsto \frac{a}{x}$

Contenu du chapitre

- Pour commencer
- Cours
  - Fonction : $x \mapsto x^2$
  - Fonctions de type : $x \mapsto ax^2$
  - Fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$
  - Fonctions de type : $x \mapsto \frac{a}{x}$
- S'auto-évaluer
- Activités TICE
- Exercices et problèmes

AU FIL DU TEMPS

Isaac Newton a énoncé les lois du mouvement, appelée « Principe fondamentale de la dynamique », permet de démontrer que seulement soumis à son poids la trajectoire d'un corps dans le plan est une parabole.

Paraboles dans la grande place jardin du port El Kantaoui

La fonction carrée est partout présente dans la nature : un jet d'eau, la formation des dunes...
Les ingénieurs et les architectes se sont emparés de la parabole dans leurs œuvres.
Cela est dû à ses propriétés, connues depuis l'antiquité et toujours utilisées.
Par exemple, antenne parabolique, centrale solaire à concentration, ponts et bâtiments modernes...ou modèles mathématiques en économie..

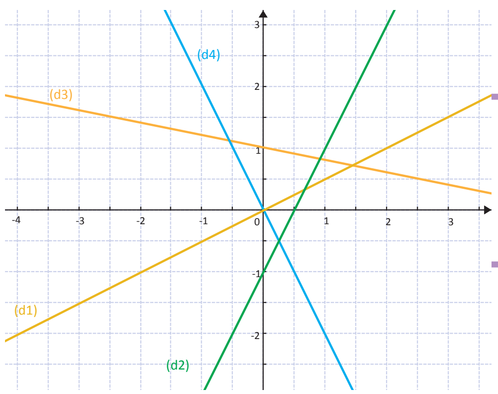
Pour commencer

Activité

Indiquer pour chaque énoncé la bonne réponse.

		A	B	C
1	L'image de 4 par la fonction $f : x \mapsto -3x+1$ est :	-6	-13	-11
2	L'antécédent de 4 par la fonction $f : x \mapsto -3x+1$ est :	-12	1	-1

3 Dans le graphique ci-dessous les droites (d_1), (d_2), (d_3) et (d_4) sont les représentations graphiques respectives des fonctions f , g , h et k

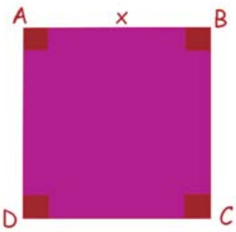


3		A	B	C
	a. Les fonctions linéaires sont :	f et g	f et h	f et k
	b. La fonction f est une fonction linéaire de coefficient :	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
	c. La fonction k est une fonction linéaire	Strictement Croissante	Strictement Décroissante	Constante
	d. La fonction h est une fonction affine d'expression :	$h(x)=-5x-1$	$h(x)=-\frac{1}{5}x-1$	$h(x)=-\frac{1}{5}x+1$
	e. La droite (d_2) passe par le point :	A(4 ; 6)	B(4 ; 8)	C(4 ; 7)
	f. Les fonctions strictement décroissantes sont :	f et g	f et k	h et k

I Fonction $x \mapsto ax^2$:

Activité 1

On considère un carré ABCD.



1) Déterminer l'expression de l'aire A(x), exprimé en cm^2, du carré en fonction de la longueur x de son côté, exprimé en cm.
2) Déterminer l'aire du carré sachant que x= 2.
3) Déterminer x sachant que l'aire du carré est égale à 5.
4) Compléter le tableau suivant :

x	0	$\frac{1}{2}$	1	1,5	2	2,5	3	4
A(x)	…	…	…	…	…	…	…	…

5) S'agit-il d'un tableau de proportionnalité ?
6) Représenter l'allure de la courbe représentant la variation de l'aire du carré en fonction de la longueur de son côté.
7) Utiliser le graphique pour donner une estimation de :
  a) A(x) lorsque x = 0,8
  b) x lorsque A(x) = 1,5
8) Semble-t-il vrai que, lorsque x augmente A(x) diminue ?

Activité 2

Tout réel admet un carré. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$.
Cette fonction est appelée souvent **la fonction carrée**.

1) Compléter le tableau suivant :

x	-2	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$
f(x)	…	…	…	…	…	…	…	…	…

2) a) Que peut-on conjecturer quant au sens de variation de f ?
Compléter :

- a et b sont deux réels positifs : $a < b$ implique $a^2 .....b^2$ implique $f(a).....f(b)$
  Donc la fonction f est strictement………………….sur $[0;+\infty[$.
- a et b sont deux réels négatifs : $a < b$ implique $a^2 .....b^2$ implique $f(a).....f(b)$
  Donc la fonction f est ……………………

3) a) Placer dans un repère du plan les points $M(x, f(x))$ avec
$x \in \{-2, -\sqrt{3}, ...\}$.
b) Tracer l'allure de la représentation graphique de la fonction f.

Vocabulaire :

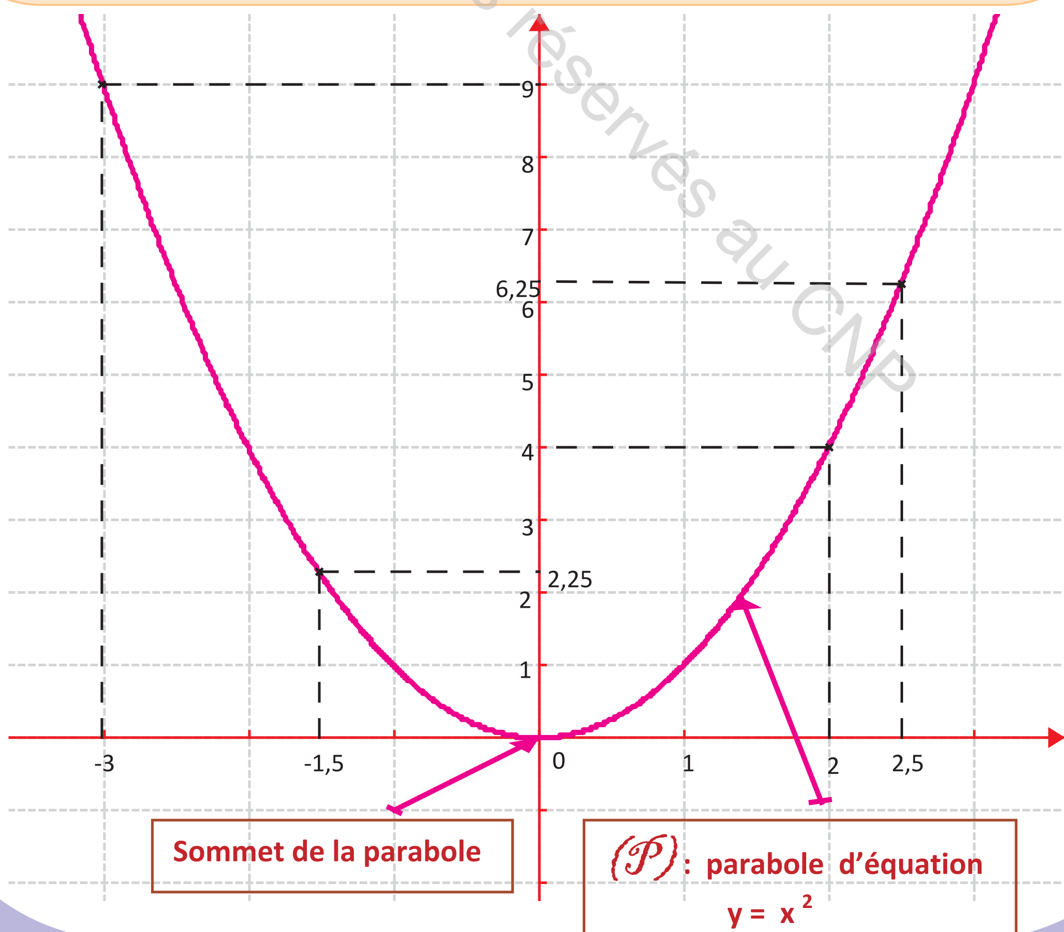
- On peut calculer les images de tous les réels par la fonction carrée. On dit que $\mathbb{R}$ est le domaine de définition de cette fonction.
- La représentation graphique de f est dite aussi la courbe représentative de f.

Soit (O ,I,J) un repère du plan.

- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$ est dite une **parabole.**
- La relation $y = x^2$ est l'équation de cette parabole dans ce repère.
- L'origine du repère est appelé sommet de la parabole.
- Cette fonction est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

On résume le sens de variation de f par le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	↘	0	↗



Activité 3 Parité de la fonction carrée

1) Soit la fonction f : $x \mapsto x^2$. On désigne par Cf sa courbe représentative dans un repère **orthogonal.**

Calculer f(0,5) ; f(-0,5), $f(\sqrt{2})$; $f(-\sqrt{2})$, $f\left(\frac{4}{3}\right)$ et $f\left(-\frac{4}{3}\right)$.

2) L'un des élèves dit que le domaine de définition de la fonction f est symétrique par rapport à zéro et que les images de n'importe quel réel et de son opposé par cette fonction sont égales. Qu'en dites-vous ?

3) Un autre élève pourvoit que la courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Es-tu d'accord ?

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = x² .On désigne par C(f) sa courbe représentative dans un repère **orthogonal**.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $-x \in \mathbb{R}$ et f(-x) = f(x).On dit que f est paire.
- C(f) est symétrique par rapports à l'axe des ordonnées.

Activité 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$

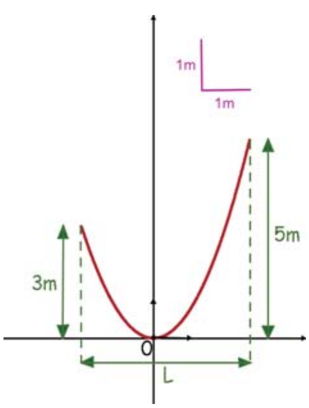
1) Déterminer l'image par f de chacun des réels suivants : 1 , -4 , 0 et 100.

2) Déterminer, lorsque cela est possible, les antécédents par f de chacun des réels suivants : 1, -4, 0 et 100.

3) Soit a un réel tel que f(a) = 2013. Trouver f(-a) .

Activité 5

La schématisation d'une sculpture correspond à la partie ci-contre de la parabole d'équation y = x^2 dans un repère. Sachant que cette sculpture est haute de 5m d'un côté et de 3m de l'autre, donner une valeur approchée au cm prés de sa largeur L.



Activité 6 Fonction $x \mapsto ax^2$

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto 4x^2 \text{ et } g : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2$$

1) Compléter le tableau suivant :

x	-2	$\frac{-3}{2}$	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
f(x)	…	…	…	…	…	…	…	…	…

2) Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

3) **a)** Conjecturer à l'aide d'une lecture graphique le sens de variation de f.

b) Prouver les conjectures précédentes.

4) Soit x un réel quelconque, comparer f(x) et f(-x). Conclure.

5) En considérant le tableau ci-dessous reprendre les mêmes questions avec la fonction g.

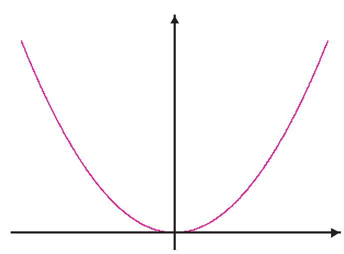
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
g(x)	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2$ avec $a \neq 0$.

- La courbe représentative $\zeta(f)$ de f dans un repère orthogonal est une parabole de sommet l'origine de ce repère.
- y= ax^2 est l'équation de cette parabole dans ce repère.
- La fonction est paire et la parabole est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- On donne le sens de variation de f et sa courbe représentative suivant le signe de a :

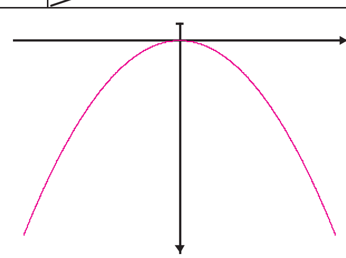
a > 0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
ax^2		↘	0	↗	



a < 0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
ax^2		↗	0	↘	

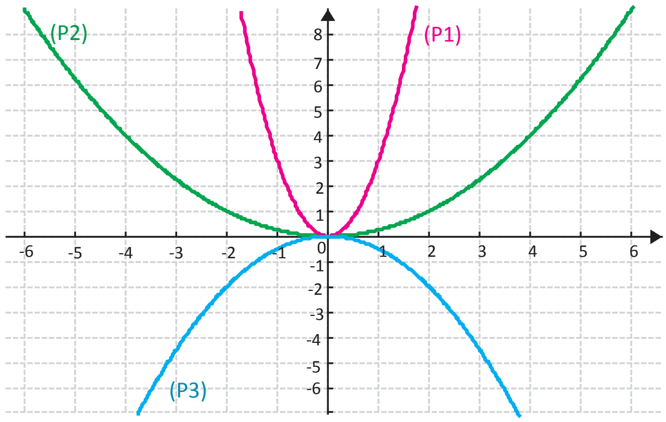


Remarque :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2$.

- Lorsque a > o, La fonction f admet pour minimum 0, atteint pour x = 0.
- Lorsque a < 0, La fonction f admet pour maximum 0, atteint pour x = 0.

Activité 7



On donne ci-contre trois paraboles P_1, P_2 et P_3 qui représentent respectivement les fonctions *f, g* et *h.*

1) Dire si chacune des propositions Suivantes est vraie ou fausse.

- **a)** $f(x) = 3x^2$.
- **b)** $g(x) = \frac{1}{4}x^2$.
- **c)** $h(x) = \frac{1}{2}x^2$.
- **d)** h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- **e)** pour tout réel x : $g(x) \leq f(x)$.

2) Résoudre graphiquement les équations suivantes :

- **a)** $f(x) = 3$
- **b)** $g(x) = -3$
- **c)** $h(x) = -2$

Activité 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2$.

1) Calculer $f(-\sqrt{5})$, $f(0)$ *et* $f(2\sqrt{3})$.

2) Résoudre les équations : $f(x) = 5$ *et* $f(x) = -2$.

3) Comparer *f(2013,2014) et f(2014,2013) puis f(-2013,2014) et f(-2014,2013)* .

4) Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative de *f* .

5) Tracer dans le même repère la courbe représentative de la fonction g définie par $g(x) = -5x^2$.

Activité 9

Une bille est lâchée sans vitesse initiale.
L'expression de la distance parcourue par la bille en fonction du temps écoulé est :

$d = \frac{1}{2}gt^2$ avec $g = 10 ms^{-2}$, on obtient alors $d = 5t^2$.

1) Tracer dans un repère orthogonal la courbe qui représente l'évolution de la distance parcourue en fonction du temps.
(On prend sur l'axe des abscisses: 1cm pour 1s et sur l'axe des ordonnées :1cm pour 5m)

2) Estimer graphiquement le temps mis par la bille lâchée à 2 mètres pour atteindre le sol .

Exercice résolu

Résoudre graphiquement, dans $\mathbb{R}$, l'équation : $x^2 = x + 2$.

Solution

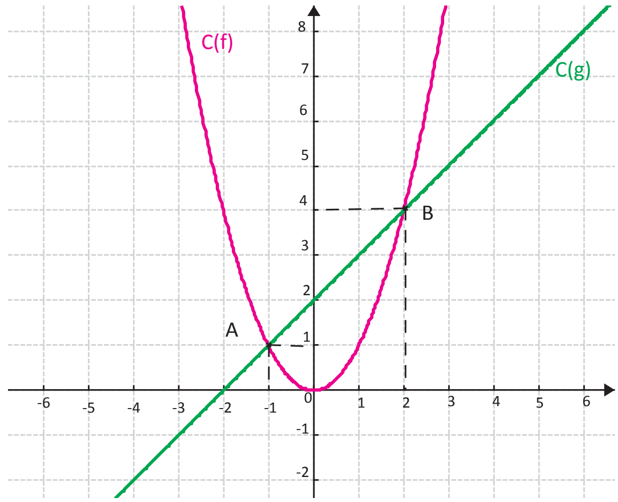
Soit les deux fonctions f : $x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x + 2$.

On trace dans un même repère les courbes représentatives de f et g.

Les abscisses des points d'intersection de $\zeta(f)$ et $\zeta(g)$ sont les solutions de l'équation : f(x) = g(x) **c à d** les solutions de l'équation : $x^2 = x + 2$.

Donc d'après le graphique on a :

$S_{\mathbb{R}} = \{-1;2\}$



II Fonction $x \mapsto \dfrac{a}{x}$:

Activité 1

Chaque année, un célèbre magazine automobile organise le concours du véhicule écologique le plus performant. Il s'agit de parcourir une distance *(d)* de 1 kilomètre sur une piste aménagée, avec comme seul carburant de l'eau, du vent ou du soleil. On désigne par ϑ la vitesse moyenne d'un véhicule (en kilomètres par heure) et par $f(\vartheta)$ le temps (en heures) nécessaire pour parcourir la piste.

On rappelle que la vitesse moyenne ϑ est donnée par la relation $\vartheta = \dfrac{d}{t}$ où t désigne le temps mis pour parcourir la distance *d*.

1) **a)** Vérifier que $f(\vartheta) = \dfrac{1}{\vartheta}$.

b) Compléter le tableau suivant :

ϑ	0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(\vartheta)$														

2) Tracer l'allure de la courbe qui représente le temps f(ϑ) en fonction de la vitesse ϑ .

3) Cette année, deux véhicules se sont particulièrement distingués : le véhicule « Solaire » et le véhicule « vent » .Répondre graphiquement aux questions suivantes :

a) Le véhicule « solaire » a parcouru la piste à la vitesse de 9,5 km/h .
Donner une estimation de son temps de parcours.

b) Le véhicule « vent » a mis 3 heures pour faire le parcours. Donner une estimation de sa vitesse moyenne.

Activité 2

Tout réel non nul admet un inverse. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. Cette fonction est appelée souvent la **fonction inverse**.

1) Compléter le tableau suivant :

x	-2	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	1	3
f(x)	...	...	...	...		...	...	...	...

2) a) Que peut-on conjecturer quant au sens de variation de f ?
Soit a et b deux réels non nuls et de même signe tels que : $a < b$.
Comparer $f(a)$ et $f(b)$.

3) a) Placer dans un repère du plan les points $M(x, f(x))$ avec $x \in \{-2, -1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$.

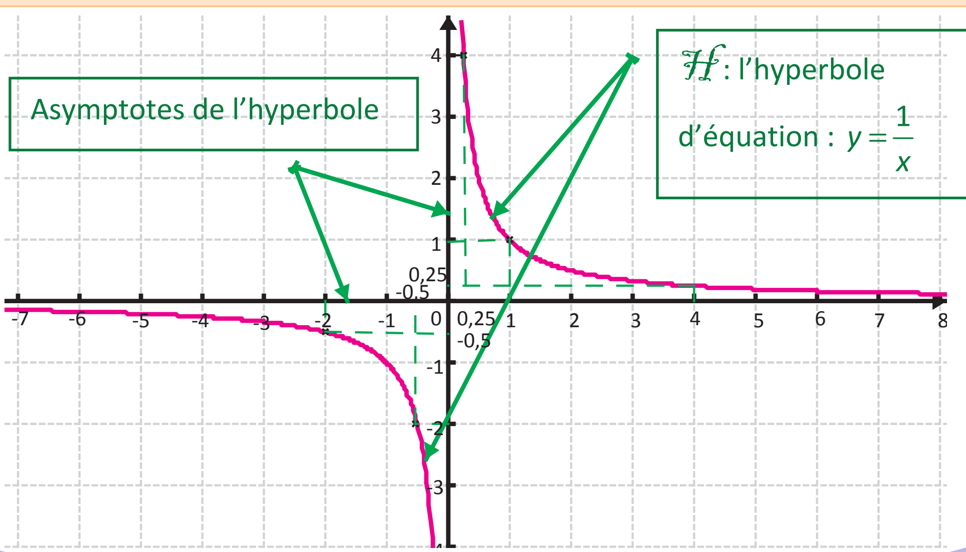
b) Tracer l'allure de la représentation graphique de la fonction f .

Soit (O ,I,J) un repère du plan.

- La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dite une **hyperbole.**
- Les axes du repère sont dits les **asymptotes** de l'hyperbole.
- La relation $y = \frac{1}{x}$ est une équation de l'hyperbole dans ce repère.
- Cette fonction est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$

On résume le sens de variation de f par ce tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘	‖	↘



Activité 3

Soit la fonction f : $x \mapsto \frac{1}{x}$.

On désigne par Cf sa courbe représentative dans un repère .

1) Calculer f(0,2) , f(-0,2), $f(\sqrt{5})$, $f(-\sqrt{5})$, $f\left(\frac{4}{9}\right)$ et $f\left(-\frac{4}{9}\right)$.

2) **a)** Le domaine de définition de f est-il symétrique par rapport à 0 ?

b) Est-il vrai que l'image d'un réel non nul et celle de son opposé sont opposées ?

3) La courbe représentative de cette fonction admet-elle un élément de symétrie ?

> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.
>
> On désigne par C(f) sa courbe représentative dans un repère.
>
> - Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a : $-x \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x)=-f(x)$.
>   On dit que f est impaire.
> - C(f) est symétrique par rapport à l'origine.

Activité 4

1) Comparer $0{,}2013$ *et* $\frac{1}{0{,}2013}$.

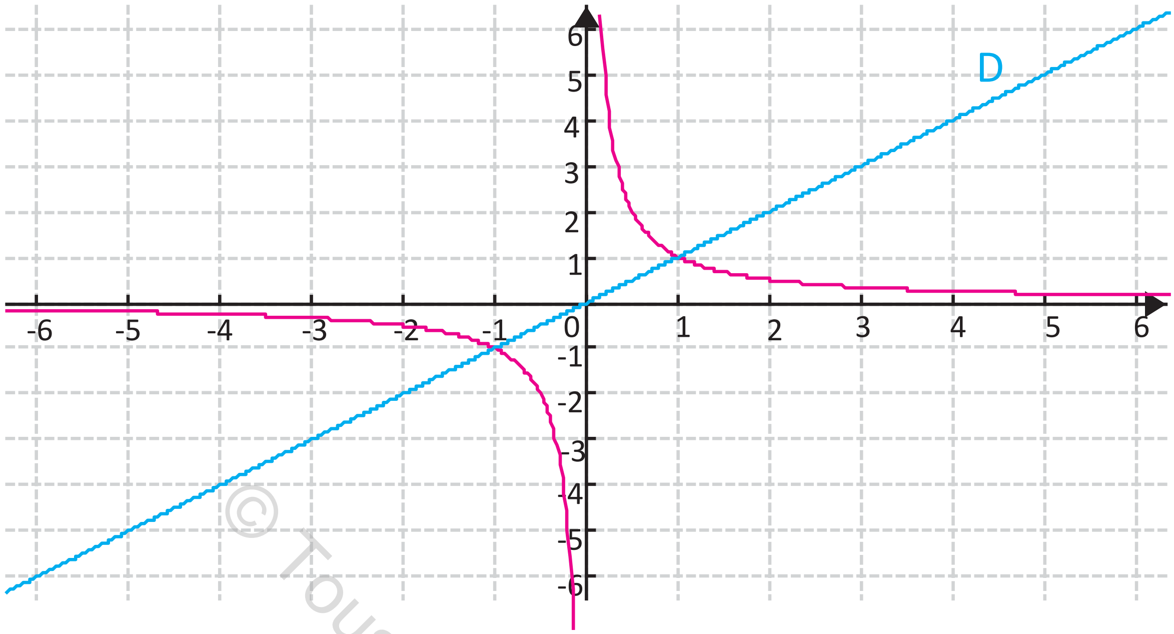
2) On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction inverse et la droite *D* d'équation y = x.

a) Trouver graphiquement les réels qui vérifient l'équation : $x=\frac{1}{x}$.

b) On sait que, si $0<x<1$ alors $x<\frac{1}{x}$ et que, si $x>1$ alors $x>\frac{1}{x}$.

Utiliser le graphique pour retrouver ces résultats.

c) Soit $x<0$. Utiliser le graphique pour comparer x et $\frac{1}{x}$.



Activité 5 La fonction : $x \mapsto \frac{a}{x}$

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^*$ par :

$f : x \mapsto \frac{3}{x}$ et $g : x \mapsto \frac{-2}{x}$

1) Compléter le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
f(x)	…	…	…	…		…	…	…	…

2) Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère.

3) a) Conjecturer à l'aide d'une lecture graphique le sens de variation de f.

b) Prouver les conjectures précédentes.

4) Soit x un réel quelconque, comparer f(x) et f(-x). Conclure.

5) En considérant le tableau ci-dessous reprendre les mêmes questions avec la fonction g.

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
f(x)	…	…	…	…		…	…	…	…

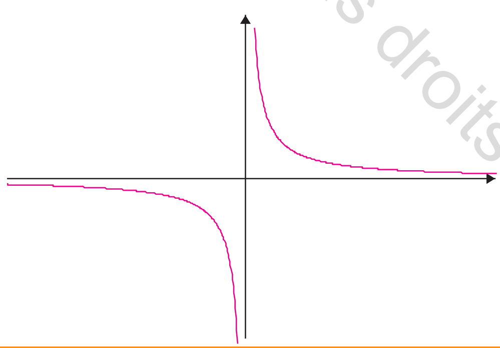
Cours : Fonction inverse

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{a}{x}$ avec $a \neq 0$.

- La courbe représentative $\zeta(f)$ de f dans un repère est une hyperbole d'asymptotes les axes de ce repère.
- La fonction f est impaire et sa courbe représentative (l'hyperbole) est symétrique par rapport à l'origine du repère .
- On donne ci-dessous le sens de variation de f et sa courbe représentative suivant le signe de a :

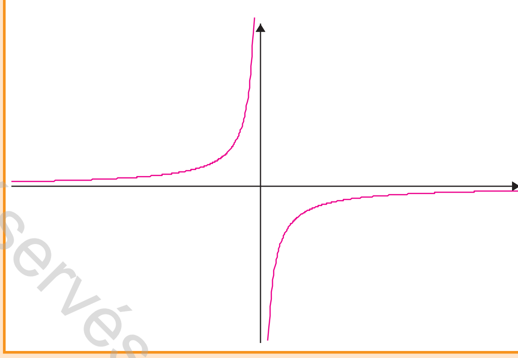
a > 0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↘	‖	↘



a < 0

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↗	‖	↗



Activité 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{-2}{3x}$.

1) Calculer $f\left(-\dfrac{1}{6}\right)$, $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$, $f(2)$ *et* $f\left(\dfrac{1}{9}\right)$.

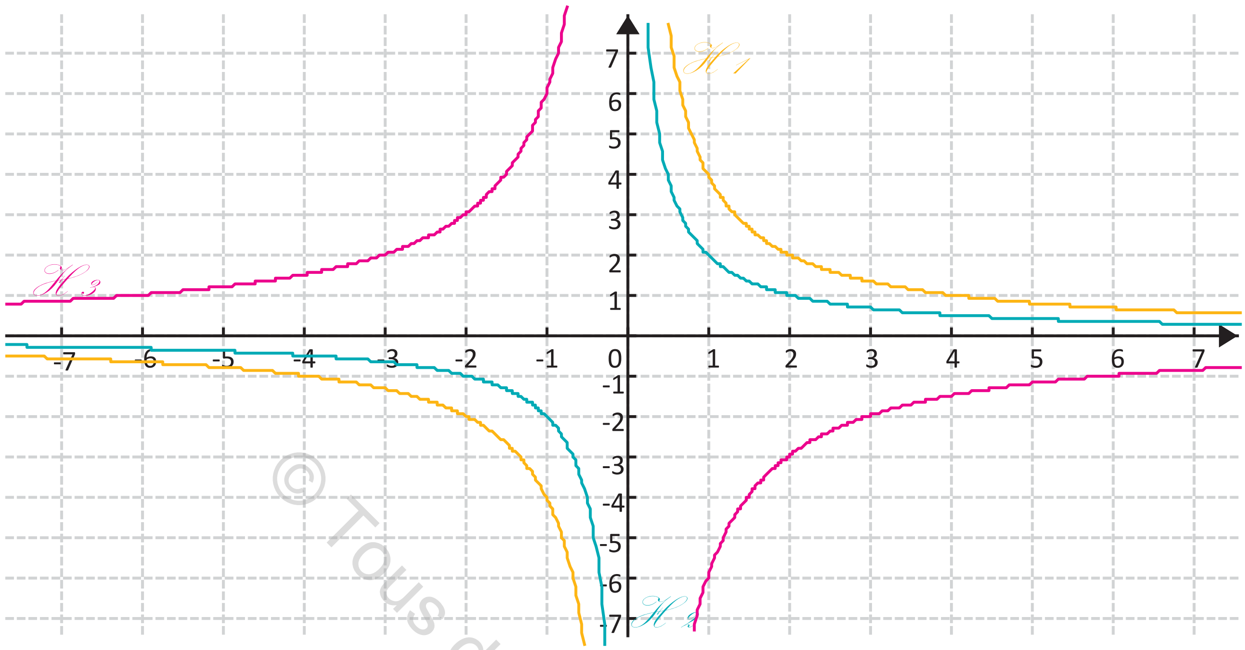
2) Résoudre les équations : $f(x) = 5$ *et* $f(x) = -2$.

3) Comparer $f\left(\sqrt{2013}\right)$ *et* $f\left(\sqrt{2014}\right)$.

4) Tracer la courbe représentative $\zeta(f)$ dans un repère.

Activité 7

On donne ci-dessous trois hyperboles $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$ qui représentent respectivement les fonctions *f*, *g* et *h.*



1) Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

a) $f(x)=\dfrac{4}{x}$; $g(x)=\dfrac{1}{2x}$; $h(x)=\dfrac{-6}{x}$

b) h est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

c) pour tout réel non nul x : $g(x) \leq f(x)$.

2) Résoudre graphiquement les équations suivantes :

a) $f(x)=4$

b) $g(x)=-2$

c) $h(x)=-1$

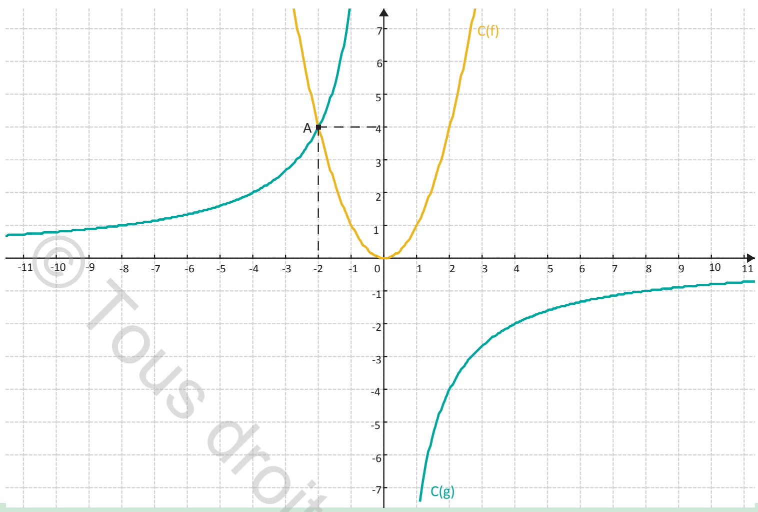
Exercice résolu

1) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2=\dfrac{-8}{x}$.

2) Utiliser le graphique pour déterminer le signe de $E(x)=x^2+\dfrac{8}{x}$.

Solution

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \dfrac{-8}{x}$. On trace dans un même repère les courbes représentatives de f et g.



Les abscisses des points d'intersection de $\zeta(f)$ et $\zeta(g)$ sont les solutions de l'équation : f(x) = g(x) c à d de l'équation : $x^2 = \dfrac{-8}{x}$.

On a donc d'après le graphique $S_{\mathbb{R}} = \{-2\}$

2) D'après le graphique ci-dessus on a :

- Pour tout $x \in]-\infty;-2]$, $\zeta(f)$ est au dessus de $\zeta(g)$ donc
  Pour tout $x \in]-\infty;-2]$ on a : $f(x) \geq g(x)$.
  équivaut à $x^2 \geq \dfrac{-8}{x}$ équivaut à $x^2 + \dfrac{8}{x} \geq 0$
- Pour tout $x \in [-2;0[$, $\zeta(f)$ est en dessous de $\zeta(g)$ donc
  Pour tout $x \in [-2;0[$, on a : $f(x) \leq g(x)$
  équivaut à $x^2 \leq \dfrac{-8}{x}$ équivaut à $x^2 + \dfrac{8}{x} \leq 0$
- Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\zeta(f)$ est au dessus de $\zeta(g)$ donc
  Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a : $f(x) \geq g(x)$
  équivaut à $x^2 \geq \dfrac{-8}{x}$ équivaut à $x^2 + \dfrac{8}{x} \geq 0$

On résume les résultats obtenus par le tableau de signe ci-contre :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x^2 + \dfrac{8}{x}$		+	0	-	||	+	

Fonctions $x \mapsto ax^2$

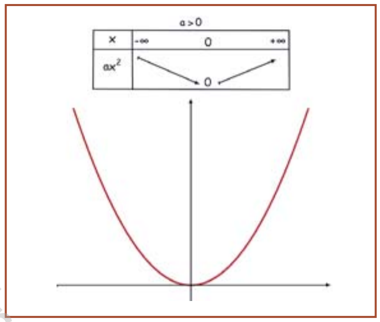
Fonction carrée

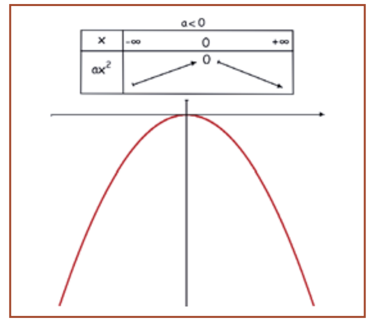
$(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère orthogonal du plan.

La courbe représentative de la fonction : $x \mapsto x^2$ est une **parabole de sommet O et d'équation : $y = x^2$. L'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour cette parabole.**

Fonctions $x \mapsto ax^2$

La courbe représentative de la fonction : $x \mapsto ax^2$ dans un repère orthogonal est une **parabole de sommet l'origine du repère, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et a pour équation : $y = ax^2$**





Fonctions $x \mapsto \dfrac{a}{x}$

Fonction inverse

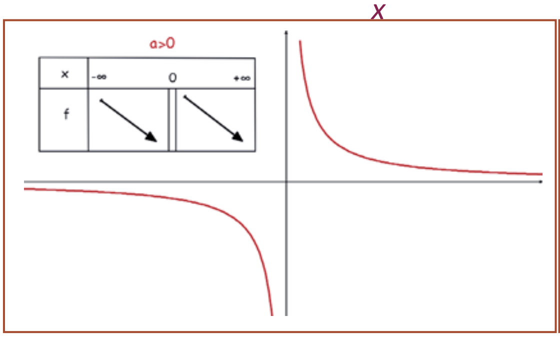
La courbe représentative de la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ dans un repère du plan est une

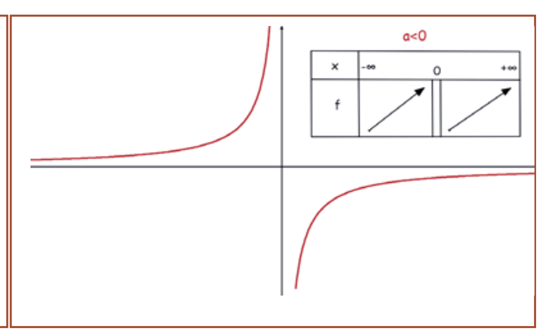
hyperbole d'asymptotes les axes de ce repère et d'équation : $y = \dfrac{1}{x}$.

L'hyperbole est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Fonctions $x \mapsto \dfrac{a}{x}$

La courbe représentative de la fonction : $x \mapsto \dfrac{a}{x}$ dans un repère est une **hyperbole d'asymptotes les axes du repère et d'équation : $y = \dfrac{a}{x}$. Cette hyperbole est symétrique par rapport à l'origine du repère.**



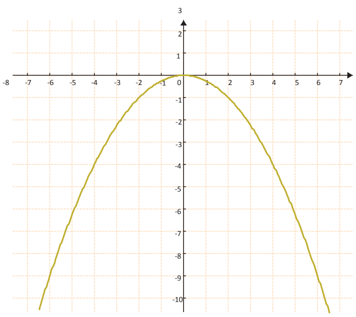


S'auto-évaluer

Vrai-Faux

Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

La courbe ci-contre est la Représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=ax^2$.



8. f est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

9. f est négative sur $\mathbb{R}$.

10. La courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

11. Si $f(x)=-2$, alors $x=2$.

12. $\dfrac{1}{f\left(\sqrt{2}\right)} > \dfrac{1}{f\left(\sqrt{3}\right)}$.

13. pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2$.

14. Si $f(x)\leq -2$ alors, $x\leq -2$ ou $x\geq 2$.

Le tableau ci-dessous résume le sens de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x)=\dfrac{a}{x}$ *avec* $a\neq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g	↗ (croissante)	‖	↗ (croissante)

1. g est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

2. $a<0$.

3. $f(-3)>f(-2)$.

4. pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $g(x)>0$.

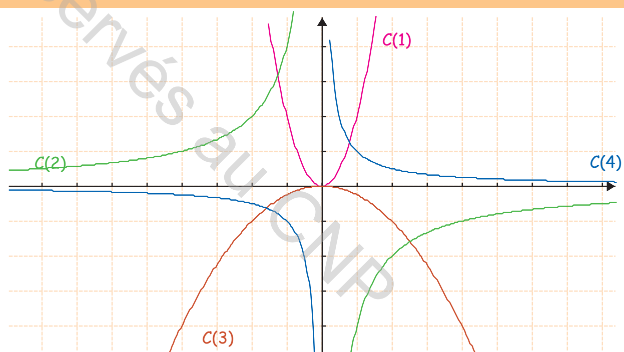
5. si $g(1)=-1$ *alors* $g(x)=-x$.

6. la courbe représentative de g dans un repère du plan est un parabole .

Q C M

Les courbes(*C1*) , (*C2*), (*C3*) et (*C4*) sont les représentations graphiques respectives des fonctions g_1, g_2 , g_3 et g_4 .

À l'aide du graphique, indiquer les propositions correctes.

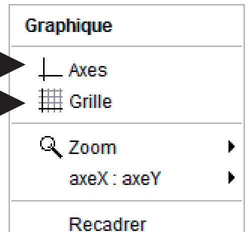


A	B	C	D
$g_1(x)=x^2$	$g_2(x)=\dfrac{3}{x}$	$g_3(x)=\dfrac{-1}{4}x^2$	$g_4(x)=\dfrac{-2}{x}$
g_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$	g_2 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$	g_3 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$	g_4 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$
Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ on a $g_1(x)\geq g_4(x)$	Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ on a $g_2(x)<0$	Pour tout $x\geq 0$ on a $g_4(x)\geq g_2(x)$	Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ on a $g_3(x)<0$
L'équation $g_1(x)=g_4(x)$ admet deux solutions.	L'équation $g_2(x)=g_3(x)$ n'admet pas de solutions.	L'équation $g_4(x)=\dfrac{1}{2013}$ n'admet pas de solutions.	L'équation $g_1(x)=g_2(x)$ admet une seule solution.

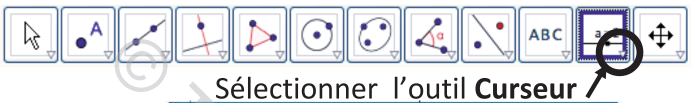
Objectif : *observer de façon dynamique la représentation graphique d'une fonction* $x \mapsto ax^2$ *et la fonction* $x \mapsto \dfrac{b}{x}$ *en faisant varier les réels a et b.*

Lancer le logiciel GeoGebra

1. Afficher la grille et les axes en cliquant sur le bouton droit de la souris et en sélectionnant les éléments à activés.

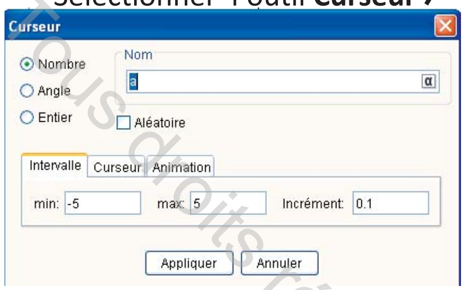


2. Cliquez sur le petit triangle dans le coin inférieur droit de l'outil ***Curseur***



Sélectionner l'outil **Curseur**

Construire deux curseurs nommés a et b tels que les nombres a et b varient entre 5 et-5 avec un pas de 0,1

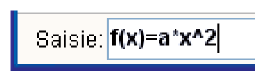


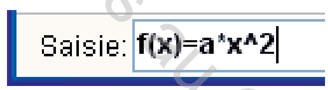
3. On va afficher la représentation graphique de la fonction *f* définie par $f(x)=ax^2$ *et* $g(x)=\dfrac{b}{x}$,

où a et b sont deux nombres définis par les curseurs.

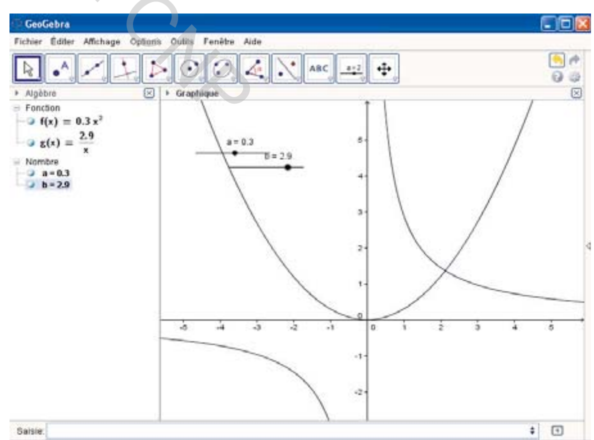
a. Dans le champ de saisie, entrer l'expression $f(x)=a*x^2$ de la fonction *f*

puis l'expression $g(x)=b/x$ de la fonction g.





b. Donner une expression algébrique de la fonction *f* et la fonction g dont les courbes représentatives sont affichées à l'écran .



Manipulation et observation

A l'aide des deux curseurs a et b, il est possible de modifier l'expression algébrique de la fonction *f et g*

4. Afficher la représentation de la fonction $f(x)=-0{,}4x^2$

et $g(x)=\dfrac{-4}{x}$.

Donner les coordonnées du point d'intersection de C(f) et C(g).

5. Déplacer le curseur b seulement.

Que peut-on conjecturer sur l'influence du signe de b sur le sens de variation de g ?

6. Déplacer le curseur a seulement

Que peut-on conjecturer sur l'influence du signe de a sur le sens de variation de f ?

1 Déterminer les images des réels suivants par la fonction carrée :

$\frac{3}{4}$; 10^{-4};-10^{-2} ; $\sqrt{3}$;$-\sqrt{5}$;$1+\sqrt{2}$ *et* $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

2 Déterminer les éventuels antécédents des réels suivants par la fonction carrée :

4 ; 25 ; -9 ; 2 ; 0 ; -1 ; 1 ; $\frac{1}{4}$.

3

1. a) Donner le sens de variation de la fonction carrée sur l'intervalle $[-6;2]$.
   b) En déduire un encadrement de x^2 pour $-6<x<2$.
2. Reprendre la même question avec les intervalles $[2;5]$ *et* $[-3;0]$

4 Dans chacun des cas suivants, déterminer pour quelles valeurs de x on a :

$x^2>100$; $25\le x^2\le 36$; $x^2\le 9$;
$4<x^2<5$; $10^{-2}\le x^2\le 1$

5 Représenter graphiquement chacune des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

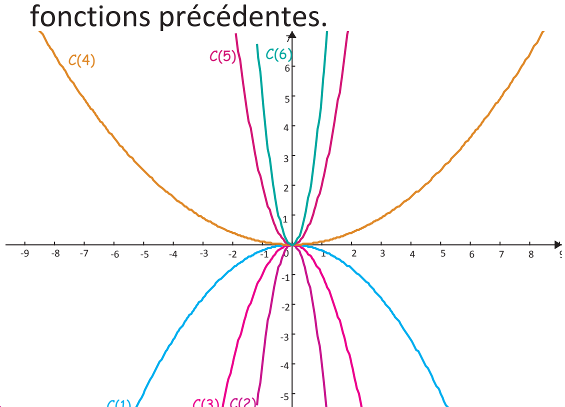
$$f(x)=-\frac{3}{2}x^2 \text{ et } g(x)=\frac{3}{4}x^2$$

6 On considère les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

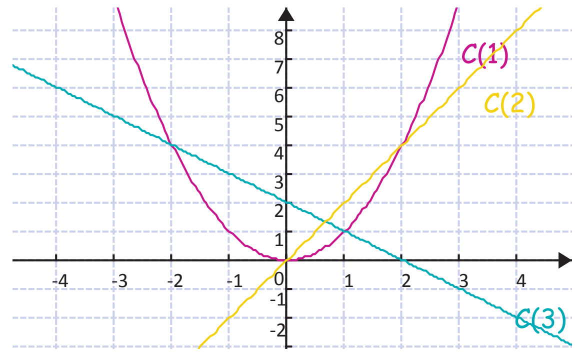
$f_1(x)=5x^2$; $f_2(x)=2x^2$; $f_3(x)=0,1x^2$;

$f_4(x)=-\frac{1}{5}x^2$; $f_5(x)=-x^2$; $f_6(x)=-4x^2$

sur le graphique ci-dessous, identifier la représentation graphique de chacune des fonctions précédentes.



7 En utilisant les représentations graphiques ci-dessous, répondre par vrai ou faux.



a) Si $0\le x\le 2$, alors $x^2\le 2x$
b) Si $x\le 0$, alors $x^2\ge 2x$
c) Si $x\le 1$, alors $x^2\le -x+2$
d) Si $-2\le x\le 0$,alors $2x\le x^2\le -x+2$
e) Si $x\ge 2$, alors $x^2\ge 2x$
f) Si $x^2\ge 2x$, alors $x\ge 2$

8 Soit T la période d'un phénomène (exprimée en secondes). En physique, on définit la fréquence de ce phénomène par $f=\frac{1}{T}$.

Calculer la fréquence pour les valeurs de T suivantes : $\frac{1}{7}$; $\frac{2}{3}$; 2 ; $\frac{5}{4}$; 5

9

1) Compléter le tableau de variation ci-dessous :

x	$\frac{-7}{3}$ $\qquad$ $\frac{-1}{2}$
$\frac{1}{x}$	

2) En déduire un encadrement de $\frac{1}{x}$ lorsque $x\in\left[\frac{-7}{3};\frac{-1}{2}\right]$

10

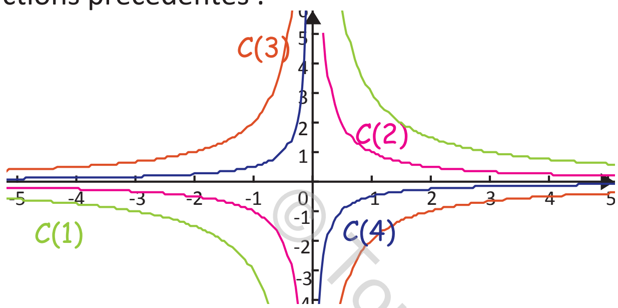
1) Soit x un réel tel que $3<x\le 6$
Donner un encadrement de x^2 puis de $\frac{1}{x^2}$

2) Soit x un réel tel que $-4<x\le -2$
Donner un encadrement de x^2 puis de $\frac{1}{x^2}$

11 Soit f, g, h et k des fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\frac{1}{x}$; $g(x)=\frac{3}{x}$; $h(x)=-\frac{2}{x}$

et $k(x)=-\frac{1}{2x}$

Sur le graphique ci-dessous, identifier la représentation graphique de chacune des fonctions précédentes .



12 On considère une fonction f définie sur $]0,+\infty[$ telle que $f(0,5)=-6$ et $f(2)=-\frac{3}{2}$

1) Peut- on en déduire les variations de f sur $]0,+\infty[$?

2) **a)** On sait que pour tout $x\in]0,+\infty[$; $f(x)=\frac{k}{x}$ où k est un réel . Déterminer le réel k.

b) Démontrer que la fonction f est strictement Croissante sur $]0,+\infty[$

13 Soit les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2$, $g(x)=3x^2$ et $h(x)=-2x^2$ et les tableaux suivants

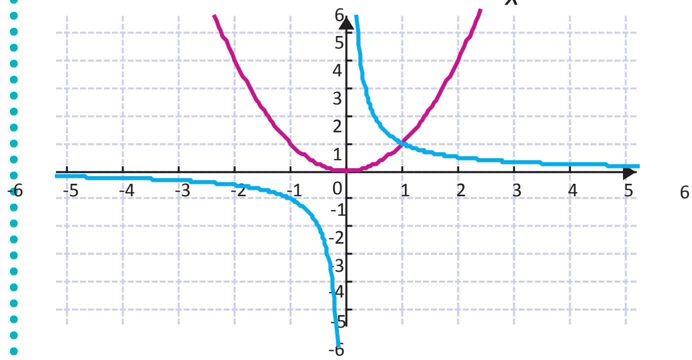
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
......		↘	0	↗	2	↗	

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
......		↗	0	↘	-2	↘	

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
......		↘	3	↘	0	↗	

Associer à chaque fonction le tableau donnant son sens de variation –Justifier votre réponse.

14 On donne les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$.



1) Justifier graphiquement que, pour tout $x < 0$, on a $\frac{1}{x} < x^2$.

2) Par une lecture graphique, comparer x^2 et $\frac{1}{x}$ lorsque $x > 0$.

3) **a)** Vérifier que, pour tout $x\neq 0$, on a :

$$x^2-\frac{1}{x}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x}$$

b) Retrouver les résultats précédents.

15 On considère la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = ax+b.

On sait que la droite qui représente cette fonction dans un repère passe par le point A(-a ; 0).

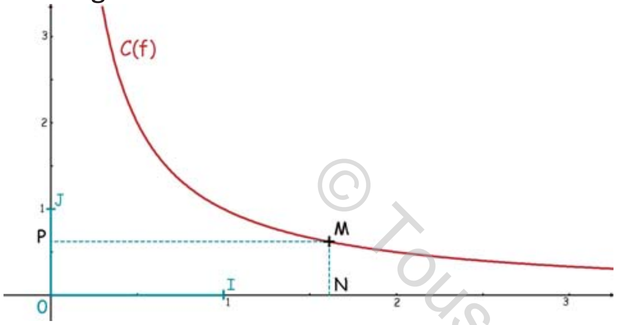
1) Montrer que le point B(a ; b) appartient à la courbe de la fonction carrée.

2) En déduire un encadrement de b, sachant que $-7\leq a\leq -6$.

16 Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan.

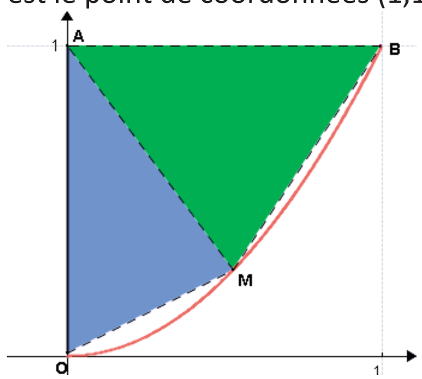
Montrer que toute droite passant par l'origine et de coefficient strictement positif coupe la représentation graphique de la fonction inverse en deux points symétriques par rapport à l'origine.

17 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Soit $C(f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonale du plan.
Soit x un réel strictement positif et $N(x;0)$.
Soit M le point de $C(f)$ d'abscisse x.
On construit le point P tel que ONMP soit un rectangle.



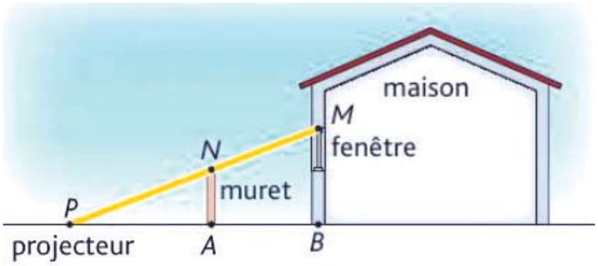
1) Déterminer les coordonnées des points M et P. En déduire que, pour toute valeur de $x>0$, l'aire du rectangle OMNP est constante.

18 Dans un repère orthogonal, on a représenté une partie de la courbe (Cf) de la fonction f définie par $f(x)=x^2$
Soit M un point de (Cf) d'abscisse x tel que $0<x<1$, A est le point de coordonnées (0,1) et B est le point de coordonnées (1,1) .



Problème : Existe –il- une position de M pour laquelle les triangles ABM et AOM ont la même aire ?
1) Exprimer l'aire de chacun des triangles ABM et AOM en fonction de x
2) En déduire les coordonnées de M pour lesquelles les deux triangles ont la même aire.

19 Un muret vertical $[AN]$ de 2m de haut est placé 3m devant le mur d'une maison (AB = 3m). Au sol, un projecteur P est dirigé vers le muret et projette une ombre BM sur le mur qui contient une fenêtre.



Problème : Où situer le projecteur *P* pour que l'ombre portée sur le mur couvre entièrement la fenêtre dont le sommet est à une hauteur de 2,5m, autrement dit pour que *BM* soit strictement supérieur à 2,5 m ?
On pose $x=PA$, la distance du projecteur au muret.

1) Montrer que l'expression de la hauteur BM en fonction de x est donnée par :
$$BM=2+\frac{6}{x}$$
2) On considère la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{6}{x}$.
- **a)** Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.
- **b)** Préciser le sens de variation de f
- **c)** Conjecturer ce que fait l'ombre portée sur le mur de la maison si le projecteur s'éloigne du muret ?

3) Utiliser le graphique de f pour résoudre l'équation $BM=2,5$.
4) Utiliser le graphique de f pour répondre alors au problème posé.

CHAPITRE 5

Calcul vectoriel

Contenu du chapitre

- Pour commencer
- Cours
  - Addition vectorielle
  - Multiplication d'un vecteur par un réel
- S'auto-évaluer
- Activités TICE
- Exercices et problèmes

AU FIL DU TEMPS

Au XVII^{e} siècle, le contexte géométrique et algébrique du vecteur est présent, mais aucune définition précise n'est proposée. Il faut attendre la première moitié du XIX^{e} siècle pour Sir **William Hamilton** (1895 – 1865) donne la définition mathématique actuelle du mot vecteur

William Hamilton (1805-1865).

En physique, on utilise des vecteurs pour modéliser la vitesse, la force, le champ électrique. En effet, les fonctions peuvent modéliser la valeur d'une grandeur (distance, intensité électrique, etc...), mais cette information est parfois insuffisante pour décrire un phénomène : si le phénomène a une intensité, une direction et un sens, c'est le vecteur que l'on utilisera.

Par exemple, le vecteur vitesse représentera la valeur de la vitesse par sa longueur, mais représentera aussi la direction et le sens de la vitesse...

Pour commencer

Activité 1

Somme de deux vecteurs
Produit d'un vecteur par un réel

Se rappeler

Deux vecteurs non nuls sont égaux signifie ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

Se rappeler

Relation de chasles
Pour tous points A , B et C on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Règle du parallélogramme
A, B, C et D quatre points non alignés (ABCD est un parallélogramme)équivaut à ($\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$)

Compléter en utilisant la grille ci-contre :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{K.}=\overrightarrow{.J}$; $\overrightarrow{NK}=\overrightarrow{F.}=\overrightarrow{.G}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\dots$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}=\dots$;

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DP}=\dots$; $2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{F.}$

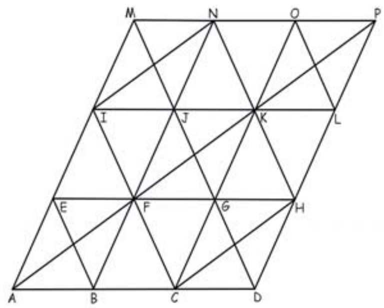
$-2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{G.}$; $\frac{1}{3}\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{F.}$

$3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{A.}$; $2\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{G.}$

$\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{.M}$; $3\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{A..}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{A.}$; $3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{A.}$

$\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{MN}=\dots$



Activité 2

Vecteurs colinéaires

Se rappeler

A, B et C sont trois points alignés équivaut à $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont colinéaires*

ABC est un triangle, D est le point du plan tel que $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

1) Exprimer $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2) Déduisez-en que B, C et D sont alignés.

Activité 3

Se rappeler

((AB) et (CD) sont deux droites parallèles) équivaut à $\left(\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont colinéaires}\right)$

ABC est un triangle. Le point I est le milieu du segment $[AB]$. Le point P est tel que $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

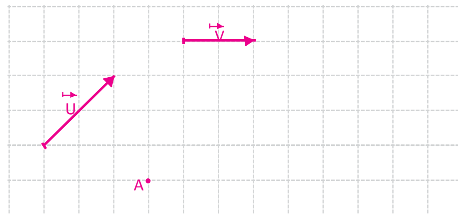
1) Faire une figure.

2) Démontrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont colinéaires.

3) Déduire la position relative des droites *(AP) et (C I).*

I Addition de deux vecteurs :

Activité 1

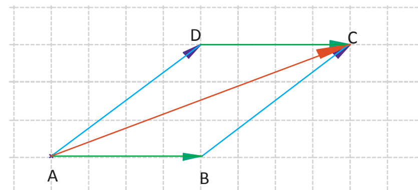


1) Construire le point C tel que : $\overrightarrow{AC}=\vec{u}+\vec{v}$.

2) Construire le point D tel que : $\overrightarrow{AD}=\vec{v}+\vec{u}$.

3) Que peut-on déduire pour les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ *et* $\vec{v}+\vec{u}$?

Activité 2

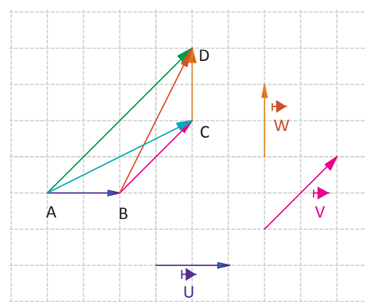


ABCD étant un parallélogramme. On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$.

Montrer que : $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

> Pour tout vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ on a : $\vec{U}+\vec{V}=\vec{V}+\vec{U}$

Activité 3



On considère les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ *et* $\vec{w}$.

1) Utiliser les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ pour exprimer puis simplifier les sommes $\vec{u}+\left(\vec{v}+\vec{w}\right)$ et $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)+\vec{w}$.

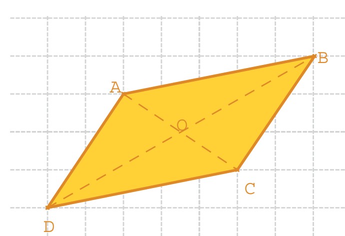
2) Que peut-on déduire pour l'addition des vecteurs ?

> Pour tous vecteurs du plan $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{w}$ on a :
> $\vec{U}+\vec{V}+\vec{W}=\vec{U}+(\vec{V}+\vec{W})=(\vec{U}+\vec{V})+\vec{W}$

Activité 4

Soit ABC un triangle. Construire le point M tel que $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

Activité 5

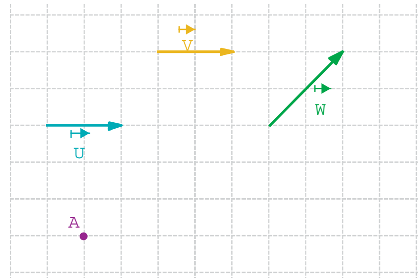


ABCD est un parallélogramme de centre O.

1) Montrer que : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

2) Montrer que, pour tout point M on a :
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$.

Activité 6



1) a) Construire les points B et C vérifiant respectivement $\vec{U}+\vec{W}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{V}+\vec{W}=\overrightarrow{AC}$.

b) Que peut-on conclure ?

2) Soit $\vec{r}$, $\vec{s}$ et $\vec{t}$ trois vecteurs du plan vérifiant : $\vec{r}+\vec{s}=\vec{t}+\vec{s}$. Utiliser la première question pour montrer que : $r=t$.

Pour tous vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ on a : $\left(\vec{U}+\vec{W}=\vec{V}+\vec{W}\right)$ *équivaut à* $\left(\vec{U}=\vec{V}\right)$

Activité 7

A, B et C étant trois points distincts du plan .

Déterminer le point M tel que les vecteurs $\vec{S_1}=\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AM}\right)+\overrightarrow{AB}$ et $\vec{S_2}=\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CM}\right)$ soient égaux.

Activité 8

Soit A, B et I trois points distincts du plan.

1) Soit M un point quelconque du plan.
Exprimer $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MI}$ dans le cas où I est le milieu du segment $[AB]$.

2) On suppose qu'il existe un point M du plan tel que : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.
Montrer que I est le milieu de $[AB]$.

A, B et I sont trois points distincts du plan.

- Si I est le milieu du [AB] alors pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.
- S'il existe un point K du plan tel que $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=2\overrightarrow{KI}$, alors I est le milieu du [AB].

Activité 9

Soit ABC un triangle . I, J et K sont respectivement les milieux des segments $[AB]$, $[AC]$ *et* $[BC]$.

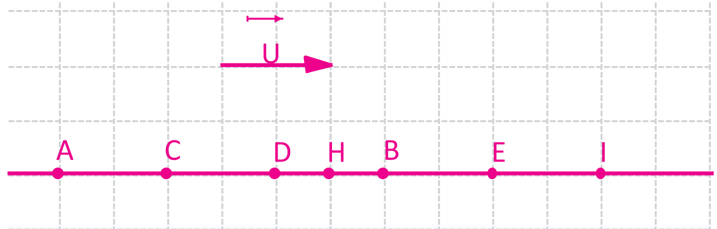
Montrer que $\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CI}=\vec{0}$.

Activité 10

Soit A et B deux points distincts du plan. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=4$ (l'unité de longueur est le cm).

II Multiplication d'un vecteur par un réel :

Activité 1



1) Soit la figure ci-contre :

a) Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\vec{U}$.

b) Compléter : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + ... = 2\vec{U} + ...$

2) **a)** Exprimer $\overrightarrow{CH}$ en fonction de $\vec{U}$.

b) Compléter : $\overrightarrow{CH} = ... + \overrightarrow{BH} = ... + \frac{-1}{2}\vec{U}$.

> Pour tout vecteur $\vec{U}$ et tous réels a et b on a :
> $(a+b)\vec{U} = a\vec{U} + b\vec{U}$

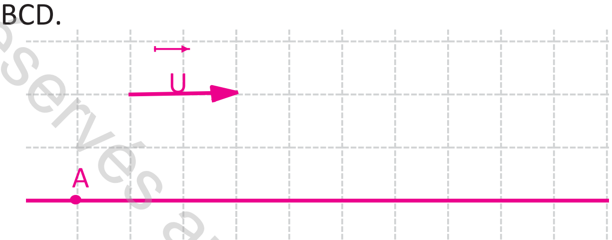
Activité 2

Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan. On considère les points A, B, C et D tels que : $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{i} + 3\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$ et $\overrightarrow{OD} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$.

a) Exprimer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

b) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Activité 3



1) Placer le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \frac{5}{2}\vec{U}$

Puis placer le point C tel que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.

2) En utilisant la figure, exprimer $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\vec{U}$.

3) En déduire que $2\left(\frac{5}{2}\vec{U}\right) = \left(2 \times \frac{5}{2}\right)\vec{U}$

> Pour tout vecteur $\vec{U}$ et tous réels a et b on a :
> $a\left(b\vec{U}\right) = (ab)\vec{U}$

Activité 4

Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan.

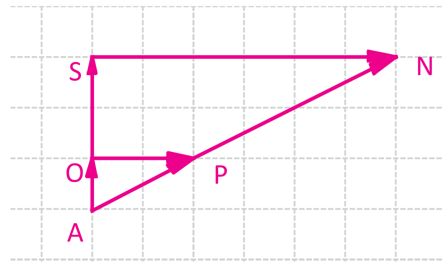
On considère les deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ définis par : $\vec{U} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ et $\vec{V} = \vec{i} + 5\vec{j}$.

1) Vérifier que $\vec{U} - 2\vec{V} = -13\vec{j}$. Exprimer alors $\vec{j}$ en fonction des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

2) Exprimer $\vec{i}$ en fonction de $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

Activité 5

On donne la figure ci-contre :



On pose $\vec{U}=\overrightarrow{AO}$ et $\vec{V}=\overrightarrow{OP}$.

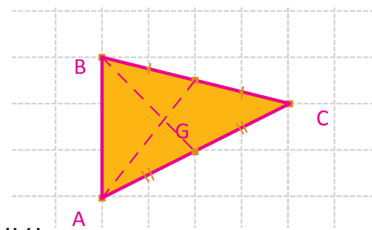
1) Exprimer $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AP}$.

2) Exprimer $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{SN}$.

3) En déduire que $3\left(\vec{U}+\vec{V}\right)=3\vec{U}+3\vec{V}$.

> Pour tous vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et tout réel a on a :
> $a\left(\vec{U}+\vec{V}\right)=a\vec{U}+a\vec{V}$

Activité 6



Soit ABC un triangle et G son centre de gravité .

1) Montrer que, pour tout point M du plan on a :
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

2) Soit D le point du plan défini par : $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.
Construire le point D puis montrer que ABDC est un parallélogramme.

Activité 7

O, I et J étant trois points non alignés. On pose $\vec{u}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OJ}$.

1) Construire les points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}-\vec{v}$, $\overrightarrow{OB}=2\vec{u}-3\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC}=-\vec{u}$.

2)

a) Construire le point K défini par : $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{3}{2}\vec{v}$.

b) Montrer que K est le milieu de $[BC]$.

Activité 8

1) Soit $\vec{w}$ un vecteur et a un réel non nul.
Compléter : $\left(a\times\vec{w}=\vec{0}\right)$ *équivautà* ....

2) Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et a un réel non nul.

Compléter : $a\vec{u}=a\vec{v}$ *équivaut à* : $a\vec{u}-a\vec{v}=$ ...... *équivaut à* : $a\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=$ ....

équivaut à : $\vec{u}-\vec{v}=$ ...... *équivaut à* : $\vec{u}=$ .....

> Pour tous vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et tout réel non nul a on a :
> $\left(a\vec{U}=a\vec{V}\right)$ *équivaut à* $\left(\vec{u}=\vec{v}\right)$

Activité 9

Soit ABCD un parallélogramme de centre O. On considère les points E et F définis par les égalités vectorielles suivantes : $\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DO}+\frac{4}{3}\overrightarrow{OE}$; $\overrightarrow{DC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BF}$.

1) Montrer que $\overrightarrow{AB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AF}$.

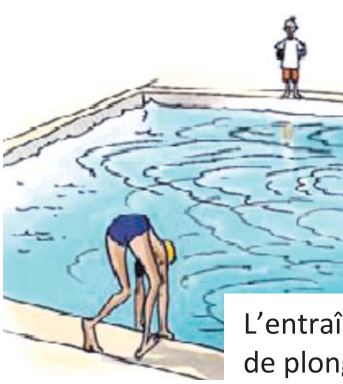
2) En déduire que DEFA est un parallélogramme .

Pour tous vecteurs $\overline{U}$, $\overline{V}$ et $\overline{W}$ et pour tous réels a et b	
Propriétés de la somme de deux vecteurs	Propriétés du produit d'un vecteur par un réel
$\overline{U}+\overline{V}=\overline{V}+\overline{U}$ $\overline{U}+\overline{V}=\overline{V}+\overline{U}$	$(a+b)\overline{U}=a\overline{U}+b\overline{U}$
$(\overline{U}+\overline{V})+\overline{W}=\overline{U}+(\overline{V}+\overline{W})=\overline{U}+\overline{V}+\overline{W}$	$a(b\overline{U})=(ab)\overline{U}$
$(\vec{U}+\vec{W}=\vec{V}+\vec{W})$ *équivaut à* $(\vec{U}=\vec{V})$	$a(\overline{U}+\overline{V})=a\overline{U}+b\overline{V}$
	$a\neq 0.(a\vec{u}=a\vec{v})$ *équivaut à* $(\vec{u}=\vec{v})$
Pour tous points A et B distincts du plan	
Si (I est le milieu de *[AB])* alors *(* $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ pour tout point *M* du plan *)*	

Savoir prendre la bonne direction

Énoncé

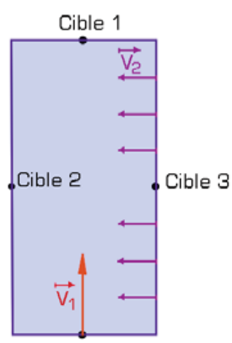
Lorsque l'on nage en mer, on est confronté aux courants et il est très important de bien les appréhender pour ne pas s'échouer sur des rochers !



Afin de mieux maîtriser les risques, Nadia, bonne nageuse, décide de faire un stage en piscine pour acquérir de bons réflexes.

L'entraîneur lui demande de plonger et de traverser le bassin pour arriver jusqu'à lui, selon une direction parallèle à la longueur de la piscine. Nadia part face à lui, mais se retrouve dans l'angle, comme sur le dessin ci-dessous.

Modélisation



On modélise ainsi la situation :
On considère que Nadia nage à une vitesse constante de $v_1=4km/h$ (par rapport à l'eau) et que la piscine crée un courant perpendiculaire à la longueur : l'eau de la piscine est en mouvement, avec une vitesse constante de $v_2=2km/h$;
On représente les vitesses par des vecteurs : la direction et le sens du vecteur sont ceux du mouvement ; la longueur du vecteur correspond à la valeur de la vitesse (vous prendrez $1cm=1km/h$). On nomme ainsi $\overrightarrow{V_1}$ la vitesse de Nadia par rapport à l'eau, $\overrightarrow{V_2}$ la vitesse de l'eau par rapport à la bordure et $\overrightarrow{V_3}$ la vitesse de Nadia par rapport à la bordure ;
On admet que l'on a : $\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{v_3}$
On souhaite étudier le cas ou Nadia souhaite atteindre la cible 1, le cas ou elle souhaite atteindre la cible 2 et le cas ou elle souhaite atteindre la cible 3. Les dimensions de la piscine sont de 8mètres de large et 25mètres de longueur. Les cibles sont au milieu de chaque côté
Quelle direction Nadia doit-elle prendre pour atteindre sa cible ? Peut-elle toujours l'atteindre ?

S'auto-évaluer

Vrai-Faux

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. A, B et C sont trois points du plan non alignés.

a. Si $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, alors $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

b. Si $\vec{v}=3\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{AC}$, alors $\vec{v}=3\overrightarrow{AB}+7\overrightarrow{AC}$.

c. Si $\vec{w}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$, alors $\vec{w}=3\overrightarrow{BC}-5\overrightarrow{BA}$.

2. Si A, B, C, D et E sont cinq points tels que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$, alors on a :

a. Les points B et D sont confondus et les points C et E sont confondus.

b. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{ED}$

c. $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{BD}$

d. Les droites (EC) et (BD) sont parallèles.

3. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan non colinéaires. A, B, C et D sont des points du plan.

a. Si $\overrightarrow{AB}=2\vec{u}-3\vec{v}$ et $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

b. Si $\overrightarrow{AB}=4\vec{u}+5\vec{v}$ et $\overrightarrow{CD}=-2\vec{u}-\frac{5}{2}\vec{v}$, alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

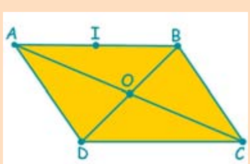
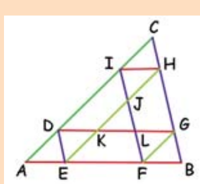
c. Si $\overrightarrow{CB}=-2\vec{u}+5\vec{v}$ et $\overrightarrow{AD}=3\vec{u}-\frac{15}{2}\vec{v}$, alors les points A, B, C et D sont alignés

4. Si A, B, C et D sont quatre points tels que $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{BC}$ alors :

a. Les points A, B et D sont alignés.

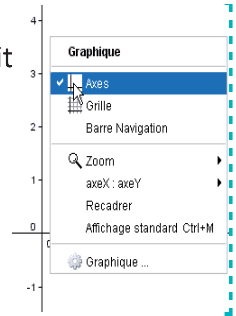
b. Le point B est le milieu du segment $[AD]$.

Q C M

ABC est un triangle, $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ alors :	a. $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont non colinéaires	b. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$	c. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$
A et B deux points donnés. Si le point M vérifie $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$, alors :	a. $\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}$	b. $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$	a. $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BA}$
ABCD est un parallélogramme de centre O et I estle milieu du segment $[AB]$. 	a. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$	b. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$	c. $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
Soit ABCD un parallélogramme de centre O. Le point K est le symétrique du milieu I de [AB] par rapport à B. Le point L est tel que $\overrightarrow{DL}=-2\overrightarrow{DA}$.	a. DCKI n'est pas un trapèze	b. $\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$	c. Les points I, C et K sont alignés
Dans la figure ci-contre, les droites de même couleur sont parallèles et on a : $\overrightarrow{CI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$. On alors 	a. $\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AG}-3\overrightarrow{AB}$	b. $\overrightarrow{DG}=-3\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FG}$	c. $\overrightarrow{AG}=-2\overrightarrow{GL}+4\overrightarrow{GH}$

Dans cette activité nous allons utiliser le programme **GéoGebra**

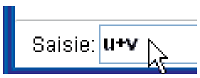
1. Lancer **GéoGebra,** cliquer droit sur la sourit et décocher le menu **Axes**



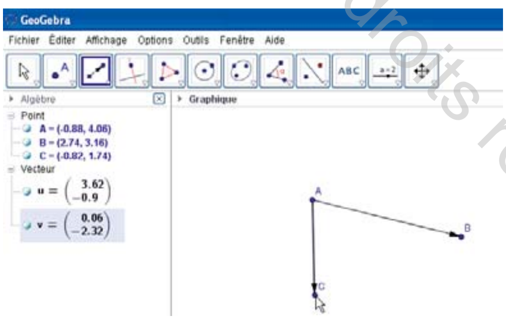
2. En cliquant sur  placer trois points A, B et C distincts

3. En cliquant sur  Construire les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ **GéoGebra** les nomme u et v

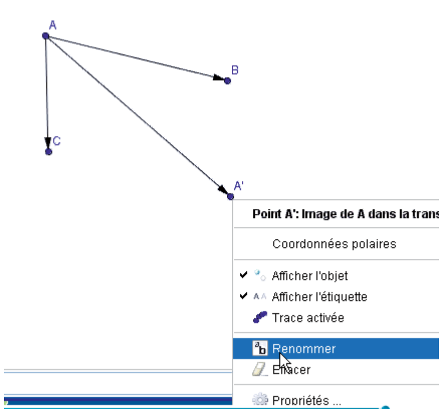
4. Dans le champ de saisie (en bas de la page)



faire calculer le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ en validant **u+v** ; **GéoGebra** nommera le vecteur somme **w**.

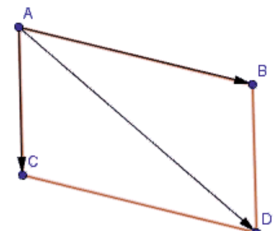


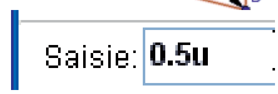
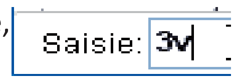
5. Choisir  construire le représentant de **w** d'origine **A** en cliquant sur **A** puis sur **w** . **GéoGebra** construit le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ et le nomme **z** . **Renommer** le point A' en D ; le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est alors renommé $\overrightarrow{AD}$



<u>Méthode pour renommer un point</u> : Cliquer sur le point en question avec le bouton droit de la souris

6. Construire le parallélogramme ABCD, en choisissant le mode polygone  , et on cliquant successivement sur A, B, D, C et A

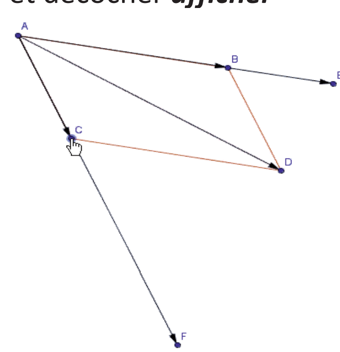


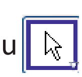
7. Dans le champ de saisie,  faire calculer le vecteur $0,5\overrightarrow{AB}$, en validant **0,5u** ; **GéoGebra** nommera le vecteur somme **e** . Dans le champ de saisie,  faire calculer le vecteur $3\overrightarrow{AC}$ en validant **3v ; GéoGebra** nommera le vecteur somme **f**

8. Choisir  et construire le représentant de **e** d'origine **B** en cliquant sur **B** puis sur **e** . **GéoGebra** construit le vecteur $\overrightarrow{BB'}$ et le nomme **g** .Renommer le point **B'** en **E ;** le vecteur $\overrightarrow{BB'}$ est alors renommé $\overrightarrow{BE}$

9. Choisir  et construire le représentant de **f** d'origine **A** en cliquant sur **A** puis sur **f** . **GéoGebra** construit le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ et le nomme **h** .Renommer le point **A'** en **F ;** le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est alors renommé $\overrightarrow{AF}$

10. Effacer les vecteurs **e, f et w** en faisant : **Clic droit** sur les vecteurs , et décocher ***afficher l'objet .***



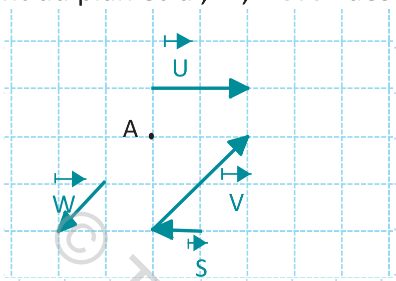
11. Dans le menu  sélectionner  puis, dans la fenêtre de travail, se placer sur le point B puis maintenir clic-gauche afin de déplacer le point B , les points D, E et F se déplacent également en restant alignés

12. Démontrer que les points D, E et F sont alignes

1 Simplifier les expressions vectorielles Suivantes :

1. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}$
2. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CB}$
3. $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

2 Soit A un point du plan et $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{s}$ des vecteurs du plan.



Reprendre la grille ci-dessous et construire les points B, C, D et E tels que :

$\overrightarrow{AB}=2\vec{w}+\vec{u}+\vec{v}$;

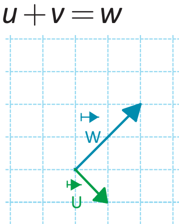
$\overrightarrow{AC}=2\vec{u}+\vec{v}+2\vec{s}$

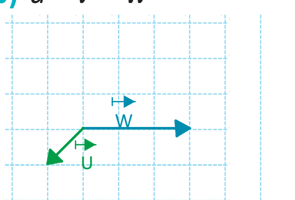
$\overrightarrow{AD}=4\vec{w}+3\vec{s}+2\vec{u}+2\vec{v}$

$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}+\vec{s}+\frac{2}{3}\vec{w}$

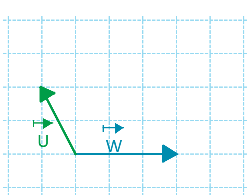
3 Reproduire les figures et construire le vecteur $\vec{v}$ vérifiant les égalités suivantes :

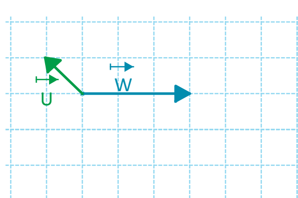
a) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$ **b)** $\vec{u}-\vec{v}=\vec{w}$





c) $\vec{u}+2\vec{v}=\vec{w}$ **e)** $2\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$





4 On donne trois points A, B et C du plan Soit M un point quelconque du plan.
Montrer que chacun des vecteurs suivants :

$\vec{U}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ et $\vec{U}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{MC}$

sont indépendants de M.

5 $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan.
Simplifier les expressions suivantes :

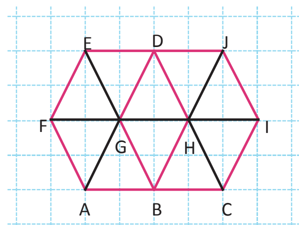
a) $-3\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)-2\left(\vec{u}-3\vec{v}\right)$

b) $-5\vec{u}+2\left(-3\vec{u}+\vec{v}\right)-5\left(\vec{u}-2\vec{v}\right)$

c) $\frac{2}{5}\vec{u}+\frac{3}{4}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{u}$

d) $\frac{1}{2}\left(2\vec{u}+\frac{2}{3}\vec{v}\right)-\left(-\vec{u}+\frac{2}{3}\vec{v}\right)$

6 En utilisant le graphique ci-dessous simplifier :

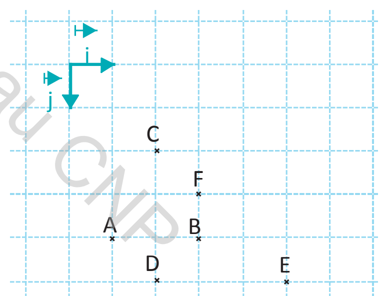


a) $2\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{BA}$

b) $\overrightarrow{JD}+2\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{BA}$ **c)** $\frac{21}{4}\overrightarrow{HG}-\frac{7}{4}\overrightarrow{IF}$

d) $\frac{5}{12}\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{DH}+\frac{1}{12}\overrightarrow{JE}$ **e)** $\frac{14}{3}\overrightarrow{FI}-\frac{7}{2}\overrightarrow{BJ}$

7 On considère la figure ci-dessous :



Soit $\vec{U}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}$ et $\vec{V}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EB}$

1. Exprimer chacun des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ en fonction de $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$.
2. En déduire l'expression de $\vec{j}$ de $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$.

8 On donne $5\vec{U}-3\vec{V}=\vec{0}$.
Exprimer à l'aide de $\vec{U}$ les vecteurs suivants :

- $\vec{W}=4\vec{U}-15\vec{V}$
- $\vec{R}=3\vec{U}-\frac{1}{3}\vec{V}$
- $\vec{S}=\frac{4}{7}\vec{U}-3\vec{V}$

9 Déterminer le vecteur $\vec{x}$ dans chacun des cas suivants :

1) $3\vec{x}+2\vec{u}-3\vec{v}=-\vec{u}+6\vec{v}+\vec{x}$
2) $\vec{u}-2\vec{v}+3\vec{w}+2\vec{x}=3\left(\vec{u}-\vec{v}\right)+6\left(\vec{x}+\vec{u}-\vec{w}\right)$

10 Déterminer le réel x dans chacun des cas suivants :

1) $3\vec{U}+\left(x\vec{U}-\vec{U}\right)=2{,}5\vec{U}$
2) $(2-x)\vec{U}+\dfrac{3}{2}x\vec{U}=\left(1-\dfrac{5}{2}x\right)\vec{U}$

11 On considère un parallélogramme EFGH.

1) Construire les points A,B,C et D tels que : $\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FG}$
2) Montrer que X est le milieu du segment $[EB]$.
3) Montrer que EBCD est un parallélogramme.

12 On considère un parallélogramme ABCD.

1) Montrer que $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{AB}$.
2) On désigne par E le milieu de $[BC]$ et par F le milieu de $[CD]$.

Montrer que $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

13 Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan.

On considère les points A, B , C et D tels que : $\overrightarrow{OA}=3\vec{i}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{i}+3\vec{j}$, $\overrightarrow{OC}=4\vec{i}+5\vec{j}$ et $\overrightarrow{OD}=6\vec{i}+2\vec{j}$

a) Exprimer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
b) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

14 Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan.

On considère les deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ définie par : $\vec{U}=2\vec{i}-3\vec{j}$ et $\vec{V}=\vec{i}+5\vec{j}$.

Exprimer chacun des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ en fonction des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$

15 ABC est un triangle, D est le point du plan tel que $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

1) Exprimer $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2) Déduisez-en que B, C et D sont alignés.

16 Soit un triangle ABC. On considère les Points :

G défini par : $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}-4\overrightarrow{GC}=\vec{0}$;

G' défini par : $-2\overrightarrow{G'A}-\overrightarrow{G'B}+5\overrightarrow{G'C}=\vec{0}$;

G'' défini par : $\overrightarrow{G''A}+\overrightarrow{G''B}+\overrightarrow{G''C}=\vec{0}$.

Montrer que les points G, G' et G'' sont alignés.

17

1) Construire un triangle ABC tel que : AB = 6cm , BC = 5cm et CA = 4cm
2) Construire les points I et J tels que $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AC}$.
3) Montrer que $\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$.
4) Exprimer $\overrightarrow{IC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
5) Déduire la position relative des droites (BJ) et (IC) .

18

1) Soit ABCD est un parallélogramme. Construire les points E et F tels que $\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD}$.
2) Montrer que $\overrightarrow{CE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$.
3) Exprimer $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4) Déduire que C, E et F sont alignés .

19 Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan.

1) On considère les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par : $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ et $\vec{v}=\vec{i}+5\vec{j}$.

Exprimer chacun des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2) Reprendre le même exercice avec :

$\vec{u}=\vec{i}-3\vec{j}$ et $\vec{v}=-\dfrac{2}{3}\vec{i}+2\vec{j}$.

Qu'observe-t-on ? pourquoi ?

20 On donne trois points A,B et C non alignés du plan.

a) Construire les points M, N et P définis par : $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

b) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c) En déduire que les points M, N et P sont alignés et que N est le milieu de $[MP]$.

d) Construire les points Q et R tels que :

$\overrightarrow{BQ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CR}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

Montrer que (MN) //(QR).

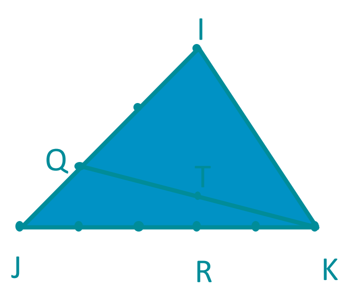
21 Soient quatre points A,B, C et D. On considère les points I et J tels que : $\overrightarrow{IA}=\alpha\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{JC}=\alpha\overrightarrow{JD}$, où α est un réel différent de 1.

1) Montrer que $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{1-\alpha}\left(\overrightarrow{AC}-\alpha\overrightarrow{BD}\right)$.

2) Que devient cette égalité, si I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$?

22 Soit IJK un triangle quelconque. Soient Q, R et T les points définis par les égalités vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{IQ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{JR}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{JK}$ et T le milieu de [QK].



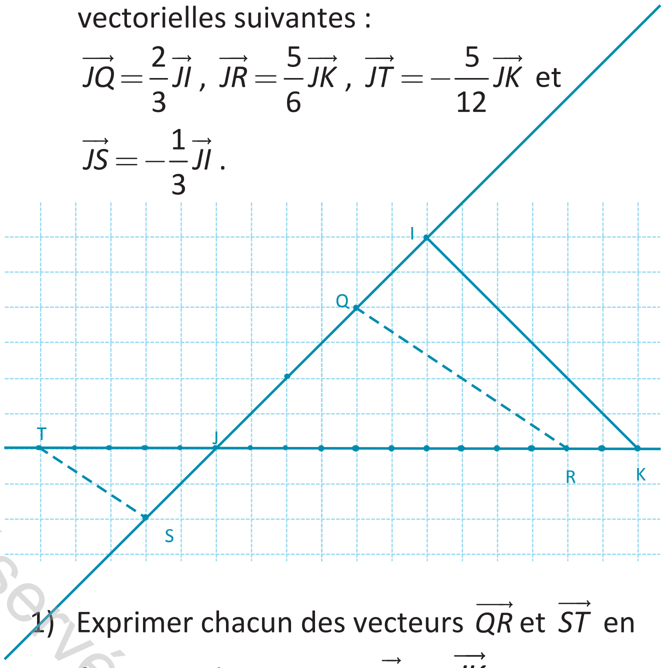
1) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{IT}$ et $\overrightarrow{IR}$ en fonctions des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

2) En déduire que les points I, T et R sont alignés.

23 Soit IJK un triangle quelconque. Soient Q, R,S et T les points définis par les égalités vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{JQ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{JI}$, $\overrightarrow{JR}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{JK}$, $\overrightarrow{JT}=-\dfrac{5}{12}\overrightarrow{JK}$ et

$\overrightarrow{JS}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{JI}$.



1) Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{QR}$ et $\overrightarrow{ST}$ en fonctions des vecteurs $\overrightarrow{JI}$ et $\overrightarrow{JK}$.

2) En déduire que les droites (QR) et (ST) sont parallèles.

CHAPITRE 6

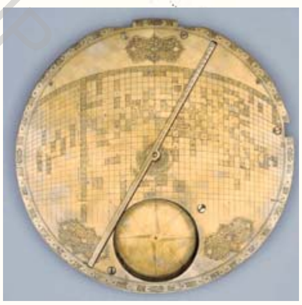
Base et repère cartésien

Contenu du chapitre

- Pour commencer
- Cours
  - Base du plan
  - Repère cartésien
  - Equation cartésienne d'une droite
  - Equation réduite d'une droite
- S'auto-évaluer
- Activités TICE
- Exercices et problèmes

AU FIL DU TEMPS

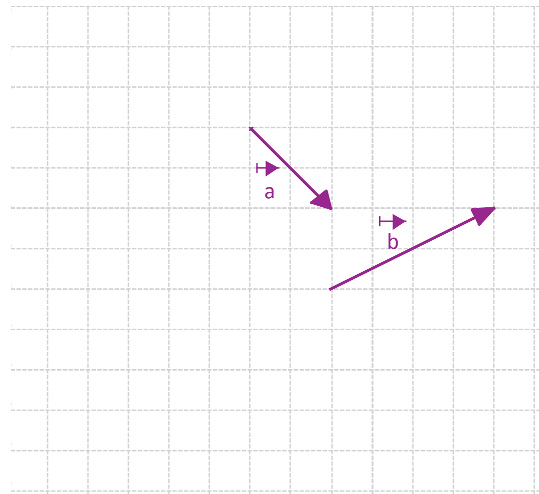
La Mecque était considérée par les musulmans du Moyen Âge comme le centre du monde. Aussi la trouve-t-on souvent au centre des cartes géographiques. L'objet présenté est une grille mathématique permettant de situer les grandes villes du monde musulman par rapport à la ville sainte. Ce type de carte, dont seuls deux exemplaires subsistent, existait dès le IXe siècle. Les positions de 150 villes de l'empire musulman sont repérées grâce à leurs coordonnées.



Carte du monde musulman centrée sur La Mecque- Iran, XVIIe siècle.
Laiton gravé. Koweit, collection al-Sabah, Dar al-Athar al-Islamiyyah, LNS 1106 M/

Pour commencer

Activité 1



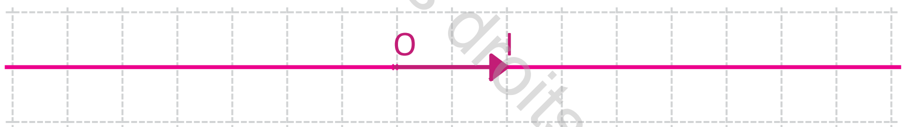
Reproduire le quadrillage ci-contre et construire un représentant de chacun des vecteurs suivants.

$\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{a}-\vec{b}$;

$2\vec{a}+\vec{b}$ et $3\vec{a}-2\vec{b}$

Activité 2 Repère cartésien d'une droite

On considère la droite (D) munie du repère cartésien $\left(O,\overrightarrow{OI}\right)$.



Placer sur la droite (D) les points A, B et C d'abscisses respectives : (-2) , $\left(\dfrac{3}{2}\right)$ et (3).

Activité 3

On considère une droite (AB) munie du repère $\left(A,\overrightarrow{AB}\right)$.

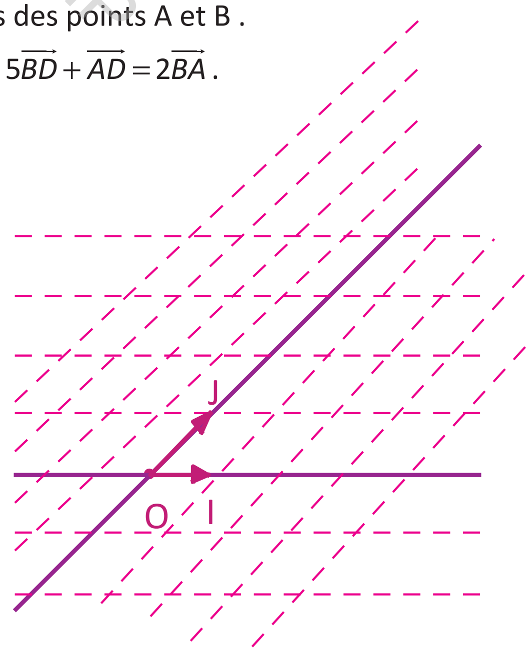
1) Déterminer x_A et x_B les abscisses respectives des points A et B .

2) Déterminer l'abscisse du point D défini par : $5\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BA}$.

Activité 4 Repère cartésien d'un plan

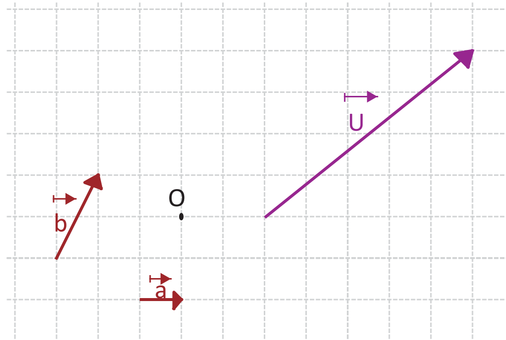
1) Reproduire la figure ci-contre où $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ est un repère cartésien du plan et placer les points $A\left(-1;2\right)$, $B(-3;0)$, $C\left(1;3\right)$ et $D\left(0,2\right)$.

2) Déterminer les coordonnées des points E et F Sachant que : $\overrightarrow{OE}=-2\overrightarrow{OI}+5\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OJ}-\overrightarrow{OI}$.



I Base du plan :

Activité 1



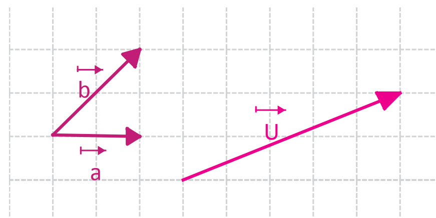
1) Reprendre le schéma ci-contre et construire le point M tel que $\overrightarrow{OM} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

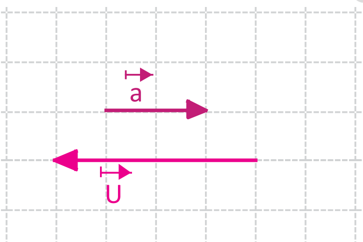
2) Compléter $\vec{U} = ...\vec{a} + ...\vec{b}$

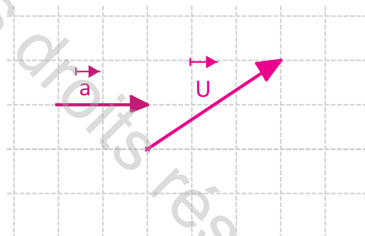
3) Est-il possible d'exprimer $\vec{b}$ en fonction de $\vec{a}$?

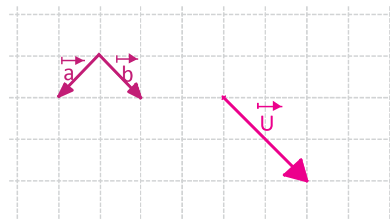
Activité 2

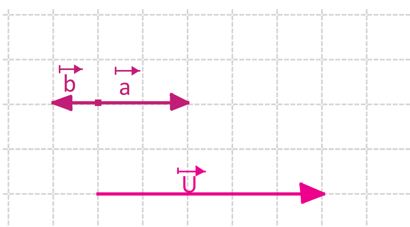
Dans chacun des situations ci-dessous, et quand cela est possible, exprimer le vecteur $\vec{U}$ en fonction des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

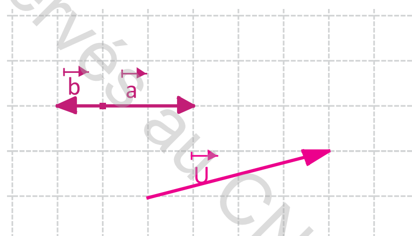






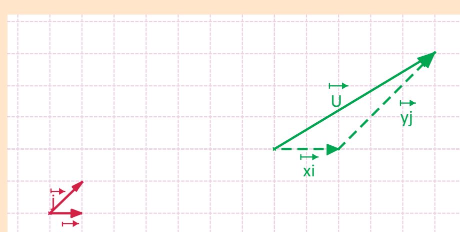






- Tout couple de vecteurs non colinéaires est appelé une **base du plan**.
- Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan. Pour tout vecteur $\vec{U}$ il existe un seul couple de réels (x, y) tel que $\vec{U} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Les réels x et y sont appelés **les composantes** du vecteur $\vec{U}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et on note $\vec{U}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



- $\vec{U} = x\vec{i} + y\vec{j}$ équivaut à $\vec{U}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Cours : Base et repère cartésien

Vocabulaire : Soit $\vec{U}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base $(\vec{i},\vec{j})$.

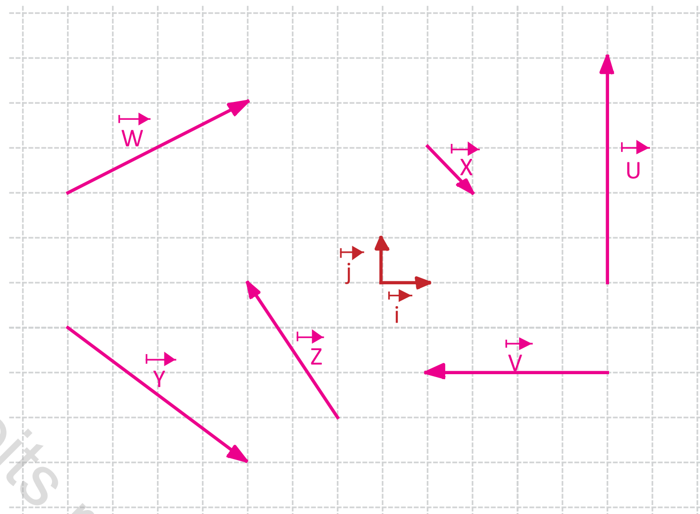
- Le réel x est appelé la première composante du vecteur $\vec{U}$ et on note $x_{\vec{U}}$.
- Le réel y est appelé la deuxième composante du vecteur $\vec{U}$ et on note $y_{\vec{U}}$.

Remarques :

- Les composantes d'un vecteur non nul, change d'une base à une autre.
- La donnée d'un point et d'une base détermine un repère cartésien du plan.

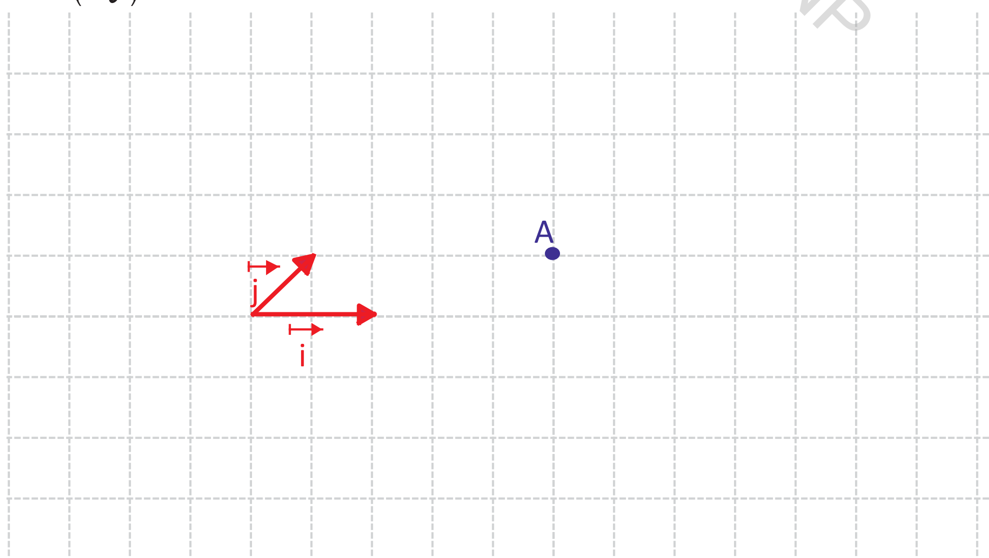
Activité 3

Déterminer les composantes de chacun des vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$, $\vec{X}$, $\vec{Y}$ *et* $\vec{Z}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$, puis dans la base $(\vec{U};\vec{V})$.



Activité 4

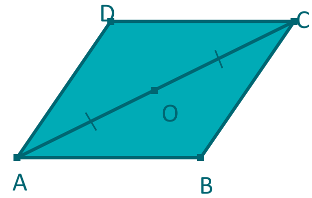
Reprendre le quadrillage ci-dessous et construire un représentant d'origine le point A de chacun des vecteurs suivants : $\vec{U}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{V}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{W}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{Z}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ (les composantes sont dans la base $(\vec{i};\vec{j})$).



Exercice résolu

On considère un parallélogramme ABCD de centre O.

Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$ *et* $\overrightarrow{BD}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ puis dans la base $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)$.



Solution

Composantes des vecteurs dans la base $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

On a $\overrightarrow{AB}=1\times\overrightarrow{AB}+0\times\overrightarrow{AD}$ équivaut à $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

ABCD est un parallélogramme équivaut à $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ équivaut à $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ dan la base $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

O est le milieu de $[AC]$ équivaut à $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

équivaut à $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ dan la base $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$

On a : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ équivaut à $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ dan la base $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

Composantes des vecteurs dans la base $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)$.

On a $\overrightarrow{AB}=0\times\overrightarrow{AC}+1\times\overrightarrow{AB}$ équivaut à $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)$.

On a $\overrightarrow{AC}=1\times\overrightarrow{AC}+0\times\overrightarrow{AB}$ équivaut à $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)$.

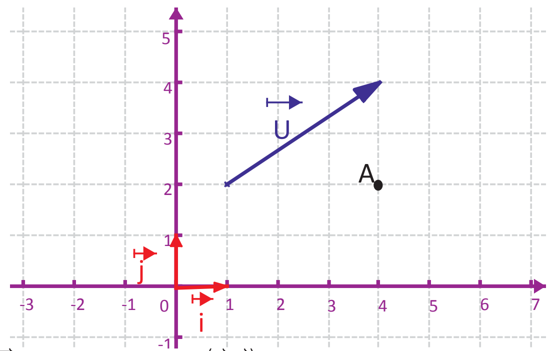
O est le milieu de $[AC]$ équivaut à $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ équivaut à $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

On a : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}$

équivaut à $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)$.

Activité 5

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère cartésien du plan.



On considère le point $A(5,2)$ et le vecteur $\vec{U}$.

1) Déterminer les composantes du Vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

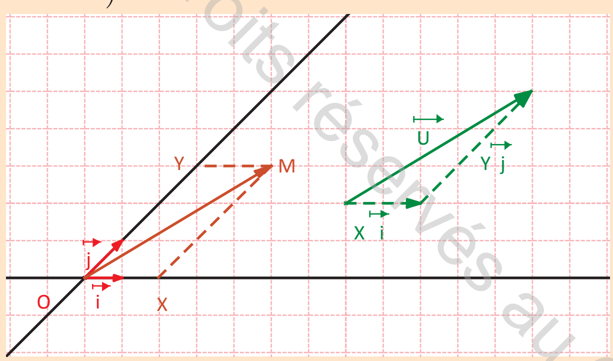
2) Déterminer les composantes du Vecteur $\vec{U}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

3) Construire le point P tel que $\vec{U}=\overrightarrow{OP}$ .Quelles sont les coordonnées du point P ?

$(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère cartésien du plan.

Soit $\vec{U}$ un vecteur du plan et M le point défini par $\vec{U}=\overrightarrow{OM}$.

$\left(\vec{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ \textit{dans la base}\ (\vec{i},\vec{j})\right)$ équivaut à $\left(M(x,y)\ \textit{dans le repère}\ (O,\vec{i},\vec{j})\ \right)$.



Activité 6

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base du plan .

1) Quelles sont les composantes du vecteur nul dans la base $(\vec{i},\vec{j})$?

2) Peut-on trouver un vecteur non nul tel que ses composantes ne soient pas toutes nulles ?

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base du plan et x et y deux réels.

$\left(x\vec{i}+y\vec{j}=\vec{0}\right)$ *équivaut à* $(x=0\ \ et\ \ y=0)$

Activité 7

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan .

On considère le vecteur $\vec{U}=a\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{i}+b\vec{j}$ avec a et b deux réels .

Comment doit-on choisir les réels a et b pour que le vecteur $\vec{U}$ ne soit pas nul ?

Activité 8

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base du plan.

Peut-on trouver deux vecteurs égaux n'ayant pas les mêmes composantes dans la base $(\vec{i},\vec{j})$?

Activité 9

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base du plan. On considère les deux vecteurs $\vec{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

1) Montrer que $\vec{U}-\vec{V}=(x-a)\vec{i}+(y-b)\vec{j}$.

2) En déduire que $(\vec{U}=\vec{V})$ équivaut à $(x=a \;\; et \;\; y=b)$.

Soient $(\vec{i},\vec{j})$ une base du plan et $\vec{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ deux vecteurs.

$(\vec{U}=\vec{V})$ équivaut à $(x=a \;\; et \;\; y=b)$

Activité 10

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base du plan. On considère les deux vecteurs $\vec{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

1) **a)** Montrer que $\vec{U}+\vec{V}=(x+a)\vec{i}+(y+b)\vec{j}$.

b) En déduire les composantes du vecteur $\vec{U}+\vec{V}$.

2) Soit α un réel. Déterminer les composantes du vecteur $\alpha\vec{U}$.

Soient $(\vec{i},\vec{j})$ une base du plan et $\vec{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ deux vecteurs.

On a : $\vec{U}+\vec{V}\begin{pmatrix}x+a\\y+b\end{pmatrix}$ et $\alpha\vec{U}\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

Activité 11

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base du plan. Déterminer le réel m pour que les vecteurs $\vec{U}\begin{pmatrix}m-3\\2\end{pmatrix}$ et $8\vec{i}+2\vec{j}$ soient égaux.

Activité 12

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère cartésien du plan. On considère le point $A\left(-2;\frac{5}{2}\right)$ et les vecteurs $\vec{U}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$. Déterminer les composantes des vecteurs suivants : $-\vec{U}$, $\frac{2}{15}\vec{V}$, $3\vec{U}-5\vec{V}$ *et* $2\overrightarrow{OA}+4\vec{V}$.

II Composantes d'un vecteur défini par un représentant:

Activité 1

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère cartésien du plan.

1) On considère les points $A(3;-2)$ et $B(-1;4)$ .Montrer que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$.
2) En déduire les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3) Soit $C(x;y)$ et $D(a;b)$ .Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{CD}$.

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Pour tous points $A(x_A,y_A)$ *et* $B(x_B,y_B)$ on a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.

Activité 2

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère cartésien du plan. On donne $A(4;-2)$ et $B(-1;3)$.

Déterminer les coordonnées du point C défini par : $3\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.

Activité 3

Soit ABCD un parallélogramme. On défini les points E et F par les égalités vectorielles suivantes : $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

1) **a)** Déterminer les coordonnées de chacun des points A, F et E dans le repère $\left(B;\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)$

b) En déduire les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ dans la base $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)$.

2) Que peut-on conclure pour l'alignement des points A, E et F.

Activité 4

On considère les points $E(-1;3)$ et $F(5;1)$ dans un repère cartésien $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.On désigne par $H(a;b)$ le milieu du segment $[EF]$. Déterminer les réels a et b.

Le plan est muni d'un repère cartésien $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ et J trois points distincts du plan.

(J milieu du segment $[AB]$) équivaut à ($J\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$).

Activité 5

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère cartésien du plan.

On considère les points $A(-3;-3)$, $B(2;1)$, $C(3;4)$, $D(-2;0)$ et $K\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Montrer que ABCD est un parallélogramme de centre K.

III Condition analytique de colinéarité de deux vecteurs:

Activité 1

Soit $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une base du plan.

1) **a)** Justifier que les vecteurs $\vec{U}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}10\\15\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

b) Calculer $x_{\vec{U}}y_{\vec{V}} - x_{\vec{V}}y_{\vec{U}}$.

2) **a)** Proposer deux vecteurs $\vec{s}$ et $\vec{t}$ vérifiant : $x_{\vec{s}}y_{\vec{t}} - x_{\vec{t}}y_{\vec{s}} = 0$.

b) $\vec{s}$ et $\vec{t}$ sont-ils colinéaires ?

3) les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix}\sqrt{5}-\sqrt{2}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}3\sqrt{3}\\ \sqrt{5}+\sqrt{2}\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Activité 2

Soit $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une base du plan. On considère $\vec{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls .

1) **a)** Montrer que si $\vec{U}\, et\, \vec{V}$ sont colinéaires, alors il existe un réel non nul K tel que : $x' = kx \text{ et } y' = ky$.

b) En déduire que si $\vec{U}\, et\, \vec{V}$ sont colinéaires, alors $xy' - x'y = 0$.

2) Calculer $xy' - x'y$ lorsque $\vec{U} = \vec{0}$ ou $\vec{V} = \vec{0}$.

3) On suppose que : $xy' - x'y = 0$.

a) Justifier que $x \neq 0$ ou $y \neq 0$.

b) Justifier que : si $x \neq 0$ alors $x' \neq 0$ et si $y \neq 0$ alors $y' \neq 0$

c) Vérifier que : si $x \neq 0$ alors $\vec{V} = \dfrac{x'}{x}\vec{U}$ et si $y \neq 0$ alors $\vec{V} = \dfrac{y'}{y}\vec{U}$

Soit $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une base du plan.

(les vecteurs $\vec{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires) équivaut à : ($xy' - x'y = 0$).

Vocabulaire :

Le réel $xy' - x'y$ est appelé le **déterminant** de $\left(\vec{U},\vec{V}\right)$ dans la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$.

On note : $dét\left(\vec{U},\vec{V}\right) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$.

Remarque :

Si le déterminant de deux vecteurs est nul dans une base, il l'est également dans toute autre base.

Activité 3

Reprendre **l'activité 1** et répondre à la question n°3.

Activité 4

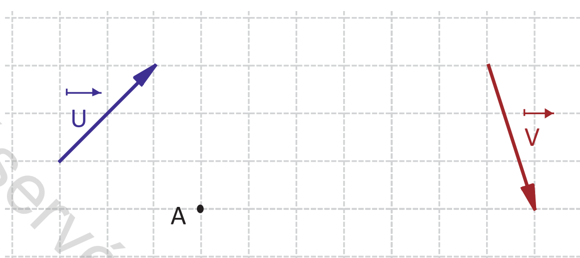
Dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.On donne les Points : $A(-2;3)$, $B(4;7)$, $C\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ $et\ D\left(4\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)$.

1) Montrer que les droites (AB) et (DC) sont parallèles.
2) Le point $M(x;0)$ est un point de l'axe des abscisses. Calculer x pour que les points A, M et B soient alignés.

IV Équation cartésienne d'une droite :

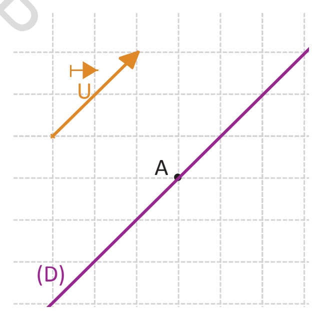
1) Vecteur directeur d'une droite :

Activité 1



Soit A un point du plan, $\vec{U}\ et\ \vec{V}$ deux vecteurs non Colinéaires.

1) Construire le point B tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{U}$.
2) Placer un point M tel que $\overrightarrow{AM}\ et\ \vec{U}$ soient colinéaires.
3) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}\ et\ \vec{U}$ soient colinéaires.
4) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}\ et\ \vec{V}$ soient colinéaires.



Tout vecteur non nul, dont la direction est la même que celle d'une droite (D), est dit un **vecteur directeur** de cette droite.

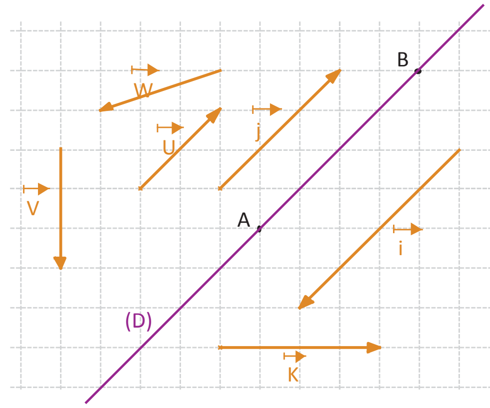
Soit A un point du plan et $\vec{U}$ un vecteur non nul .
L'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}\ et\ \vec{U}$ soient colinéaires est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{U}$.

Activité 2

1) Déterminer l'ensemble des point M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{U}$ soient colinéaires.

2) Est-il vrai que (D) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{i}$ soient Colinéaires ?

3) Donner deux autres vecteurs directeurs de (D).



Soit (D) une droite de vecteur directeur $\vec{U}$.

- Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{U}$ est aussi un **vecteur directeur** de (D).
- Si A et B sont deux points distincts de (D), alors $\overrightarrow{AB}$ est l'un de ses vecteurs directeurs.

2) Équation cartésienne d'une droite :

Activité 1

Le plan est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.On considère les points $A(3;1)$ et $B(5;0)$.

1) Placer A et B puis tracer la droite (AB).

2) Vérifier « par le calcul » que le point $C(-1;3)$ est un point de la droite (AB).

3) Utiliser la condition de colinéarité afin de trouver une relation entre x et y pour que $M(x;y)\in(AB)$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère deux points distincts $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$.

1) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ avec $M(x,y)$ un point quelconque du plan .

2) Traduire l'appartenance du point M à la droite (AB) par une relation entre x et y .

Dans un repère cartésien, une **équation cartésienne** d'une droite est une relation entre les coordonnées x et y d'un point quelconque de cette droite, de la forme $ax+by+c=0$ avec a, b et c trois réels tels que a et b non tous nuls.

Remarque : Une droite peut avoir plusieurs équations cartésiennes.

Activité 3

Dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne les points $A(1;5)$, $B(-3;2)$ *et* $C(5;-1)$.

1) Donner une équation cartésienne de la droite (BC).
2) Trouver une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{U}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.
3) Trouver une équation cartésienne de la droite (D’) passant par A et parallèle à (BC).

Activité 4

Dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne les points $A(-1;2)$, $B(-2;0)$.

1) Soit D la droite d’équation : $2x-y+4=0$.
   a) Vérifier que $D=(AB)$.
   b) Le point $C(-1;3)$ appartient-il à la droite D ?
   c) Déterminer deux autres points de la droite D.
2) a) Tracer la droite D dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
   b) Tracer dans le même repère les droites :
   $\Delta_1 : 4x-2y+3=0$, $\Delta_2 : y-3=0$ et $\Delta_3 : 2x+3=0$.

Cas particuliers :

- Pour $a=0$ et $b\neq 0$:
  La droite D d’équation : $by+c=0$ est parallèle à l’axe $\left(O;\vec{i}\right)$.
- Pour $b=0$ et $a\neq 0$:
  La droite D d’équation : $ax+c=0$ est parallèle à l’axe $\left(O;\vec{j}\right)$.
- Pour $c=0$
  La droite d’équation : $ax+by=0$ passe par l’origine.

3) Condition analytique de parallélisme de deux droites :

Activité 1

Le plan est muni d’un repère cartésien $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) On considère la droite D d’équation : $x-2y+3=0$.
   a) Vérifier que $A(1;2)$ et $B(5;4)$ sont deux points de D.

b) Montrer que $\vec{U}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D.

2) Soit Δ la droite d'équation : $ax+by+c=0$ avec $a\neq 0$ et $b\neq 0$.

a) Vérifier que $A\left(0;\dfrac{-c}{b}\right)$ et $B\left(\dfrac{-c}{a};0\right)$ sont deux points de Δ.

b) Montrer que $\vec{U}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ.

3) On considère les deux droites Δ_1 *et* Δ_2 d'équations respectives :
$ax+c=0$ *et* $by+c'=0$.

a) Montrer que le vecteur $\vec{U'}\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur pour Δ_1.

b) Montrer que le vecteur $\vec{V}\begin{pmatrix}-b\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur pour Δ_2.

Le plan est muni d'un repère cartésien $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit D une droite du plan.

$\left(D: ax+by+c=0\right)$ *équivaut à* $\left(\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix} \textit{ est un vecteur directeur de } D\right)$

Activité 2

Le plan est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

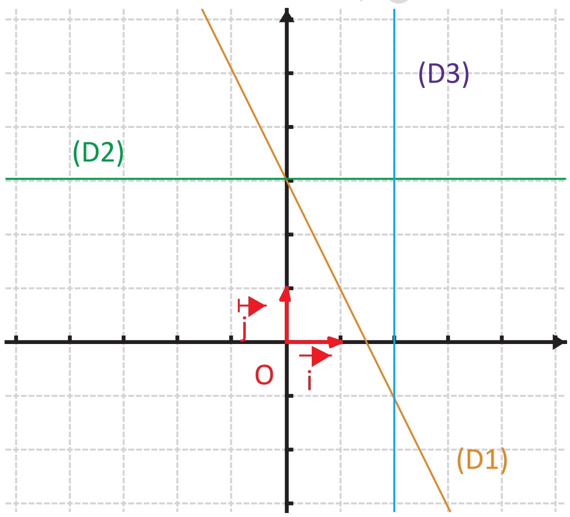
1) Soit la droite $D: -2x+3y-5=0$. Donner un vecteur directeur de cette droite.

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ passant par le point *A(-1, 2)* et de vecteur directeur $\vec{U}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

Activité 3

Le plan est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites D_1, D_2 et D_3.



Remarques :

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan et D une droite passant par $A(x_A;y_A)$ -

- Si D est parallèle à $(O,\vec{i})$, alors $D: y=y_A$.
- Si D est parallèle à $(O,\vec{j})$, alors $D: x=x_A$.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) On considère les droites $D: x-2y+4=0$ et $\Delta: 3x-6y-1=0$.

  a) Déterminer un vecteur directeur de chacune des droites D et Δ.

  b) Montrer que D et Δ sont parallèles.

2) Soient D et Δ deux droites d'équations respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c=0$.

Montrer que $(D // \Delta)$ équivaut à $(ab'-a'b=0)$.

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$.

$D: ax+by+c=0$ et $D': a'x+b'y+c=0$ deux droites du plan.

$(D // D')$ équivaut à $(ab'-a'b=0)$

Activité 5

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère les droites D et Δ d'équations cartésiennes respectives :
$2x-5y+1=0$ et $mx+3y-2016=0$ avec m un réel .
Déterminer m pour que les deux droites soient parallèles.

Activité 6

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère les droites $D: x-y+2=0$ et $D': 3x-2y-1=0$.

  a) Montrer que les droites D et D' sont sécantes.

  b) Déterminer leur point d'intersection.

4) Équation réduite – Coefficient directeur :

Activité 1

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Soit D la droite d'équation : $3x-2y+5=0$.

a) $M(x,y)$ est un point de la droite D. Exprimer y en fonction de x .

b) Déterminer deux points A et B de la droite D puis calculer $\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

2) Soit Δ une droite d'équation : $ax+by+c=0$ avec $b\neq 0$.

a) Montrer que : $ax+by+c=0$ équivaux à $y=\dfrac{-a}{b}x+\dfrac{-c}{b}$.

b) Soient M et N deux points distincts de la droite Δ.

Montrer que $\dfrac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\dfrac{-a}{b}$.

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Soit D une droite d'équation : $ax+by+c=0$ avec $b\neq 0$.
Cette équation est équivalente à une autre de la forme:
$y=mx+p$ avec $m\neq 0$, appelée **l'équation réduite** de la droite D.

Vocabulaire :

- m est appelé le coefficient directeur ou la pente de la droite D.
- p est l'ordonnée à l'origine.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Dans chacun des cas suivants déterminer l'équation réduite, le coefficient directeur et un vecteur directeur de la droite donnée .

1) D est la droite d'équation : $2x-4y+5=0$.

2) La droite *(AB)* avec $A(1,3)$ et $B(-1,5)$.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère cartésien $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Soit les deux droites $\Delta : y = 2x - 3$ et $\Delta' : y = 3x - 2$.

a. Déterminer un vecteur directeur pour chacune des deux droites .

b. Δ et Δ' sont-elles parallèles ?

2) Soit D et D' deux droites d'équations réduites :
$y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.
Montrer que, ($D // D'$) équivaut à ($m = m'$).

Le plan est muni d'un repère cartésien $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Le vecteur $\vec{U}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite D d'équation réduite : $y = mx + p$.

Le plan est muni d'un repère cartésien $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
Soient D et D' deux droites d'équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$.
($D // D'$) équivaut à ($m = m'$).

Activité 4

Le plan est muni d'un repère cartésien $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Déterminer l'équation réduite de la droite (AB) sachant que $A(-1;2)$ et $B(3;4)$.

2) Déterminer l'équation réduite de la droite Δ passant par $C(1,-3)$ et parallèle à (AB)

3) Montrer que $\Delta' : y = 3x - 5$ et (AB) sont sécantes et déterminer leur point d'intersection .

Essentiel du Cours

Base et composantes d'un vecteur

- Tout couple de vecteurs non colinéaires forme une **base** $(\vec{i},\vec{j})$ du plan.
- $\vec{U}=x\vec{i}+y\vec{j}$ équivaut à $\vec{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ (x et y sont les **composantes** de $\vec{U}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$)
- Pour $\vec{U}=\overrightarrow{OM}$, $\left(\vec{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \textit{ dans la base } (\vec{i},\vec{j})\right)$ équivaut à $\left(M(x,y) \textit{ dans le repère } (O,\vec{i},\vec{j})\right)$
- Soit $\vec{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ deux vecteurs. On a : $(\vec{U}=\vec{V})$ équivaut à $(x=a \text{ et } y=b)$.
- Soit $\vec{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ deux vecteurs. On a : $\vec{U}+\vec{V}\begin{pmatrix}x+a\\y+b\end{pmatrix}$ et $\alpha\vec{U}\begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

Composantes d'un vecteur défini par un représentant

Le plan est muni d'un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$.

- Pour tout $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.
- Les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.

Condition analytique de colinéarité de deux vecteurs

(les vecteurs $\vec{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires) équivaut à : $(xy'-x'y=0)$.

Équation cartésienne d'une droite

- Un vecteur directeur d'une droite (D) est un vecteur non nul, dont la direction est la même que celle de la droite (D).
- Dans un repère cartésien, toute droite a une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$, avec $a\neq 0$ ou $b\neq 0$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D

Condition analytique de parallélisme de deux droites

$D: ax+by+c=0$ et $D': a'x+b'y+c=0$ deux droites du plan on a :

$(D \text{ et } \Delta \text{ sont parallèles})$ équivaut à $(ab'-a'b=0)$.

Équation réduite

Soient D et D' deux droites d'équations réduites $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$

$D//D'$ équivaut a $m=m'$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D

Vrai-Faux

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Le plan est muni d'un repère cartésien.

a. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

b. Il existe un réel t pour le quel les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}t\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

c. Pour tout réel m, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\m\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires .

2. Le plan est muni d'un repère cartésien.

a. La droite d'équation $2x-5y+6=0$ coupe les axes de coordonnées en A(2 ; 0) et B(0 ; 5).

b. les deux droites d'équations respectives : $4x-6y+10=0$ et $2x-3y+7=0$ sont parallèles.

3. Dans un repère, on considère les points : A(2 ; 3), B(-1 ;1), C(-3 ;-1), D(1 ;-3) et E(5 ; 1).

a. Les points A, B et C sont alignés.

b. Les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

c. Le quadrilatère BCDE est un parallélogramme.

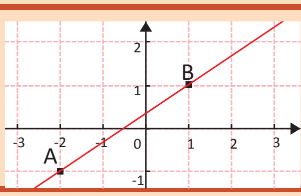
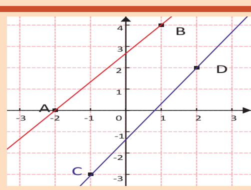
d. Le quadrilatère AECD est un trapèze .

4. Le plan est muni d'un repère cartésien.

a. L'équation réduite de la droite (AB) avec A(3 ; 1) et B(1 ;3) est : $y=-x+4$

b. les deux droites d'équations réduites respectives : $y=2x-3$ et $y=4x-6$ sont sécantes .

Q C M

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\a+3\end{pmatrix}$ sont colinéaires si, et seulement si :	**a.** $a=-4$	**b.** $a=-1$	**c.** $a\in\{-4;1\}$
Δ : $2x-y+4=0$ on a :	**a.** $A(-2;8)\in\Delta$	**b.** $B(2;-1)\in\Delta$	**c.** $C(4;12)\in\Delta$
	**a.** $M(2;2)\in(AB)$	**b.** $N(49;33)\in(AB)$	**c.** $P(14;12)\in(AB)$
La droite Δ passant par A(2 ;-1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ a pour équation cartésienne :	**a.** $x-y-3=0$	**b.** $x+y-1=0$	**c.** $2x+2y-1=0$
La droite d'équation $y=-3x+4$ a pour coefficient directeur :	**a.** -3	**b.** $-3x$	**c.** 4
Les droites (AB) et (CD) : 	**a.** Sont parallèles	**b.** se coupent en $M\left(12;\dfrac{56}{3}\right)$	**c.** se coupent en $N\left(12;\dfrac{55}{3}\right)$

 Activités T.I.C.E

Objectif : *observer de façon dynamique les vecteurs avec GeoGebra*

Soit ABCD est un parallélogramme ; a est un réel non nul. M et N sont les points du plan définis par : $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{a}\overrightarrow{CB}$

1. Faire une figure avec le logiciel GeoGebra , a étant variable . Faire varier a. mettre une conjecture sur la position des points D, M et N.
2. Démontrer la conjecture

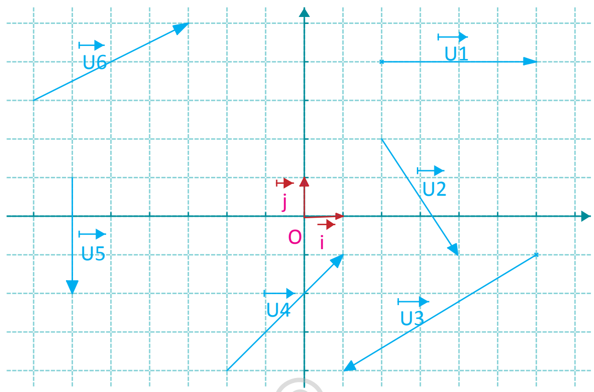
1. Ouvrir **GeoGebra** , dans ***Options Etiquetage cliquer*** sur ***« automatique »***

Effacer le repère et la grille si nécessaire :

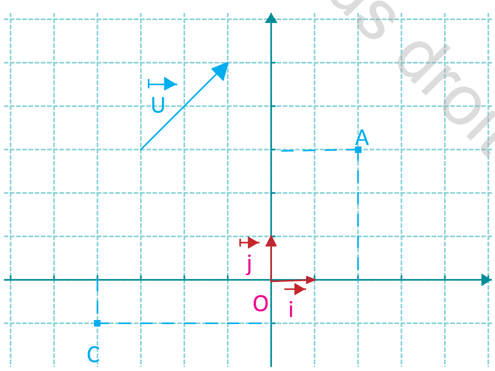
Dans le menu **Affichage** , décocher **Axe** (ou bien effectuer un clic droit sur la feuille et cocher **Axe** . Décocher Grille).

a. Construire trois points A, B et C	Icône « nouveau point » ; cliquer 3 fois dans la feuille de travail
b. Définir le vecteur $\overrightarrow{BC}$	Icône ; Cliquer sur la flèche en bas à droite de l'icône ; cliquer sur « vecteur ». Dans la feuille de travail, cliquer sur B puis sur C. GeoGebra nomme le vecteur u.
c. Définir le point D, 4ème sommet du parallélogramme	Icône ; cliquer sur la flèche en bas à droite de l'icône ; Cliquer « représentant » (origine- vecteur) Se positionner sur A puis sur le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$. Renommer le point A', D. GeoGebra a crée $\overrightarrow{AD}$ et nomme v.
d. Créer le curseur a	Icône . Cliquer sur déplacer a pour avoir par exemple A = -0,5
e. Créer le point M tel que : $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$	• Construire $\vec{w}$, un vecteur égal à $a\overrightarrow{AB}$: Dans le champ de saisie taper : a*Vecteur[A,B] ; Pour obtenir Vecteur, cliquer sur (en bas à droite) puis Vecteur & Matrices, Vecteur, Coller, puis dans la ligne de saisie compléter l'intérieur des crochets. Valider. • Construire $\overrightarrow{AM}$, le représentant de $\vec{w}$ d'origine A : cliquer sur Puis sur $\vec{w}$. Renommer A', M. GeoGebra nomme le vecteur $\overrightarrow{AM}$, z .
f. Créer le point N tel que : $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{a}\overrightarrow{CB}$	• Construire $\vec{b}$, un vecteur égal à $\frac{1}{a}\overrightarrow{CB}$: Dans le champ de saisie (1/a)*Vecteur[C,B] puis valider. • Construire $\overrightarrow{CN}$ le représentant de $\vec{b}$ d'origine C (voir e) Renommer C', N. GeoGebra nomme le vecteur $\overrightarrow{CN}$, c.
g. Conjecturer sur D, M et N	Icône . Déplacer a ; Observer les points D,M et N
h. Contrôle de la conjecture	Créer la droite (DM) ; GeoGebra la nomme d Icône ; cliquer sur relation entre deux objets ; cliquer sur (DM) et N

1 En utilisant le quadrillage, déterminer les composantes des vecteurs dans la base $(\vec{i},\vec{j})$



2 Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ u n repère cartésien du plan.



1) A l'aide du graphique déterminer les coordonnées des points A et C et les composantes du vecteur $\vec{u}$.
2) Calculer les coordonnées du point A' défini par $\overrightarrow{AA'}=-\vec{u}$.
3) Déterminer les coordonnées du point B tel que $\overrightarrow{BC}=2\vec{u}$.

3 Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère cartésien. $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont deux vecteurs de composantes $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

Les points A, B, C et D sont définis par :
$\overrightarrow{OA}=2\vec{u}-\vec{v}$; $\overrightarrow{OB}=\vec{u}-2\vec{v}$; $\overrightarrow{OC}=-2\vec{u}+\vec{v}$ et $\overrightarrow{OD}=-\vec{u}-2\vec{v}$.

1) Calculer les coordonnées de A, B , C et D et faire une figure .
2) Montrer que ABCD est un parallélogramme.

4 Dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(2;-3)$, $B(3;5)$, $C(-1;-6)$ et $D(-2;0)$.

1) Faire une figure.
2) Calculer les composantes des vecteurs suivants :
$\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$; $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}$ et $2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{CD}+4\overrightarrow{BC}$.

5 Soit $A(1;2)$, $B(-3;5)$ *et* $C(-6;3)$ trois points du plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
2) Déterminer les coordonnées des points E et F tels que $\overrightarrow{AE}$ *et* $\overrightarrow{CF}$ sont tous les deux égaux à $\overrightarrow{BD}$.
3) Montrer que D est le milieu de $[EC]$ et de $[AF]$.

6 Placer les points E, F et G de coordonnées respectives $E(-4;5)$, $F(1;2)$ *et* $G(0;3)$ dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On donne un point H de coordonnées $(-1;a)$, a étant un réel.

1) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EG}$ *et* $\overrightarrow{FG}$, puis les composantes de leur somme.
2) Peut-on déterminer le réel a tel que $\overrightarrow{FH}=-3\overrightarrow{EG}$?

7 Dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(-3;2)$, $B(-5;4)$ et $C(x;y)$.

Calculer x et y tels que :

a. $\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AB}$.
b. $\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

8 Dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $B(2;1)$, $C(-2;3)$, $E(-3;-2)$ et $F(1;5)$.

1) Déterminer les coordonnées du point D tel que OBCD soit un parallélogramme.
2) Montrer que $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{FC}$. Que peut-on déduire pour le quadrilatère OECF ?
3) Montrer que $[EF]$ et $[BD]$ ont le même milieu.

9 $(\vec{i},\vec{j})$ étant une base du plan.

Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou non :

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$
2) $\vec{u}\begin{pmatrix}12\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$
3) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\3\sqrt{3}\end{pmatrix}$

10 $(\vec{i},\vec{j})$ étant une base du plan. On donne les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}z\\2\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}6\\3z\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}x+3\\y-1\end{pmatrix}$

1) Déterminer le réel z tel que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.
2) Déterminer z pour que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires.
3) Déterminer une relation entre x et y pour que $\vec{u}$ et $\vec{t}$ soient colinéaires.

11 Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Placer les points $A(2;1)$, $B(-1;2)$ et $C(3;4)$.
2) Déterminer les coordonnées du point D défini par $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ et du point K milieu de $[AB]$.
3) Déterminer les coordonnées du point E tels que K soit le milieu de $[EC]$.

Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont-ils colinéaires ?

12 On donne les points $A(4;6)$ et $B(5;1)$ deux points du plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Construire le parallélogramme OABC de centre K.
2) Déterminer les coordonnées de C et K.
3) Les points $D(13;0)$ et $E(0;7)$ sont-ils sur la droite (BC) ?

13 Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère les points $A(1;-5)$, $B(0;-2)$ et $C(-3;2)$.

1) Soit $E(a;-8)$. Déterminer le réel a tel que A,B et E soient alignés.
2) Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
3) Déterminer les coordonnées du point F appartenant à l'axe des abscisses tel que B, C et F soient alignés.

14 Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan. On considère les points $A(2;-1)$, $B(1;3)$, $C(-4;3)$ et I le milieu du segment $[AC]$.

1) Déterminer les coordonnées du point I .
2) Déterminer les coordonnées des points J et K tels que $\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}=\vec{0}$ et $2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.
3) Les droites (JK) et (BI) sont-elles parallèles.

15 Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère les points $A(-2;5)$, $B(2;-1)$, $C(5;1)$, $D\left(-\frac{15}{4};-\frac{1}{2}\right)$ et I le milieu de $[AC]$.

1) Placer les points A,B,C,D et I .
2) Quelles sont les coordonnées du point I ?
3) Trouver les coordonnées du point E tel que ABCE soit un parallélogramme.
4) Montrer que les droites (ID) et (BC) sont parallèles.

5) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de l'axe des ordonnées et de la droite (AB).
6) Déterminer les coordonnées du point G tel que : $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{GB}$.
7) Déterminer les coordonnées du point H appartenant à l'axe des abscisses et tel que les droites (CH) et (AB) soient parallèles.
8) Quelles sont les coordonnées du point J, symétrique de C par rapport à A ?

16 Le plan est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On donne les équations des trois droites $d_1: 2y+3x-4=0$; $d_2: y=3x+2$ et $d_3: x=3$

Dire si chacun des points suivants appartient ou non à chacune des droites précédentes :

$A(3;11);B\left(3;\dfrac{-5}{2}\right);C(3;0);D(0;2);E(1;5)$.

17 Soit (d) la droite d'équation 2x -3y + 1=0 dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

1) Déterminer l'ordonnée du point A d'abscisse -2 et appartenant à la droite (d).
2) Déterminer l'abscisse du point B d'ordonnée 3 et appartenant à la droite (d).
3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (d) avec chacun des axes des coordonnées.

18 Le plan est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Déterminer un vecteur directeur de chacune des droites suivantes :

1) $d_1=(AB)$ avec $A(-1;3)$ et $B(2;5)$;
2) $d_2: 3y-2x+5=0$;
3) $d_3: y=-6x+7$;
4) $d_4: 2x-9=0$;

19 Le plan est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Déterminer une équation de la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{v}$.

2) $A(4;1)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$;

2) $A(-2;3)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$;

1) $A(-1;5)$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$.

20 Le plan est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Déterminer des équations cartésiennes de chacune des droites (AB) , (AC) et (BC) sachant que $A(-1;3)$, $B(0;-2)$ et $C(1;4)$.

21 Le plan est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Parmi les droites suivantes, lesquelles sont parallèles ?

$d_1: x-y+3=0$ $\qquad d_2: 2x+3y-1=0$

$d_3: -2x+2y=7$ $\qquad d_4: x+\dfrac{3}{2}y-\dfrac{1}{2}=0$

$d_5: -3x-2y=0$ $\qquad d_6: 5x+5y-2=0$

22 Le plan est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit les points $A(3;1)$, $B(2;4)$ et $C(1;2)$.

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite parallèle à (AC) et passant par B.
2) Déterminer une équation cartésienne de la droite parallèle à (BC) et passant par A.
3) La droite (AB) est-elle parallèle à la droite $\Delta: y=3x-3$?

23 Le plan est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.Soit

$d_1: y=3x-1$, $d_2: x=2$ et $d_3: y=-5x+2$.

1) Montrer que ces droites se coupent deux à deux.
2) Tracer ces droites dans le plan.
3) Déterminer les coordonnées des sommets du triangle ainsi formé.

24 Le plan est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit le triangle ABC avec $A(2;1),B(-3;2)$ et $C(7;0)$

Déterminer une équation cartésienne de la médiane issue de A, puis de celle issue de B. En déduire les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC.

25 Le plan est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Déterminer, s'il existe, le coefficient directeur de chacune des droites suivantes :

1. $\Delta_1 : 4x-3y+21=0$ **2.** $\Delta : x=3y-8$

3. $\Delta_6 : y=2014x+2013$ **4.** $\Delta_4 : \left(\sqrt{2}-1\right)x+100=0$

5. $\Delta_5 : \frac{7}{2}x-\frac{1}{5}y+1=0$ **6.** $\Delta_3 : 5y-7=0$

26 Le plan est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On donne les points $A(2;8)$, $B(5;2)$ et $C(-3;8)$.

1) Calculer le coefficient directeur de chacune des droites (AB), (BC) et (AC).
2) *E* et *F* étant les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$, calculer le coefficient directeur de la droite *(EF).*

27 Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de la droite passant par le point *A* et de coefficient directeur m.

1) $A(-2;3)$ *et* $m=2$
2) $A(5;0)$ *et* $m=-3$
3) $A(-2;1)$ *et* $m=0$

28 Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan .Déterminer une équation de la droite passant par $C(1;-2)$ et d'ordonnée à l'origine égale à3.

29 Dans le plan muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les droites suivantes :

$d_1 : x-y+3=0$ $d_2 : y=2x+5$

$d_3 : \frac{1}{2}x+y=5$ $d_4 : y=x-\frac{1}{3}$

Lesquelles sont parallèles entre elles ?

30 Le plan est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

La droite (AB) est-elle parallèle à la droite d dans les cas suivants ?

1) $A(3;1), B(2;4)$; $d : y=3x-2$
2) $A(5;2), B(3;6)$; $d : y=-2x+5$

31 Dans un repère (O, $\vec{i},\vec{j}$) , on donne les points A(0 ,1) et B(1,-2) .

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) .
2) Soit le point C(2 ,3).
   a) Vérifier que C appartient à la droite (AB) .
   b) Le point O appartient-il à la droite (AB) ?
3) Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par O et parallèle à la droite (AB).
4) Soit $\vec{U}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Déterminer une équation cartésienne de la droite D passant par C et de vecteur directeur $\vec{U}$.
5) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ passant par B et de coefficient directeur 3 .
6) La droite Δ coupe l'axe des abscisses en E et l'axe des ordonnées en F. Déterminer les coordonnées des *points E et F .*

32 Le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

On donne les points :

$A(1;2)$, $B(-1;-1)$ *et* $C(-3;0)$ et I le milieu de [AC] .

1) a) Donner une équation cartésienne de la droite (BC).
   b) En déduire que A , B et C ne sont pas alignés .
2) Soit la droite $\Delta : 3x-2y+5=0$.
   a) Vérifier que Δ passe par I.
   b) Montrer que Δ est parallèle à (AB).
   c) Montrer que Δ et (BC) sont sécantes en un point J que l'on déterminera.
3) a) Montrer que (AJ) est une médiane du triangle ABC.
   b) Trouver alors les coordonnées du point G centre de gravité de ABC .

CHAPITRE 7

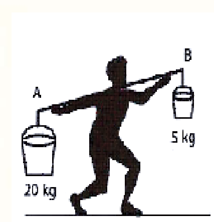
Barycentre de deux points

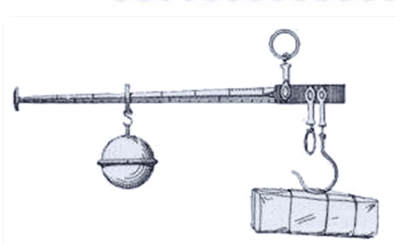
Contenu du chapitre

- Pour commencer.
- Cours.
  - Définition du barycentre de deux points pondérés.
  - Construction du barycentre de deux points pondérés.
  - Coordonnées du barycentre de deux points pondérés.
- S'auto évaluer.
- Activité TICE.
- Exercices et problèmes.

AU FIL DU TEMPS

Le barycentre (du grec ***barus*** *: lourd, pesant) fut introduit en physique au dix-neuvième siècle. Cependant, cette notion, indispensable en mécanique, se retrouve déjà dans les travaux d'Archimède (troisième siècle avant J.-C.) sur les leviers, travaux qui l'auraient conduit à cette célèbre phrase : « Donner-moi un point d'appui et je soulèverai la terre ».*





Pour commencer

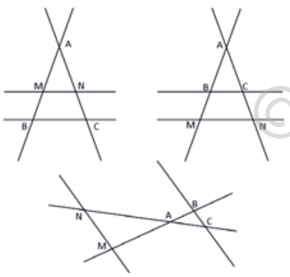
Activité 1

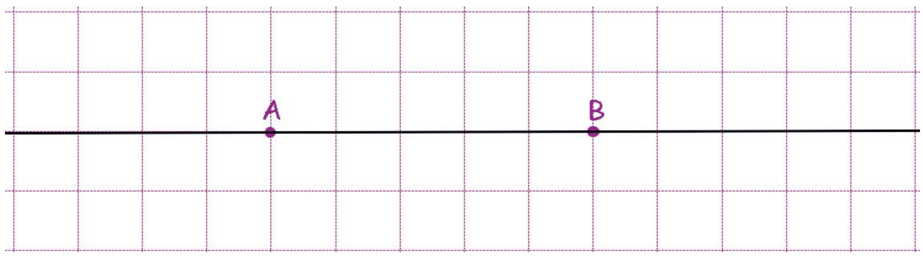
Se rappeler

Théorème de Thales et sa réciproque

On se place dans n'importe lequel des trois cas de figure ci-dessous :

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC} \Leftrightarrow (BC)//(MN)$$





Placer des points M, N et P sur la droite (AB) tels que :

a) $AM=\frac{2}{3}AB$

b) $AN=\frac{4}{5}AB$

c) $AP=\frac{6}{5}AB$

Activité 2

Indiquer pour chaque énoncé la bonne réponse.

$(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère cartésien du plan .

Soit les points A(2 ;-1) , B(-3 ;1) et C(1 ;2)

	A	B	C
Les composantes du vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ sont :	$\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\1\end{pmatrix}$
Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AC}$ sont :	$\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-11\\7\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-7\\7\end{pmatrix}$
le point M tel que $2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$	est de coordonnées $\left(\frac{1}{3};\frac{-1}{3}\right)$	est un point de la droite (AB)	Vérifie la relation $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Activité 3

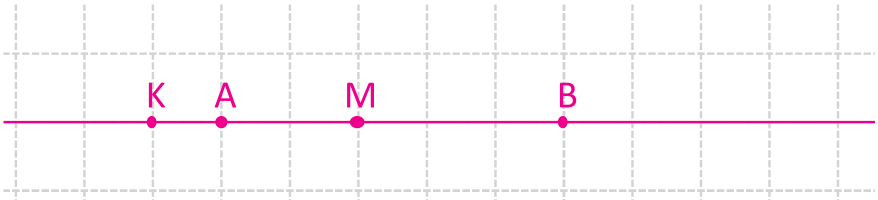
Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère cartésien du plan, on considère les points A(2 ;-3) et B(-3 ;7) et M(x ; y) vérifiant : $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$. Répondre par vrai ou faux :

a) $M\in(AB)$ **b)** $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ **c)** $\overrightarrow{BM}=\frac{5}{3}\overrightarrow{BA}$ **d)** $M(-2;3)$ **e)** $M\in[AB]$

I Barycentre de deux points pondérés :

Activité 1

On donne la figure ci-dessous :



1) **a)** Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ *et* $\overrightarrow{MB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b) Vérifier que $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

2) **a)** Placer un point P tel que $2\overrightarrow{PA}-3\overrightarrow{PB}=\vec{0}$.

b) Peut-on placer un autre point qui vérifie la même relation ?

3) **a)** Trouver deux réels α *et* β tels que : $\alpha\overrightarrow{KA}+\beta\overrightarrow{KB}=\vec{0}$.

b) Peut-on trouver d'autres réels qui vérifie la même relation ?

4) Est-t-il possible de placer un point R tel que $4\overrightarrow{RA}-4\overrightarrow{RB}=\vec{0}$?

Activité 2

A et B étant deux points distincts du plan, α et β deux réels données tels que $\alpha+\beta\neq o$. On donne K et G deux points du plan.

1) Montrer que $\left(4\overrightarrow{KA}-8\overrightarrow{KB}=\vec{0}\right)$ *équivaut à* $\left(\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}\right)$

2) Compléter : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ *équivaut à* $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\left(\overrightarrow{GA}+....\right)=\vec{0}$

équivaut à $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GA}+\beta....=\vec{0}$

équivaut à $(\alpha+\beta).....+\beta.......=\vec{0}$

équivaut à $(\alpha+\beta)....=\beta.....$

équivaut à $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}.....$

3) Montrer que, $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ *équivaut à* $\overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$

A et B deux points distincts du plan et α et β deux réels tels que $\alpha+\beta\neq o$.

- Il existe un seul point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
- Ce point G est appelé le **barycentre** des points pondérés (A,α) et (B,β).

Remarque :

Dire que G est barycentre de (A,α) et (B,β) signifie deux choses :

$\alpha+\beta\neq 0$ et $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

Le barycentre G de (A,α) et (B,β) est le point G de la droite (AB) qui vérifie l'une des deux relations suivantes : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$.

Activité 3

1) Compléter le tableau suivant :

G barycentre de (A,α) et (B,β)	$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$	$\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$
K barycentre de (A , 2) et (B ,-5)			
	$-3\overrightarrow{RA}+7\overrightarrow{RB}=\vec{0}$		
		$\overrightarrow{AL}=-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$	
			$\overrightarrow{BS}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{BA}$
	$3\overrightarrow{AI}+3\overrightarrow{BI}=\vec{0}$		
T barycentre de (A , 6) et (B , -15)			

2) Est-il vrai que :

a) Lorsque A et B sont distincts, le barycentre de (A,α) et (B,α) est le milieu du segment $[AB]$?

b) Lorsque k est un réel non nul, le barycentre de (A,α) et (B,β) est aussi le barycentre de $(A,k\alpha)$ et $(B,k\beta)$?

Vocabulaire : Le barycentre de (A,α) et (B,α) est dit aussi **l'isobarycentre** de A et B. C'est donc le barycentre de (A , 1) et (B , 1) .

- Si G est le barycentre de $(A,\alpha),(B,\beta)$, alors G est aussi le barycentre de $(A,k\alpha)$, $(B,k\beta)$, lorsque k est un réel non nul.
- A et B sont deux points distincts. Le barycentre de $(A,\alpha),(B,\alpha)$ (l'**isobarycentre** de A et B) est le milieu du segment $[AB]$

Activité 4

On donne la droite (AB) .

Construire G le barycentre de $(A,2013)$ *et* $(B,2013)$ puis K celui de $\left(A,-2^{100}\right)$ *et* $\left(B,2^{99}\right)$

Activité 4 Réduction de $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$, lorsque $\alpha+\beta\neq 0$

Soit A et B deux points du plan et K le barycentre de $(A,3)$ et $(B,7)$.

1) Compléter : $3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MB}=3\left(....+\overrightarrow{KA}\right)+7\left(....+\overrightarrow{KB}\right)$

$$=3....+3\overrightarrow{KA}+7....+7\overrightarrow{KB}$$

$$=10....+3\overrightarrow{KA}+7\overrightarrow{KB}$$

$$=.......$$

2) Soit G le barycentre des points pondérés (A,α), (B,β) et M un point quelconque du plan. Exprimer $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$.

> Soit G le barycentre de (A,α) et (B,β) .
>
> Pour tout point M du plan on a : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

Activité 5

A et B sont deux points distincts du plan, G est le barycentre de (A , 3) , (B ,-7) et I le milieu de $[AB]$.

1) Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

- **a)** Pour tout point M du plan : $3\overrightarrow{MA}-7\overrightarrow{MB}=10\overrightarrow{MG}$
- **b)** Pour tout point M du plan : $3\overrightarrow{AM}-7\overrightarrow{MB}=-4\overrightarrow{MG}$
- **c)** Pour tout point M du plan : $3\overrightarrow{MB}-7\overrightarrow{MA}=-4\overrightarrow{MG}$
- **d)** $3\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IG}$

2) **a)** Montrer que, B est le barycentre de (A , 3) , (G , 4).

b) En déduire que, B est le barycentre de (I , 3) , (G , 2).

Activité 6

E et F sont deux points distincts du plan et G est le barycentre de $(E,3),(F,-1)$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $\left\|3\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{MF}\right\|=4$.

(l'unité de longueur est le cm)

II Construction du barycentre :

Activité 1

Soit A et B deux points distincts du plan.

1) Construire le point G dans chacun des cas suivants ;

a) $\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{AG}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

2) Tracer une droite D sécante à (AB) en A. Munir la droite D d'un repère (A,I).
Placer sur la droite D les deux points E et F d'abscisses respectives 2 et 5.
Tracer la droite (FB) puis munir de E la parallèle Δ à (FB).

a) Justifier que le point G d'intersection de Δ et (AB) vérifie la relation $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

b) En déduire que G est le barycentre de (A , 3) , (B , 2)

3) Soit G' le symétrique de G par rapport à A.
Exprimer $\overrightarrow{AG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Que peut-on déduire ?

4) Construire le barycentre de :

a. $(A,4),(B,3)$
b. $(A,7),(B,-2)$
c. $(A,-2),(B,5)$
d. $(A,7),(B,-4)$
e. $(A,-7),(B,3)$

Activité 2

A et B sont deux points distincts du plan.

1) Construire le barycentre G des points pondérés $(A,1),(B,2)$.

2) Construire le point M tel que : $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{AB}$.

Activité 3

Soit ABC un triangle .

1) Construire le point I barycentre de (A , -1) et (B ,2).

2) Soit J l'isobarycentre de I et C et E celui de (B , 4) et (C , 2).
Montrer que A , J et E Sont alignés et déduire une construction du point E.

3) Soit F le milieu de [AC]. Montrer que E est le barycentre de (I , 1) et (F ,2).

III Coordonnées du barycentre dans un repère :

Activité 1

Le plan est muni d'un repère cartésien $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère les points $A(1,3)$, $B(5,-1)$ et G le barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(B,3)$. Déterminer les coordonnées de G.

Activité 2

Dans le plan muni d'un repère cartésien $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$,on considère les points $A\left(x_A,y_A\right)$ et $B\left(x_B,y_B\right)$. G est le barycentre des points pondérés (A,α) et (B,β) .

1) Montrer que $\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{OG}$.

2) Donner l'expression des coordonnées de G en fonction de celles de A et B.

$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère cartésien du plan .

G est le barycentre de (A,α) et (B,β).

Pour $A\left(x_A,y_A\right)$ et $B\left(x_B,y_B\right)$ on a $G\left(\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta};\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\right)$.

Activité 3

$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère cartésien du plan.

On considère les points $A(-2;3)$ et $B(1;4)$.

Déterminer les coordonnées du point G barycentre des points $(A,2)$ et $(B,-5)$.

Activité 4

Dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan , on considère les points

$$A\left(1,\frac{1}{2}\right),B\left(\frac{3}{2},2\right)\ et\ C\left(-1,-\frac{11}{2}\right).$$

a) Montrer que les points A,B et C sont alignés

b) Déterminer les réels α et β tels que C soit le barycentre des points pondérés $(A,\alpha),(B,\beta)$ avec $\alpha+\beta=1$

Essentiel du Cours

Barycentre de deux points

G est barycentre de (A,α) et (B,β) signifie : $\alpha+\beta\neq o$ et $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

Propriété du barycentre

- Si G est le barycentre de $(A,\alpha),(B,\beta)$, alors G est aussi le barycentre de $(A,k\alpha)$, $(B,k\beta)$, lorsque k est un réel non nul.
- A et B sont deux points distincts. Le barycentre de $(A,\alpha),(B,\beta)$ (l'isobarycentre de A et B) est le milieu du segment $[AB]$

Le barycentre G de (A,α) et (B,β) est le point G de la droite (AB) qui vérifie l'une des deux relations suivantes : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$.

Réduction de $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$

Soit G le barycentre de (A,α) et (B,β) .

Pour tout point M du plan on a : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$

Coordonnées du barycentre

$(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère cartésien du plan.

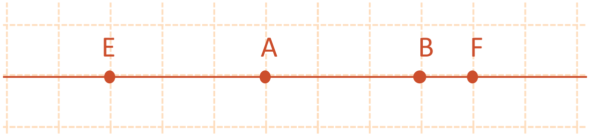
G est le barycentre de (A,α) *et* (B,β) .

Pour $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ on a $G\left(\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta};\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\right)$

Vrai-Faux

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1.



a. B est le barycentre de (E ; -4) et (F ; 3)

b. B est le barycentre de (E ; 5) (F ; 5)

c. A est le barycentre de (B ; 1) et (F ; 3)

d. B est l'isobarycentre de A et E

e. F est le barycentre de (A ; 7) et (E ; 1)

2. Si G est le barycentre de (A, -9) et (B ; 6) alors :

a. $3\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

b. $-12\overrightarrow{AG}+8\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

c. $15\overrightarrow{AG}-10\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

3. le barycentre de (B, 1) et (C, -2) est le symétrique de C par rapport à B

4. Si I est le barycentre de (E, -1) et (F ; 4) alors :

a. $\overrightarrow{IE}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{IF}$ **b.** $\overrightarrow{IE}=\frac{4}{3}\overrightarrow{IF}$ **c.** $\overrightarrow{EI}=\frac{4}{3}\overrightarrow{EF}$

5. Si $\overrightarrow{GA}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$, alors G est le barycentre de (A , 2) et (B, 3)

6. le barycentre de (A, 0) et (B, 2013) est B.

7. le barycentre de $\left(A,1+\sqrt{2}\right)$ et $\left(B,\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)$ est le point G tel que $\overrightarrow{AG}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AB}$

8. Si E est un point du plan et G le barycentre de (A, -1) et (B ; 2) alors :

a. G est le barycentre de (A ; 3) et (B ; -6)

b. G,A et B alignés

c. $4\overrightarrow{EA}-8\overrightarrow{EB}=-4\overrightarrow{EG}$

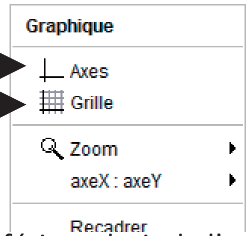
Q C M

Si E est le barycentre de (I,-3) et (J,5) alors $-3\overrightarrow{AI}+5\overrightarrow{AJ}=$	**a.** $-8\overrightarrow{EA}$	**b.** $2\overrightarrow{EA}$	**c.** $-2\overrightarrow{EA}$
Si A(-2 ;3) et B(1 ;2) et G le barycentre de (A,-1) et (B ;2) alors :	**a.** $G(-1;5)$	**b.** $G(4;-7)$	**c.** $G(4;1)$
Si G est le barycentre de (A,-5) et (B ; 3) alors	**a.** $A\in[AB]$	**b.** $A\in[AB)$	**c.** $A\in[BA)$
Si I et J deux points du plan alors le point E tel que $\overrightarrow{IE}=\frac{4}{6}\overrightarrow{IJ}$ est le barycentre de :	**a.** (I ; -4) et (J ; -2)	**b.** (I ; -2) et (J ;-4)	**c.** (I ; -2) et (J ; 5)
Si A est l'isobarycentre des points D et C alors D est le barycentre de	**a.** (A ; 1) et (C ; -1)	**b.** (A ; -1) et (C ; 2)	**c.** (A ;2) et (C ;-1)
Si P et le barycentre des points (M ; 2) et (N ;-5) alors M est le barycentre de	**a.** (P ; 8) et (N ; -5)	**b.** (P ; 5) et (N ; -3)	**c.** (P ; 3) et (N ; -5)

Objectif 1 : *Observer de façon dynamique le lieu du barycentre de deux points avec GeoGebra*

Lancer le logiciel GeoGebra

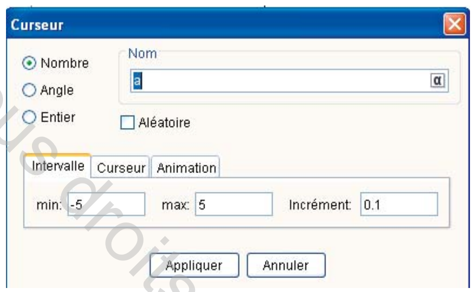
1. Afficher la grille et les axes en cliquant sur le bouton droit de la souris et en sélectionnant les éléments à activés.



2. Cliquez sur le petit triangle dans le coin inférieur droit de l'outil **Curseur**

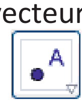
Sélectionner l'outil **Curseur**

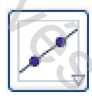
Construire deux curseurs nommés a et b tels que les nombres a et b varient entre 5 et-5 avec un pas de 0,1



cliquer droit sur a = 0 et faire afficher l'objet. Faire de même pour b

3. On va construire le vecteur $\overrightarrow{AB}$

a. Sélectionner l'icône  « nouveau point » ; cliquer 2 fois dans la feuille de travail

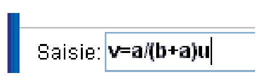
b. Sélectionner la flèche en bas à droite de l'icône 

Cliquer sur  « vecteur » Dana la feuille de travail, cliquer sur A puis sur C GeoGebra nomme le vecteur u.

4. On va construire le barycentre G de (A ; a) et (B ; b)

On va utiliser la formule : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$

a. Dans le champ de saisie taper : v=a/(b+a)u .Puis valider



b. Construire $\overrightarrow{AG}$, le représentant de $\vec{v}$ d'origine A : cliquer  puis sur $\vec{v}$ .Renommer A' par G.

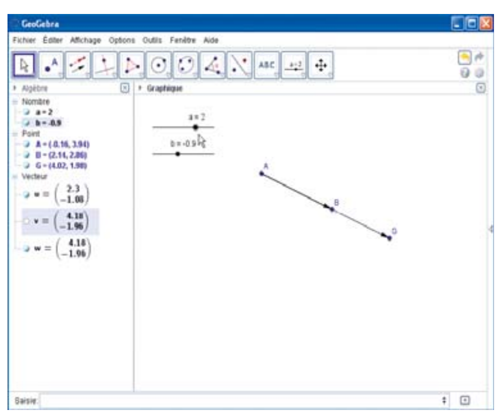
Manipulation et observation

A l'aide des deux curseurs a et b, il est possible de modifier les valeurs des coefficients

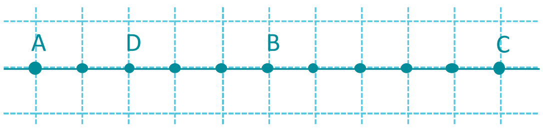
5. Tracer la droite (AB) et déplacer les curseurs a et b pour constater que G est toujours aligné avec A et B

6. Déplacer les curseurs a et b et vérifier que si a et b sont un même signe, alors $G\in[AB]$

7. Vérifier que si a et b sont de signes contraires, G est sur (AB) mais pas sur $[AB]$



1 On considère la figure suivante :



1) Vérifier que D est le barycentre des points $(A,6),(B,4)$.
2) Déterminer deux réels α et β tels que D soit le barycentre des points $(B,\alpha),(C,\beta)$.

2 A et B sont deux points distincts. Construire le barycentre :
a) G des points pondérés (A ;-1) et (B ; 3)
b) H des points pondérés (A ; 2) et (B ; 2)
c) J des points pondérés (A ;-1) et (B ; 2)
d) K des points pondérés (A ;-2) et (B ;-6)

3 $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère du plan. On considère les points $A(-1;2)$, $B(1;3)$ et $C(-5;2)$.
Déterminer les coordonnées des points :
- G barycentre des points $(A,2)$ et $(B,-5)$.
- E barycentre des points $(B,-3)$ et $(C,2)$.
- F barycentre des points $(A,-1)$ et $(C,-2)$.

4 $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère du plan. On considère les points $A(2;-3)$, $B(1;5)$ et $C(3;-11)$.
Montrer que B est le barycentre de (A, 2) et (C,-1).

5 B est le milieu du segment[AC].
Montrer que les points (A,1);(C,3) et les points (B,2);(C,2) ont le même barycentre.

6 Soit A et B deux points tels que AB = 4cm.
On considère le barycentre G de (A; 1) et (B; 3) et le barycentre K de (A; 3) et (B; 1).
1) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
2) Placer sur un dessin les points A, B, G et K.
3) Montrer que les segments [AB] et [GK] ont le même milieu.

7 Soit un segments [AB] de longueur 6cm, G est le barycentre de (A,4);(B,-1) et M un point quelconque du plan.
1) Simplifier la somme vectorielle
$\vec{U}=5\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}$
2) déterminer et construire le point M dans chacun des cas suivants :
a) $\vec{U}=\vec{0}$ b) $\vec{U}=-5\overrightarrow{AB}$.

8 Soit ABC un triangle. On désigne par A', B', C' les milieux respectifs de [BC], [AC], [AB] et G le barycentre des points pondérés (C; 1) et (C'; 2).
1) Faire une figure.
2) Montrer que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
3) Démontrer que G appartient à [BB'] et à [AA']. Que peut-on déduire ?

9 Soit ABCD un parallélogramme de centre O, G le barycentre de (A,2) ; (B,1) et H le barycentre de (C,2) ; (D,1).
a) Faire une figure.
b) Montrer que les droites (AC), (BD) et (GH) sont concourantes.
c) Soit E le barycentre de (G,3) ; (D,1).
Montrer que E est le milieu de [AO].

10 Le plan muni d'un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$.
On considère les points A(1; 3) et B(2; 1).
1) Calculer les coordonnées des points M et N tel que M le barycentre de (A; -1), (B; 3) et N le barycentre de (A; 2), (B; -1) .
2) Calculer les coordonnées de I milieu de[AB].
3) a) Trouver le réel k tel que $\overrightarrow{MI}=k\overrightarrow{MN}$.
b) Exprimer I comme barycentre de M et N affecté de coefficients que l'on déterminera.

11 ABC est un triangle quelconque .On désigne par I le barycentre de (B,3);(A,-1) , J le barycentre de (A,2);(C,-3)et par K le barycentre de (B,2);(C,1).
Prouver que les trois droites (CI) , (BJ) et (AK) sont concourantes.

12 Soit ABCD un parallélogramme. On désigne par E le barycentre de (A, 2) et(B, 1), F celui de (B, 2) et (C, 1), G celui de (C, 2) et (D, 1) et H celui de (D, 2) et (A, 1).
Faire une figure et montrer que EFGH est un parallélogramme.

13 Soit A, B ,C t rois points non alignes.
On note D le barycentre de (B,2)et (C,4) , E le barycentre de (C,4) et (A,1),F le barycentre de (B,2)et (A,1) et G le point qui vérifie :
$\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+4\overrightarrow{GC}=\vec{O}$.

1) Construire les points D,E et F.
2) Trouver deux réels c et b tel que A soit le barycentre des points (C,c)et (B,b)
3) a) Montrer que G est le barycentre de (A,1) et (D,6) puis placer le point G.
b) Montrer que $\overrightarrow{GB}=\frac{5}{7}\overrightarrow{GE}$.
c) Montrer que les points G,C et F sont alignés .

14 Le plan est muni d'un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$.
On considère les points A(-1; 2), B(2; 1) et C(-3 ;-1).
1) Déterminer les coordonnées des points :
a) I isobarycentre de A et B.
b) J barycentre des points (C ; 3) et (B ; 2).
c) K barycentre des points (A ;-2) et (C ; 3)
2) Ecrire une équation réduite de la droite (IJ)
3) Vérifier que I ,J et K sont alignés

15 Le plan est muni d'un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$.
A(1 ;2), B(-2 ;1) et C(3 ,-1) sont trois points du plan. On considère J le barycentre des points $(A,1),(B,2)$ et G l'isobarycentre de J et C
1) a) Montrer que l'ensemble (E) des points M du plan tels $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est la droite passant G et parallèle à (AB).
b) Donner une équation de cette droite.
2) L'isobarycentre des points A et C appartient-il à l'ensemble (E) ? justifier la réponse .

16 ABC est un triangle. Soit E le point défini par $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et A' le milieu de [BC].
1) Montrer que E est le barycentre des points (A,2) et(B,1).
2) Exprimer le point A' comme barycentre des points B et C.
3) On considère le point I vérifiant :
$2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{O}$.
a) Montrer que I est le milieu de [AA'].
b) Montrer que les points I, E et C sont alignés.

17 Le plan est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
On considère les points $A(-3,-1)$ et $B(0,-5)$
On note I le milieu du segment [AB]
1) Soit E le barycentre des points (A ;2)et (B ; 1). Calculer les coordonnées de E et du point F milieu du segment [OE].
2) Soit Δ l'ensemble des points M du plan tels que : $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MO}\right\|$.
Vérifier que F $\in$ Δ et Montrer que Δ est la médiatrice du segment [OE].
3) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=5$.
4) Faire une figure.

18 Soient deux points *A* et *B* tels que *AB*=6cm
1) a) Construire *C* le barycentre des points pondérés (*A*;1),(*B*;2).
b) Construire *D* le barycentre des points pondérés (*A*;-2), (*B*;5) .
2) Déterminer l'ensemble des points *M* tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$
3) Montrer que l'ensemble des points *M* tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|-2\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}\right\|$ est une droite que l'on déterminera .

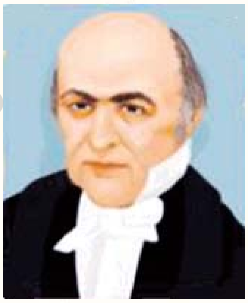
CHAPITRE 8

Activités dans un repère orthonormé

Contenu du chapitre

- Pour commencer.
- Cours.
  - Repère orthonormé
  - Produit scalaire de deux vecteurs
  - Propriété du produit scalaire
  - Produit scalaire et orthogonalité
- S'auto évaluer.
- Activité TICE.
- Exercices et problèmes.

AU FIL DU TEMPS



Les géomètres du XIX^{e} siècle, conscients des limites de la géométrie de coordonnées, inventée deux siècles plus tôt par Descartes, se penchent sur des objets et des méthodes leur permettant d'aborder la géométrie d'une autre façon.
Parmi les routes qu'ils ont empruntées se trouve celle du calcul vectoriel. *Hamilton* en Irlande(photo ci-joint) *Grassmann* en Allemagne, *Gibbs* aux Etats-Unis ou *Peano* en Italie construisent lentement la notion d'espace vectoriel et plus particulièrement celle de *Produit scalaire* de deux vecteurs, qui est donc une *notion très récente* dans l'histoire des mathématiques.

Pour commencer

Activité 1

Choisir pour chaque énoncé, la (ou les) bonne(s) réponse(s)

$(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère cartésien du plan .	A	B	C
Si $\vec{U}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{V}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$ alors :	$(\vec{U};\vec{W})$ est une base du plan	$(\vec{U};\vec{V})$ est une base du plan	$(\vec{j};\vec{W})$ est une base du plan
Si $A(3;-2)$, $B(-1;3)$ et $C(7;-7)$ alors :	$(B,\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$ est un repère du plan	$(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est un repère du plan	$(C,\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$ est un repère du plan
Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$ est colinéaire à :	$\vec{v}\begin{pmatrix}2\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$	$\vec{w}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$	$\vec{n}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ \sqrt{12}\end{pmatrix}$

Activité 2

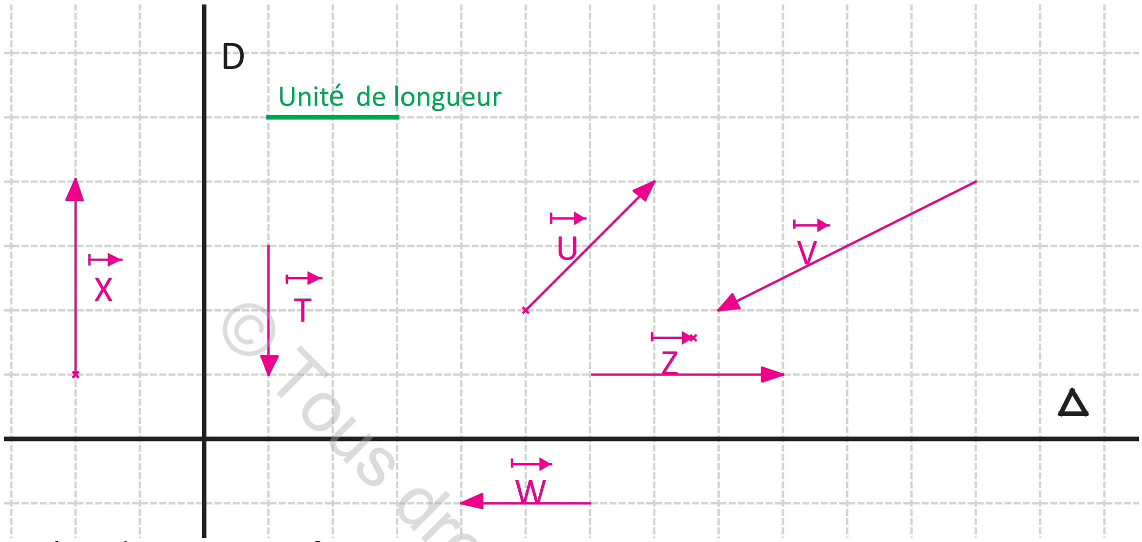
Choisir pour chaque énoncé, la (ou les) bonne(s) réponse(s)

$(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère cartésien du plan.	A	B	C
L'un des vecteurs directeurs de $D: -3x+2y-5=0$ est :	$\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$	$\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$	$\vec{W}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$
L'un des vecteurs directeurs de $D: y=-3x+5$ est :	$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$	$\vec{v}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$	$\vec{W}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$
Si la droite $D: y=2x-1$ est parallèle à $\Delta: ax+3y-6=0$ alors :	a = 2	a = -1	a = -6

I Repère orthonormé :

Activité 1

On donne la figure ci-dessous :



Répondre par vrai ou faux.

1) $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires.
2) $\vec{X}$ et $\vec{T}$ deux vecteurs directeurs de la droite (D).
3) $D \perp \Delta$.
4) $\vec{X} = \frac{3}{2}\vec{T}$.
5) $\left(\vec{U},\vec{Z}\right)$ et $\left(\vec{X},\vec{Z}\right)$ sont deux bases du plan.
6) $\vec{T}$ est un vecteur directeur de (Δ).
7) $\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{5}$ et $\left\|\vec{U}\right\| = \sqrt{2}$.
8) Les vecteurs $\vec{T}$ et $\vec{W}$ sont unitaires.

Soit D_1 et D_2 deux droites perpendiculaires, $\vec{u}$ un vecteur directeur de D_1 et $\vec{v}$ un vecteur directeur de D_2.

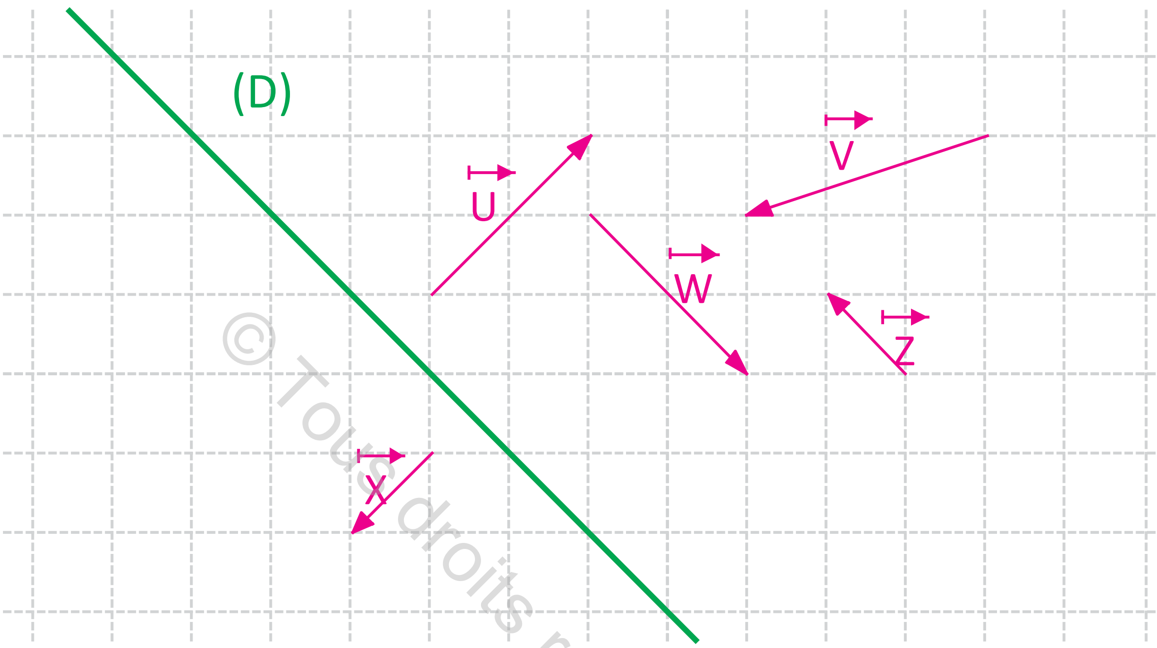
- On dit que $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont **orthogonaux** où $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- On dit que $\vec{u}$ est un **vecteur normal** à D_2.

Remarque : On convient que le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs du plan.

- Une base $(\vec{u}, \vec{v})$ du plan telle que $\vec{u} \perp \vec{v}$ est dite **orthogonale**.
- Si de plus $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires, la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est dite **orthonormée**.

Activité 2

Utiliser la figure ci-dessous pour répondre aux questions suivantes :



1) Donner deux vecteurs orthogonaux.
2) Donner une base orthogonale non orthonormée.
3) Donner une base orthonormée.
4) Donner deux vecteurs normaux à la droite (D).

Un repère cartésien $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est dit :

- **Orthogonal** lorsque la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est orthogonale.
- **Orthonormé** lorsque la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est orthonormée.

Activité 3

1) Tracer un repère orthonormé $\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$ du plan.

2) Placer les points $E(-2;1)$, $F(3;-3)$ et $G(0;-4)$.

3) Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{FG}$ dans la base $\left(\vec{u};\vec{v}\right)$.

4) Donner les composantes d'un vecteur normal à la droite (AG).

Activité 4 Expression de la norme d'un vecteur dans un repère orthonormé :

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé et M(x,y) un point du plan.

1) a) Vérifier que si x = 0 alors $\|\overrightarrow{OM}\| = |y|$.

b) Vérifier que si y = 0 alors $\|\overrightarrow{OM}\| = |x|$.

2) On suppose que $x \neq 0$ *et* $y \neq 0$.

Soit H le projeté orthogonal de M sur $(O,\vec{i})$ et K son projeté orthogonal sur $(O,\vec{j})$.

a) Montrer que $OM = \sqrt{OH^2 + OK^2}$.

b) En déduire que $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

c) Cette égalité est-elle vraie lorsque x= 0 ou y = 0 ?

3) a) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Montrer que $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

b) Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, montrer que $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé.

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Activité 5

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan.

On considère les points $A(2;-2)$, $B(-1;4)$,C(4 ,-1) et $E(-1;5)$ du plan.

1) Le triangle ABC est-il rectangle en A ?

2) Calculer la longueur de la médiane issue de B.

3) Déterminer le centre et le rayon du cercle (ζ) circonscrit au triangle ABC.

4) Le point E appartient-il au cercle (ζ) ?

II Produit scalaire de deux vecteurs :

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit $\vec{U}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Calculer $xx'+yy'$ dans les cas suivants :

1) $\vec{U}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

2) $\vec{U}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

3) $\vec{U}\begin{pmatrix}10\\-6\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{V}\begin{pmatrix}3\sqrt{2}\\5\end{pmatrix}$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}.\vec{v}$ le réel $xx'+yy'$.

On écrit : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$ ($\vec{u}.\vec{v}$ se lit $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$)

Activité 2

Montrer que pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan , on a : $\vec{u}.\vec{u}=\left\|\vec{u}\right\|^2$

Pour tout vecteur $\vec{u}$,on a : $\vec{u}.\vec{u}=\left\|\vec{u}\right\|^2$

Vocabulaire :

Le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par lui-même, noté $\vec{u}^2$, est appelé le **carré scalaire** de $\vec{u}$.

Activité 3

Soit A(-4 ;0), B(2 ; 3) et C(3 ;-1) trois points donnés dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Calculer les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AB}^2$.

Activité 4

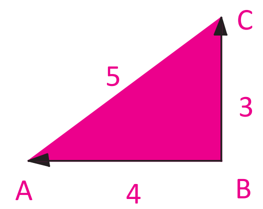
Soit ABC un triangle tel que $AB = 3, AC = 4$ et $BC = 5.$

1) Vérifier que le repère $\left(B;\frac{1}{3}\overrightarrow{BC};\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}\right)$ est orthonormé.

2) Soit I le milieu du segment $[AC]$.

a) Déterminer les composante des vecteurs $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$.

b) Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AC}$.



III Propriétés du produit scalaire :

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$ trois vecteurs du plan et $\lambda\in\mathbb{R}$.

1) Montrer que $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

2) Montrer que $\left(\lambda\vec{u}\right).\vec{v}=\vec{u}.\left(\lambda\vec{v}\right)=\lambda\times\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$

3) Montrer que $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ et $\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$
- Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel λ , on a :

$\left(\lambda\vec{u}\right).\vec{v}=\lambda\times\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$ et $\vec{u}.\left(\lambda\vec{v}\right)=\lambda\times\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$

$\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ et $\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}$

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\left\|\vec{u}\right\|=5$, $\left\|\vec{v}\right\|=4$ et $\vec{u}.\vec{v}=-8$.

Calculer :

1. $2\vec{u}.\left(-5\vec{v}\right)$ **2.** $\vec{u}.\left(2\vec{v}-\vec{u}\right)$

3. $\left(\vec{u}+2\vec{v}\right).\left(3\vec{u}\right)$ **4.** $\left(2\vec{u}-\vec{v}\right).\left(\vec{u}-3\vec{v}\right)$

Activité 3

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

2) Montrer que $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

3) Montrer que $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a :

- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
- $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\vec{u}.\vec{v} = 4$.

Calculer :

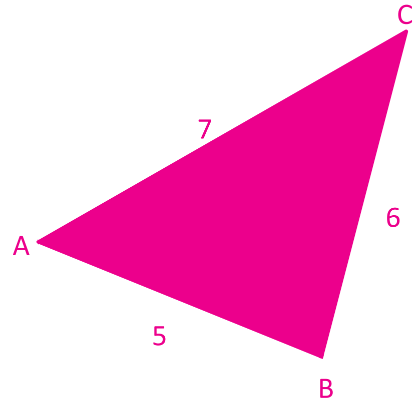
1. $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ **2.** $\|-\vec{u}+5\vec{v}\|$

3. $\|\vec{u}+2\vec{v}\|$ **4.** $(2\vec{u}-\vec{v}).(\vec{v}+2\vec{u})$

Activité 5

On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé un triangle ABC tel que :
$AB = 5, BC = 6$ *et* $AC = 7$

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$



IV Produit scalaire et orthogonalité :

Activité 1

Se rappeler

Théorème de Pytagore et sa réciproque

Soit ABC un triangle on a :

($BC^2 = AB^2 + AC^2$)

équivaut à

(ABC est un triangle rectangle en A).

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls du plan .

Montrer que $\vec{u}.\vec{v}=0$ équivaut à $\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2$.

2) Soit A, B et C trois points du plan distincts deux à deux tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

a) Montrer que $\vec{u}.\vec{v}=0$ équivaut à ABC est rectangle en A.

b) En déduire que ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux) équivaut à ($xx'+yy'=0$).

3) Calculer $\vec{u}.\vec{v}$ lorsque l'un des vecteurs est nul.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

(Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux) équivaut à ($xx'+yy'=0$).

Activité 2

Dans un repère orthonormé, on donne les points A(-3 ;0), B(0 ;-2) et C (4 ; 4).
Montrer que le triangle ABC est rectangle.

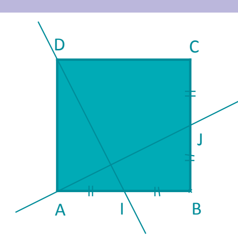
Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit $D:3y+2x+1=0$ et $D':y=\dfrac{3}{2}x-5$. Montrer que $D\perp D'$.

Exercice résolu

Soit *ABCD* un carrée de côté 1.
Soit *I* le milieu du segment [AB] et *J* celui du segment [BC].
Montrer que les droites *(DI)* et *(AJ)* sont orthogonales.



Solution

Dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$, on calcule les coordonnées des différents points de la figure. On a : $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$, $I\left(\frac{1}{2};0\right)$ et $J\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

On calcule les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{DI}$:

$$\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}1-0\\ \frac{1}{2}-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad et \quad \overrightarrow{DI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-0\\ 0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -1\end{pmatrix}.$$

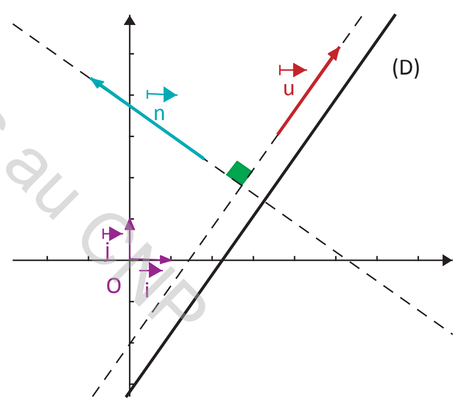
Enfin, on calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DI}$:

$$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DI}=1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$

On a $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DI}=0$ équivaut à $(AJ)\perp(DI)$

Activité 4 — Équation d'une droite de vecteur normal $\vec{n}$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.



1) Soit Δ la droite d'équation : $2x+5y-3=0$.

a) Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite Δ.

b) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

2) Soit Δ la droite d'équation : $ax+by+c=0$.

a) Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite Δ.

b) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit $A\left(x_0;y_0\right)$ un point du plan et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur non nul du plan.

Déterminer l'ensemble E des points $M(x;y)$ du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ soient orthogonaux.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit a et b deux réels non tous nuls.

La droite (D) admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ comme vecteur normal si, et seulement si, elle admet une équation cartésienne de la forme : $ax+by+c=0$ ou $c\in\mathbb{R}$

Activité 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite *(D)* passant par le point *A(3 ;-2)* et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Activité 7

$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan .

On donne A(5 ;2), B(-7 ;-1) et C(0 ;-2).

1) Justifier que A, B et C sont non alignés.

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ perpendiculaire à (AB) passant par A.

3) Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

4) Déterminer une équation de la médiatrice du segment $\left[AC\right]$.

Activité 8 Condition analytique d'orthogonalité de deux droites :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) On considère les points *A(1 ;4), B(0 ;1), C(4 ;3) et D(7 ;2).*

- **a)** Tracer les droites *(AB)* et *(CD).*
- **b)** Montrer que les droits *(AB)* et *(CD)* sont perpendiculaires .

2) Soit Δ et Δ' deux droites du plan.

- **a)** On désigne par $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ deux vecteurs normaux respectifs aux droites Δ et Δ'.
  Montrer que : $\Delta\perp\Delta'$ équivaut à $\vec{n}\perp\vec{n'}$.
- **b)** On considère les équations $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ respectives de Δ et Δ'.
  Montrer que $\Delta\perp\Delta'$ équivaut à $aa'+bb'=0$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit D et D' deux droites d'équations respectives, $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$.

$(D \perp D')$ équivaut à ($aa'+bb'=0$).

Activité 9 Cas d'une équation réduite de la droite

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit D et D' deux droites d'équations réduites respectives $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$.

1) Montrer que $\vec{n}\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D.
2) Montrer que : $D \perp D'$ équivaut à $mm'=-1$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit D et D' deux droites d'équations réduites respectives, $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$.

$(D \perp D')$ équivaut à ($mm'=-1$).

Activité 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Les droites d'équations $2x-3y=0$ et $5x+4y-1=0$ sont-elles perpendiculaires ?
2) Les droites d'équations réduites $y=\left(2-\sqrt{3}\right)x+1$ et $y=\left(2+\sqrt{3}\right)x-4$ sont-elles perpendiculaires ?

Activité 11

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Déterminer l'équation réduite de la droite perpendiculaire à la droite (D) d'équation $y=\frac{1}{3}x-5$ et passant par le point $A(-1;2)$.

Base orthogonale et base orthonormée :

- Une base$(\vec{u}\,,\,\vec{v})$ du plan telle que $\vec{u}\perp\vec{v}$ est dite base orthogonale.
- Si de plus $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires , la base $(\vec{u}\,,\,\vec{v})$ est dite orthonormée.

Norme d'un vecteur dans un repère orthonormé :

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère orthonormé. Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ alors $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Si $A\left(x_A;y_A\right)$ et $B\left(x_B;y_B\right)$ alors $AB=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$.

Produit scalaire de deux vecteurs dans un repère orthonormé :

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère orthonormé. On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

le réel $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$

Propriétés du produit scalaire de deux vecteurs :

- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$.
- Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et pour tout réel λ, on a :

$\left(\lambda\vec{u}\right).\vec{v}=\lambda\times\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$; $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$; $\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}$

$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2+2\vec{u}.\vec{v}$; $\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2-2\vec{u}.\vec{v}$; $\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2$

Produit scalaire et orthogonalité :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

(Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont orthogonaux) équivaut à ($xx'+yy'=0$).

Condition anlytique d'orthogonalité de deux droites :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit D et D' deux droites d'équations respectives, $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$

($D\perp D'$) équivaut à ($aa'+bb'=0$). ($\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D) .

S'auto-évaluer

Vrai-Faux

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1.

a. Le produit scalaire de deux vecteurs est un vecteur.

b. Le carré scalaire d'un vecteur est toujours positif.

c. (Le produit scalaire de deux vecteurs est nul) équivaut à (l'un des deux vecteurs est nul).

d. Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est le vecteurs nul.

2. $ABCD$ est un carré de centre O et I le milieu de $[AB]$.

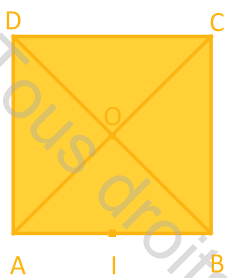
a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1$

b. $\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}$

c. $\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{DC}=0$

d. $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}=-1$

e. $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}=\frac{1}{4}$



3. Le plan est muni d'un repère orthonormé. On donne les points $A(-2;3)$, $B(6;-1)$, $C(-1;-4)$ et $D(-2;-1)$.

a. Le point C appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

b. Le point D appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

c. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (BC).

d. La perpendiculaire à la droite (AB) passant par D a pour équation : $y=2x+3$

4. Si $\|\vec{u}\|=2$, $\|\vec{v}\|=3$ et $\vec{u}.\vec{v}=-1$ alors :

a. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=13$

b. $(\vec{u}+\vec{v}).(2\vec{u}-3\vec{v})=-72$

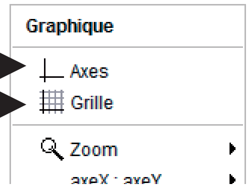
Q C M

Pour chaque énoncé, indiquer la seule proposition exacte.

Le plan est muni d'un repère orthonormé, $A(1;0)$, $B(0;-2)$ et $C(4;4)$ on a $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=$	**a.** 24	**b.** 36	**c.** -36
$\vec{u}\begin{pmatrix}m\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3m\\-4\end{pmatrix}$ sont orthogonaux pour m =	**a.** -2	**b.** -1	**c.** 3
Une équation de la droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$ passant par l'origine du repère orthonormé est :	**a.** $-4x+2y+5=0$	**b.** $y=-2x$	**c.** $4x-2y=0$
$ABCD$ est un losange de centre O alors $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{DC}=$	**a.** $\frac{AO^2}{2}$	**b.** $\frac{AC^2}{4}$	**c.** $-\frac{AC^2}{4}$
Si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ alors :	**a.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$	**b.** $C=D$	**c.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$
Une équation de la droite passant par $A(3;2)$ et perpendiculaire à la droite $\Delta:2x+y-3=0$ est :	**a.** $2x+y-8=0$	**b.** $x-2y+2=0$	**c.** $x-2y+1=0$

Objectif 1 : Mettre en évidence un certain nombre de propriétés de base du produit scalaire de deux vecteurs *avec GeoGebra*

Lancer le logiciel GeoGebra

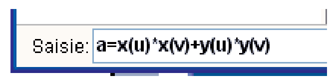


1. Afficher la grille et les axes en cliquant sur le bouton droit de la souris et en sélectionnant les éléments à activés.
2. Cliquez sur le petit triangle dans le coin inférieur droit de l'outil **Nouveau point**

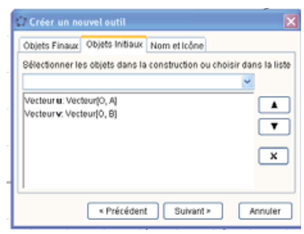
Sélectionner l'outil **Nouveau point**
Crée un point O(0,0) (Utiliser renommer pour l'appeler O)

Sélectionner l'outil **Cercle**
Créer deux cercles C_1 et C_2 de centre O et de rayons respectifs 3 et 5

3. Créer un point A du cercle C_1 et un point B du cercle C_2 puis les vecteur $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ (GéoGebra les nommera u et v)
4. L'outil produit scalaire n'existe pas sur GéoGebra nous allons le créer :
Utiliser le champ de saisie pour créer le réel a= *x*(u)**x*(v)+*y*(u)**y*(v)



Vérifier que le nombre a est bien le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$.
Dans le menu principal, sélectionner Outils – Créer un nouvel outil
Utiliser l'onglet Objets initiaux puis sélectionner les vecteurs u et v.
Utiliser l'onglet Objets finaux puis sélectionner le nombre réel a.
Utiliser l'onglet Nom et Icône puis écrire « Produit Scalaire ».

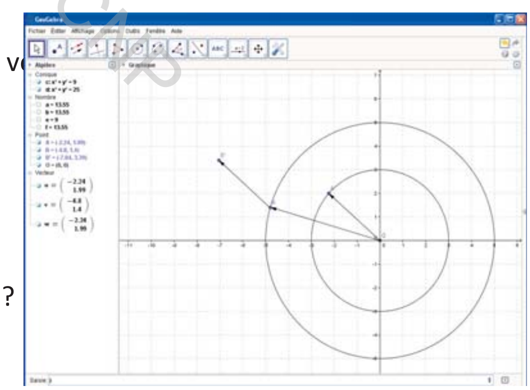


L'outil produit scalaire est maintenant créé, on peut l'utiliser pour n'importe quels couples de vecteurs, Pour l'utiliser sur un couple de vecteur $(\vec{u},\vec{v})$

on clique dans l'ordre sur , sur $\vec{u}$ puis sur $\vec{v}$.

5. Comparer les produits scalaires $\vec{u}.\vec{v}$ et $\vec{v}.\vec{u}$ en bougeant les v

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et en créant un autre représentant de $\vec{u}$ d'origine B.

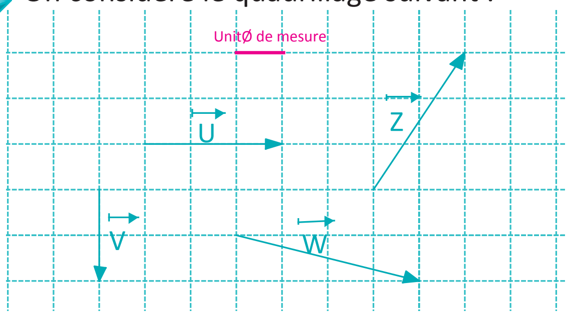


Comment placer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- pour que le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soit maximum ?
- pour que le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soit nul ?
- pour que le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soit minimum ?
- pour que le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soit négatif ?
- pour que le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soit positif ?

6. A quel intervalle appartient le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

1 On considère le quadrillage suivant :



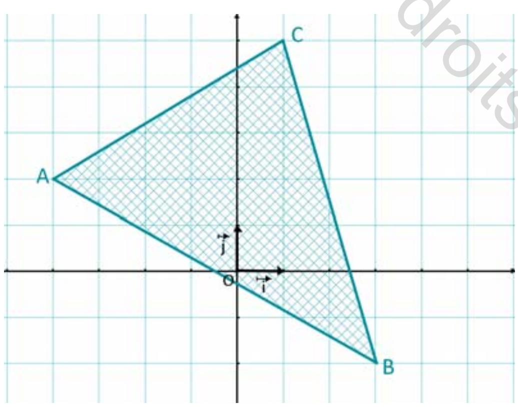
1) Déterminer une base orthogonale du plan.

2) Montrer que $\mathrm{B}=\left(\frac{1}{2}\vec{v},\frac{1}{3}\vec{u}\right)$ est une base orthonormé du plan.

3) Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{W}$ et $\vec{Z}$ dans la base B.

4) Calculer $\vec{W}.\vec{Z}$.

2



Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

3 Le plan est muni d'un repère orthonormé, calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ dans chaque cas :

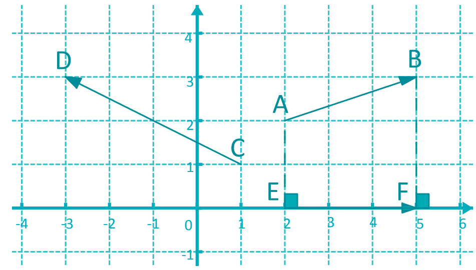
1) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\sqrt{2}\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$

3) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

4) $\vec{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\sqrt{6}\\-1\end{pmatrix}$

4



Calculer $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{EF}$.

5 Le plan est muni d'un repère orthonormé, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ dans chaque cas :

1) $A(-2;1)$, $B(4;-1)$ et $C(7;5)$

2) $A\left(\sqrt{2};2\right)$, $B\left(1;2\sqrt{2}\right)$ et $C\left(1;2+\sqrt{2}\right)$

6 Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A tel que $AB=AC=1$. Soit I le milieu de $[BC]$ et J le point défini par : $\overrightarrow{BJ}=2\overrightarrow{BC}$.

1) Faite un schéma et déterminer un repère orthonormé du plan.

2) Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{BA}$

c) $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC}$ d) $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AC}$

7 Soit $ABCD$ un carré de centre O et de côté 1 ; On appelle I le milieu du segment $[AB]$, J celui de $[BC]$ et K le point défini par : $\overrightarrow{DK}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

Calculer les produit scalaire suivants :

a) $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AD}$ b) $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AK}$ c) $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OD}$

d) $\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB}$ e) $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{DO}$ f) $\overrightarrow{CK}.\overrightarrow{AI}$

8 Soit $ABCD$ un rectangle de centre O, de longueur $AB=6$ et de largeur $AD=4$; On appelle I le milieu de $[BC]$ et J le point défini par $\overrightarrow{AJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Vérifier que $\left(A;\frac{1}{6}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)$ est un repère orthonormé et calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BD}$ b) $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$

d) $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BO}$ e) $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{AD}$ f) $\overrightarrow{CJ}.\overrightarrow{DI}$

9 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé avec $\|\vec{u}\|=5$, $\|\vec{v}\|=4$ et $\vec{u}.\vec{v}=-8$.

Calculer : **a)** $2\vec{u}.(-3\vec{v})$ **b)** $\vec{v}.(2\vec{u}-\vec{v})$

c) $\|\vec{u}-\vec{v}\|$ **d)** $\|-\vec{u}+3\vec{v}\|$

10 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan muni d'un repère orthonormé avec $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=4$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|=3$.

Calculer :

a) $\vec{u}.(-\vec{v})$ **b)** $(2\vec{u}-\vec{v})^2$

c) $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ **d)** $\|3\vec{u}-\vec{v}\|$

11 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ du plan.

1) Calculer les normes $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$.

2) Calculer la norme $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ de deux manières.

12 Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\\sqrt{5}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-\sqrt{5}\\3\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{u}\begin{pmatrix}2-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+2\\-2\end{pmatrix}$

13 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux du plan muni d'un repère orthonormé tels que $\|\vec{u}\|=2$ et $\|\vec{v}\|=3$.

1) Calculer le produit scalaire $(\vec{u}-2\vec{v}).(2\vec{u})$.

2) Calculer le produit scalaire $(3\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+2\vec{v})$.

3) Calculer les normes $\|\vec{u}-3\vec{v}\|$ et $\|2\vec{u}-3\vec{v}\|$.

14 Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans chacun des cas suivants, déterminer si le triangle ABC est rectangle :

1) $A(4;1), B(-2;0)$ et $C(-1;-6)$

2) $A(1;3), B(5;2)$ et $C(-1;1)$

3) $A(\sqrt{3};-1), B(2\sqrt{3};5)$ et $C(-4\sqrt{3};8)$

15 Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans chacun des cas suivant , trouver m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2m\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\3\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2m+1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2m\\-3\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}m\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}m+3\\-2\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{u}\begin{pmatrix}3m\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{18m}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

16 Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit les points $A(-4;1)$ et $B(3;0)$.

Déterminer les coordonnées du point C de telle sorte que C appartienne à l'axe des ordonnées et que le triangle ABC soit rectangle en A.

17 Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit $E(2;20)$, $F(10;-5)$ et $G(27;28)$.

a) Montrer que le triangle EFG est rectangle en E.

b) Calculer les coordonnées du point H tel que EFGH est un rectangle.

18 Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit *D, D' et D''* trois droites d'équations :

$D: 2x-3y+5=0$, $D': 9x+6y=0$ et $D'': -2x+3y+1=0$.

1) Déterminer un vecteur normale à chacune des droites *D, D' et D''*.

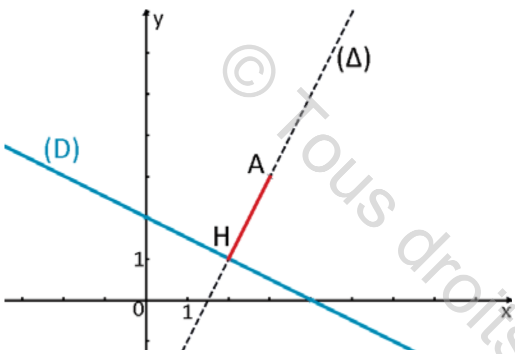
2) Montrer que $D \perp D'$.

3) Les droites *D* et *D''* sont-elles perpendiculaires ?

19 Le plan est muni d'un repère orthonormé. Dans chacun des cas suivants déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) de vecteur normal $\vec{n}$ passant par le point A :

a) $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ $et\ A(1;-1)$ **b)** $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$ $et\ A(3;-2)$

20 Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit (D) la droite d'équation $x+2y-4=0$ et $A(3;3)$.



1) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ perpendiculaire à la droite (D) passant par A .

2) En déduire les coordonnées du point H, intersection des droites (D) et Δ.

3) Calculer la distance AH.
Cette distance est appelée la distance du point A à la droite (D).

21 Le plan est muni d'un repère orthonormé. On donne deux points $A(1;2)\ et\ B(-1;4)$.

1) Déterminer une équation de Δ' la perpendiculaire en O à la droite (AB).

2) Soit $\Delta: -x+4y-7=0$.

a) Vérifier que Δ passe par A.

b) Monter que $\Delta \perp (OB)$.

c) Déterminer les coordonnées du point H d'intersection de $\Delta\ et\ \Delta'$.

3) Vérifier que $(BH) \perp (OA)$.

22 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1) a) Placer les points $A(0;-1)\ et\ B(4;1)$.

b) Ecrire une équation cartésienne de(AB).

2) Construire la droite $\Delta: \frac{1}{2}x-y-4=0$.

3) a) Montrer que Δ est parallèle à (AB)

b) Montrer que Δ coupe l'axe des ordonnées en un point C que l'on déterminera.

4) a) Ecrire une équation cartésienne de D la médiatrice de [AB].

b) En déduire que ABC est isocèle .

5) a) Ecrire une équation cartésienne de hauteur issue de A dans le triangle ABC.

b) En déduire les coordonnées de H l'orthocentre de ABC.

23 On considère $A(6;-3), B(4;5)$ et $C(-4;-3)$ trois points du plan muni d'un repère orthonormé.
On appelle I,J et K les milieux respectifs des segments $[BC],[AC]\ et\ [AB]$.
On appelle D le pied de la hauteur issue de A, E le pied de la hauteur issue de B et F le pied de la hauteur issue de C.

1) Faite une figure.

2) Démontrer que le centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC a pour coordonnées $\Omega(1;0)$.

3) a) Montrer que l'orthocentre H du triangle ABC a pour coordonnées $H(4;-1)$

b) Calculer les coordonnées des points D, E et F.

4) Calculer les coordonnées des points L, M et N, milieux respectifs des segments $[AH]$, $[BH]\ et\ [CH]$.

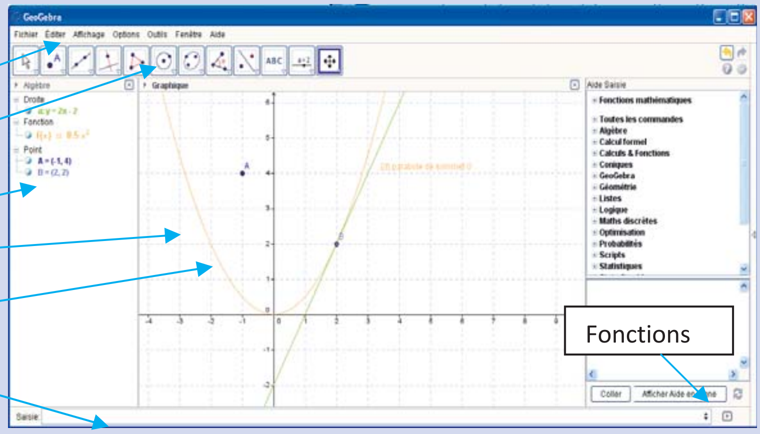
5) a) Déterminer les coordonnées du milieu S du segment $[\Omega H]$

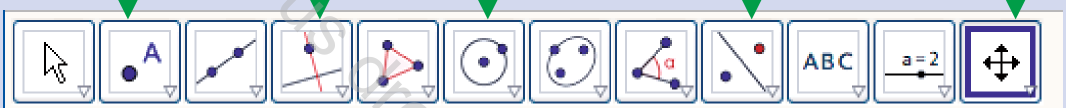
b) Montrer que les points D, E, F, I, J, K, L, M et N sont sur un même cercle de centre S dont on précisera le rayon.

Présentation

L'écran est partagé en plusieurs parties :

- La barre de menus ;
- La barre des outils ;
- La **fenêtre algèbre ;**
- La **fenêtre graphique ;**
- Le **champ de saisie,** la liste des fonctions et celle des commandes.

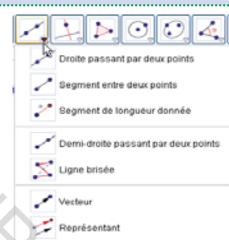




Menu déroulant de chaque icône

Lorsque l'on clique sur le petit triangle blanc situé en bas à droite d'une icône, on obtient le menu déroulant de cette icône. Les différents outils contenus dans cette icône apparaissent.

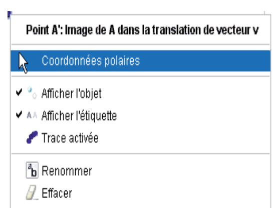
Menu déroulant de la boite des droites.



Le menu contextuel

Tous les objets crées possèdent un menu contextuel : on trouve celui-ci par un clic droit sur l'objet, soit dans la fenêtre graphique, soit dans la fenêtre algèbre.

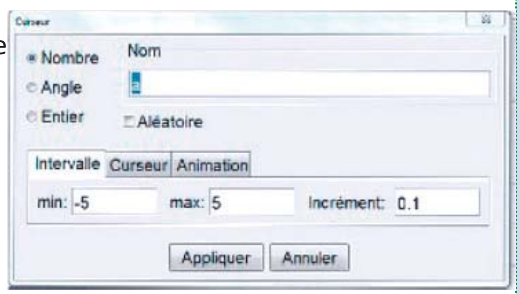
- On peut **afficher ou cacher** l'objet.
- On peut afficher ou cacher son non.
- On peut **supprimer** l'objet avec Effacer .
- On peut modifier la taille, la couleur … de l'objet avec Propriétés.



Construire un curseur

- Le curseur permet de faire varier un nombre.
- Pour créer un curseur, sélectionner l'outil a=2 de La boite des propriétés, puis cliquer sur le graphique.
- Une fenêtre s'ouvre : on peut y définir tous les éléments de ce curseur.

L'incrément est le pas selon lequel augmente la variable de min à max.



Création des objets de base dans la fenêtre graphique ou dans le champ de saisie

Objet	Fenêtre graphique Cliquer sur l'icône correspondant à l'objet crée	Ce qui s'affiche dans la fenêtre Algèbre	Utilisation du champ de saisie
Point	• Le point est crée à l'endroit du clic. • Pour créer un point sur un objet déjà construit, cliquer sur l'objet lorsque celui-ci apparaît en gras au passage de la souris	nom du point et ses coordonnées	« nom du point =(abscisse, ordonnée) » Exemple : Saisie: A(-3,2) Par défaut, les noms de variables en majuscules correspondent à des points, les noms de variable en minuscules correspondent à des vecteurs.
Droite	On peut cliquer sur les points utiles à la construction soit dans la fenêtre graphique, soit dans la fenêtre Algèbre.	nom de la droite et une équation de celle-ci. On peut modifier la forme de l'équation affichée : clic droit sur la droite puis choisir	« nom de la droite :équation » Exemple : Saisie: d:y=-2x+3
Vecteur		nom du vecteur et ses coordonnées.	« nom du vecteur =(abscisse, ordonnée) » Exemple : Saisie: u=(2,3)
Segment		nom du segment et sa longueur	
Polygone		nom du polygone et son aire	

courbe	On peut utiliser l'icône du déroulant du bouton s'il s'agit du lieu d'un point.	nom de la courbe et son équation	• « nom de la courbe : équation » Exemple : Saisie: c.y=3x^2-1 • Lorsqu'il s'agit de la courbe représentative d'une fonction Exemple : Saisie: f(x)=-x^2+5x • Pour avoir la courbe sur un intervalle [a , b] : « Fonction[expression,a,b] Exemple : Saisie: Fonction[x^2-3x, 1, 5]

Autres constructions et fonctionnalités

Pour	Marche à suivre
Créer un **curseur** Un curseur est une illustration graphique d'un nombre variant dans un intervalle donné, par l'intermédiaire d'un point se déplaçant sur un segment. Il permet de disposer d'une variable numérique.	Icône puis cliquer dans la fenêtre graphique à l'endroit où l'on veut voir le curseur, on peut alors choisir le nom du curseur, modifier ses valeurs extrêmes et son pas (incrément) dans l'onglet intervalle et sa largeur dans l'onglet curseur. *ATTENTION :* on ne peut pas utiliser x et y comme nom ; si on veut un curseur représentant des coordonnées, on peut l'appeler X ou Y.
Affecter une valeur à un **curseur**	Clic droit sur le curseur, puis **Propriétés** puis modifier la valeur dans l'onglet **Basique .**
Calculer et afficher la **norme d'un vecteur**	Saisir « longueur[u] » pour $\left\Vert \vec{u} \right\Vert$.
Calculer et afficher la **distance** entre deux points	Saisir « Distance[A,B] » pour AB.
Calculer et afficher le **coefficient directeur** d'une droite	Icône pente du menu déroulant du bouton puis cliquer sur la droite.
Calculer et afficher le **produit scalaire** de deux vecteurs	Saisir « p=u*v » pour $p = \vec{u}.\vec{v}$.
Créer le vecteur **somme** de deux vecteurs	Saisir « S=u+v » pour $\vec{S} = \vec{u} + \vec{v}$.
Déplacer des objets	Icône puis clic enfoncé sur l'objet en déplaçant la souris
Activer ou désactiver le repère/ le quadrillage	Clic droit dans la fenêtre graphique, puis clic gauche sur Axes/Grille.
Modifier les propriétés du repère/ quadrillage (échelle, graduation, apparence)	Clic droit dans la fenêtre graphique, puis clic gauche sur Graphique.
Utiliser un **indice** dans le nom d'un objet	Saisir « X_1 » pour X_1.

Corrigés des Vrai-Faux et QCM

Chapitre 1 :
Équations et Inéquations du second degré

Activité 1 : Page 8.
1. C ; 2. B ; 3. A ;

Vrai-Faux ....Page 18

1.F ; **2.**F ; **3.**F ; **4.**V ; **5.**F ; **6.**V ; **7.**F ; **8.**V ; **9.**F ; **10.**F ; **11-a.**V ; **11-b.**F ; **11-C.**F ; **11-d.**V ; **12-a.**F ; **12-b.**V ; **12-c.**V ; **12-d.**F ;

Q C M

1.D ; **2.**B ; **3.**B ; **4.**D ; **5.**D ; **6.**C ;

Chapitre 2 :
Système de deux équations à deux inconnues

Activité : Page 24.
1. B ; 2. B ; 3. C ; 4. B ; 5. C ; 6. A ; 7. B ; 8. B ; 9. C ;

Vrai-Faux ....Page 31

1.V ; **2.**F ; **3.**F ; **4.**F ; **5.**F ; **6.**V ; **7.**F ;

Q C M

1.D ; **2.**C ; **3.**D ; **4.**D ;

Chapitre 3 :
Fonctions affines

Activité 1: Page 36.
1. C ; 2. A ; 3. C ;

Activité 2: Page 36.
1. C ; 2. A ;

Vrai-Faux ....Page 48

1.F ; **2.a.**V ; **2.b.**V **2.c.**F **2.d.**V **3.**V ; **4.e.**V ; **4.f.**F ; **4.g.**F ; **4.h.**V ;

Q C M

1.A ; **2.**B ; **3.**A-D ; **4.**D ;

Chapitre 4 :
Fonctions de type : $x \mapsto ax^2$ et $x \mapsto \frac{a}{x}$

Activité : Page 54.
1. C ; 2. C ; 3.a. C ; 3.b. C ; 3.c. B ; 3.d. C ; 3.e. C ; 3.f. C ;

Vrai-Faux ....Page 69

Énoncé 1

1.F ; **2.**V ; **3.**F ; **4.**F ; **5.**F ; **6.**F ; **7.**V ;

Énoncé 2

1.F ; **2.**V ; **3.**F ; **4.**F ; **5.**F ; **6.**F ;

Q C M

1.C ; **2.**D ; **3.**D ; **4.**D ;

Chapitre 5 :
Calcul vectoriel

Vrai-Faux ....Page 80

1.a.V ; **1.b.**F ; **1.c.**V ; **2.a.**F ; **2.b.**F ; **2.c.**V ; **2.d.**V ; **3.a.**V ; **3.b.**V ; **3.c.**F ; **4-a.**V ; **4-b.**F ;

Q C M

1.B ; **2.**B ; **3.**A-C ; **4.**A-B ; **5.**A

Chapitre 6 :
Base et repère cartésien

Vrai-Faux ....Page 103

1.a.F ; **1.b.**V ; **1.c.**V ; **2.a.**F ; **2.b.**V ; **3.a.**F ; **3.b.**V ; **3.c.**F ; **3.d.**F ; **4.a.**V ; **4-b.**V ;

Q C M

1.C ; **2.**C ; **3.**B ; **4.**B ; **5.**A ; **6.**B ;

Chapitre 7 :
Barycentre de deux points

Vrai-Faux ....Page 117

1.a.F ; **1.b.**F ; **1.c.**V ; **1.d.**V ; **1.e.**F ;
2.a.V ; **2.b.**V ; **2.c.**V ; **3.**F ; **4.a.**F ;**4-b.**F ;
4-c.V ; **5.**F ; **6.**V ; **7.**F ; **8.a.**V ; **8.b.**V ;
8.c.V ;

Q C M

1.C ; **2.**C ; **3.**C ; **4.**b ; **5.**C ; **6.**C ;

Chapitre 8 :
Activité dans un repère orthonormé

Activité 1 : Page 122.
1. b-c ; 2. c ; 3. b-c ;

Activité 2 : Page 122.
1. c ; 2. a-c ; 3. c ;

Vrai-Faux ....Page 134

1.a.F ; **1.b.**V ; **1.c.**F ; **1.d.**F ; **2.a.**V ;
2.b.F ; **2.c.**V ; **2.d.**F ; **2.e.**F ; **3.a.** F ;
3.b. V ; **3.c.** F ; **3.d.** V ; **4.a.**F ;**4-b.**F ;

Q C M

1.b ; **2.**a ; **3.**c ; **4.**c ; **5.**c ; **6.**c ;