REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

MATHS

2ème année de l'enseignement secondaire

Lettres

Les auteurs

Taoufik CHARRADA
Inspecteur des écoles préparatoires et des lycées

Abderrahmen MIMOUNI
Inspecteur des écoles préparatoires et des lycées

Mohamed SAKRANI
Professeur principal de l'enseignement secondaire

Abderrazek BERRZIGUE
Professeur de l'enseignement secondaire

Les évaluateurs

Jaafar BENI YAZID
Inspecteur Général de l'Education

Tahar DORGAA
Inspecteur des écoles préparatoires et des lycées

Centre National Pédagogique

PRÉFACE

Ce manuel traite le nouveau programme de mathématiques de la classe 2ème année secondaire section lettres applicable à la rentrée 2005.

Les objectifs visés par ce nouveau programme constituent les principes de base de ce manuel, tant sur la structure que dans l'esprit.

S'agissant de la structure, nous avons choisi de poursuivre, en quelque sorte, la même démarche adoptée dans le manuel de 1ère année secondaire, c'est-à-dire de découper l'ouvrage en trois grands champs d'activités :

- Activités numériques
- Activités algébriques
- Statistiques.

S'agissant de l'esprit, nous avons insisté sur la pratique de la résolution des problèmes en se basant sur des exercices choisis et triés, chaque fois que possible de la réalité sociale ou économique.

Nos remerciements à :
– Mme Hikma SMIDA et Mr Abdennebi ACHOUR qui ont lu une partie de ce manuel et nous ont proposé de judicieuses modifications.
– MM. Jaafar BENI YAZID et Tahar DORGAA pour leurs précieuses remarques et conseils suggérés dans le cadre de l'évaluation de ce manuel.
– L'équipe technique du CNP, pour leur contribution dans la mise en œuvre de ce manuel.

Les auteurs.

Structure des chapitres

La plupart des chapitres sont subdivisés en rubriques facilement repérables.

Vérifier vos acquis

Cette rubrique comporte des activités qui visent à permettre aux élèves de consolider leurs acquis antérieurs et à identifier leurs lacunes éventuelles.

Activités

Les activités proposées ont pour buts d'introduire des notions nouvelles et de permettre aux élèves de construire les savoirs et les savoirs-faire à connaître.
On y trouve aussi :
- des activités informatiques permettant de réfléchir avec l'ordinateur.
- des exercices résolus et commentés pour mettre en place les méthodes essentielles.
- des exercices d'applications (Exercez-vous).

L'essentiel du cours

Pour une meilleure mémorisation des savoirs et des savoirs-faire, les connaissances exigibles sont écrites sous une forme claire et volontairement simple pour être accessible à l'élève.

Tests d'auto-évaluation

Destinés à l'élève, cette partie lui permet d'estimer seul l'état de ses connaissances.

Exercices

Des exercices d'applications.

A vos souris : Des exercices à traiter avec un logiciel
Jeux mathématiques.

Point d'histoire

Cette rubrique propose des éléments d'histoire des mathématiques.

SOMMAIRE

1 ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

«En essayant continuellement, on finit par réussir. Donc plus ça rate, plus on a de chances que ça marche».

[Les Shadoks]

POURCENTAGES

VÉRIFIER VOS ACQUIS

Estimation, arrondi

ACTIVITÉS

Pourcentages

ACTIVITÉS

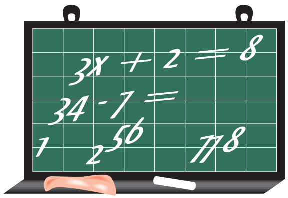
COURS

EXERCICES

S'auto-évaluer
Exercices
Informatique : A vos souris
Jeux mathématiques

POINT D'HISTOIRE

Vérifier vos acquis



1

Ecrire à l'aide d'une puissance de 10 :

10.000 000 00 ; 0,000001

2

Donner l'écriture décimale de :

$0,015 \times 10^4$; 5600×10^{-6} ; $2,3 \times 10^2$

> L'écriture scientifique de 254 est $2,54 \times 10^2$ de la forme $a \times 10^p$ $1 \leq a < 10$; α est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul après la virgule et p un entier relatif.

3

Ecrire sous la forme $a.10^P$ où a est un entier relatif non nul et p un entier relatif :

– 0,241 ; 0,00003 ; 13000000

4

Donner l'écriture scientifique de :

2564000 ; $0,03 \times 10^5$; 25×10^{-7}

5

Compléter avec < , > ou = :

5×10^{-3}.... 0,005 ; 98×10^3 .... $9,8 \times 10^4$

$\frac{7}{5} \ldots -\frac{3}{4}$; $\frac{17}{4} \ldots \frac{17}{5} \ldots \frac{243}{321} \ldots \frac{524}{213}$

6

Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où b est un nombre entier naturel :

$\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{80} - \sqrt{180}$.

Vérifier vos acquis

7

Répondre par vrai ou faux. Expliquer la réponse.

$\sqrt{0,9} = 0.3$

$\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$3\sqrt{54} - 7\sqrt{6} - \sqrt{2}\sqrt{12}$ est un nombre entier

$2(\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{2})^2$

$\sqrt{(-3)^2} = -3$

La moitié de $\sqrt{100}$ est $\sqrt{50}$

$(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 1$

8

On donne :

$$A = \frac{2 - \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$B = \frac{(-4) \times 10^{-2} \times (-5) \times 10^{7}}{3 \times 10^{5}}$$

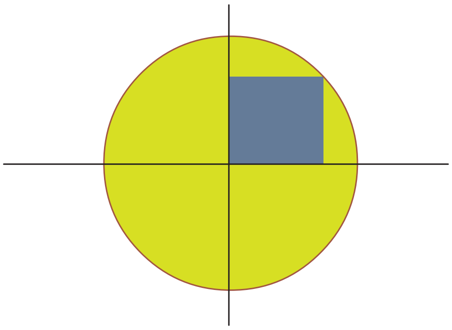
$$C = \frac{(3 + \sqrt{11})^2 - 6\sqrt{11}}{3}$$

Montrer en détaillant les calculs que B = C = A

9

Montrer que $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 2$

10



L'aire du disque est égale à 72π.
Quelle est l'aire du carré ?

I - Valeurs approchées décimales - Arrondis

Activité 1

Effectuons la division de 80 par 7

$$\begin{array}{l|l} 80 & 7 \\ \cline{2-2} \ \ 10 & 11,428 \\ \ \ \ \ 30 & \\ \ \ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 60 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 4 & \end{array}$$

- $11 < \frac{80}{7} < 12$

Compléter : par excès, par défaut, 10^{-1}, 10^{-2} :

11 est la valeur approchée décimale par ... à ... près de $\frac{80}{7}$

12 est la valeur approchée décimale par ... à ... près de $\frac{80}{7}$

- $11,4 < \frac{80}{7} < 11,5$

11,4 est la valeur approchée décimale par ... à ... près de $\frac{80}{7}$

11,5 est la valeur approchée décimale par ... à ... près de $\frac{80}{7}$

- $11,42 < \frac{80}{7} < 11,43$

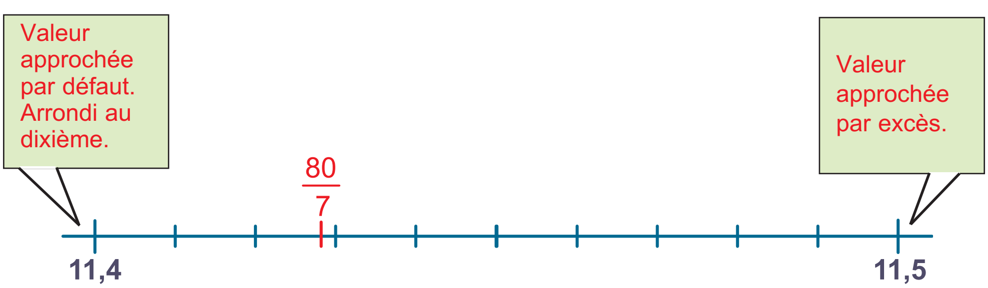
11,42 est la valeur approchée décimale par ... à ... près de $\frac{80}{7}$

11,43 est la valeur approchée décimale par ... à ... près de $\frac{80}{7}$

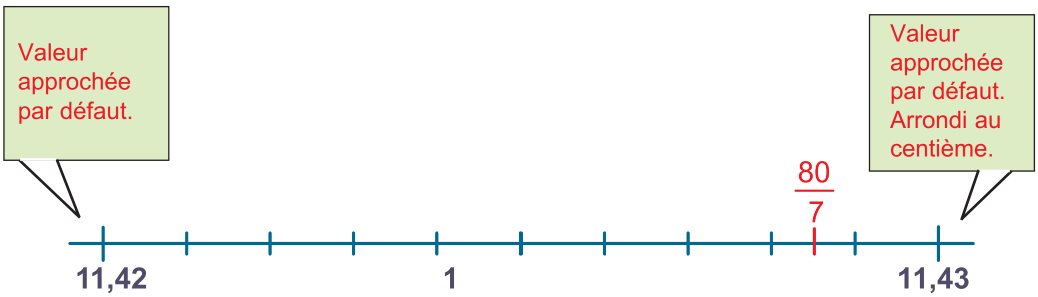
Arrondis :

$11 < \frac{80}{7} < 12$ et $\frac{80}{7}$ est plus proche de 11 que de 12. L'arrondi entier (ou d'ordre 0) de $\frac{80}{7}$ est 11.

$11,4 < \frac{80}{7} < 11,5$ et $\frac{80}{7}$ est plus proche de 11,4 que de 11,5. L'arrondi à 10^{-1} près (ou d'ordre 1) de $\frac{80}{7}$ est 11,4.



$11,42 < \frac{80}{7} < 11,43$ et $\frac{80}{7}$ est plus proche de 11,43 que de 11,42. L'arrondi à 10^{-2} près (ou d'ordre 2) de $\frac{80}{7}$ est 11,43.



L'arrondi à 10^{-2} près de $\frac{80}{7}$ est 11,43.

- Déterminer l'arrondi de $\frac{80}{7}$ à 10^{-3} près.

Remarque :

Dans l'écriture 11,428, l'arrondi au dixième est 11,4 car le chiffre des centièmes est inférieur ou égal à 4.

Dans l'écriture 11,428, l'arrondi au centième est 11,43 car le chiffre des millièmes est supérieur ou égal à 5.

Activité 2

1. Compléter le tableau suivant :

> **a** est une valeur approchée de x à k près si
> **a-k ≤ x ≤ a+k**

a est une valeur approchée de x à k près	$a - k \leq x \leq a+k$
1,4 est une valeur approchée par défaut de $\sqrt{2}$ à 10^{-1} près	$1,3 \leq \sqrt{2} \leq 1,5$
3,14 est une valeur approchée par défaut de π à 10^{-2} près	
2,65 est une valeur approchée par excès de $\sqrt{7}$ à 10^{-2} près	

2. Compléter le tableau suivant :

Encadrement $a \leq x \leq b$	Valeur approchée
$1,62 \leq x \leq 1,68$	1,65 est une valeur approchée de x à 3×10^{-2} près
$-0,823 \leq x \leq -0,821$	
$0,008 \leq x \leq 0,022$	

3. On a mesuré le rayon R d'un cercle et on a obtenu R = 2,60 cm.

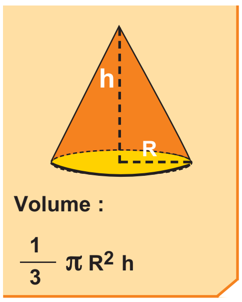
Cette mesure a été réalisée à 0,01cm près.
Déterminer une valeur approchée du périmètre P de ce cercle en donnant une précision du résultat obtenu.
(prendre $3,14 \leq \pi \leq 3,15$)

Activité 3

A l'aide de la calculatrice donner l'arrondi au centième près de :

$\frac{-25}{4,2}$; $\frac{75,65}{-14,2}$

Activité 4

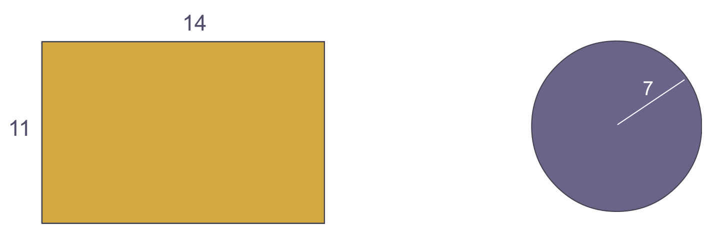


Un cône de 8 cm de hauteur a un volume de 70 cm^3

a) Calculer la longueur exacte du rayon de base

b) Donner l'arrondi au mm de ce rayon.

Activité 5



Comparer les aires des domaines ci-dessus pour les valeurs approchées de π suivantes :

3,14 ; 3,141 ; 3,1415 ; 3,1416. Conclure.

II - Pourcentages

Manipuler les pourcentages

Activité 1

A l'occasion d'une vente promotionnelle, une commerçante applique une baisse de 30% sur tous les articles. Cela veut dire que sur 100 D, la réduction sera de 30 D.

Compléter le tableau suivant :

Prix initial (en D)	100	200			
Réduction (en D)	30		75	180	

$\times \frac{30}{100}$

Dire que b représente p% de a signifie

$b = \frac{p}{100} a$

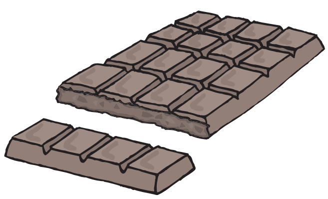
Le prix initial et la réduction sont deux grandeurs proportionnelles.

Dans ce cas :

Réduction = prix initial $\times \frac{30}{100}$

Exemple

Une tablette de chocolat de 125 g contient 64% de cacao.
Quelle est la masse de cacao dans cette tablette ?



Réponse :

64% de 125g, correspondent à $125 \times \frac{64}{100} = 80g$.

Cette tablette de chocolat contient 80g de cacao.

Activité 2

Dans une classe de 28 élèves, 21 sont demi-pensionnaires.
Quel est le pourcentage des élèves demi-pensionnaires dans cette classe ?

Activité 3

Une classe de 36 élèves comporte 22 filles, la proportion des filles dans l'effectif total de la classe est donc $\frac{22}{36} = \frac{11}{18}$.

Compléter :
Le pourcentage des filles dans cette classe est **d'environ…**
La proportion des garçons dans cette classe est alors **d'environ…**

Activité 4

Dans un lycée, 240 élèves sont internes, ce qui représente 12,5% de l'ensemble des élèves du lycée. Calculer le nombre total des élèves du lycée.

Activité 5

Un vacancier a réglé un acompte de 75 D représentant 30% du prix de son voyage organisé.
Calculer ce prix.

Activité 6

Durant un match de basket ball, l'équipe A réussit 57 tirs au panier sur 76 tentés et l'équipe B réussit 64 tirs au panier sur 80 tentés.

1. Exprimer en pourcentage le taux de réussite des deux équipes.
2. Quelle est donc l'équipe la plus adroite ?

Découvrir la notion d'évolution

Activité 1

Le nombre
$1 + \frac{18}{100} \geq 1$
s'appelle coeficient multiplicateur associé à l'augmentation de 18%.

Un article coûte 25 D hors taxe. Le taux du TVA (Taxes sur la valeur ajoutée) est de 18%.

Compléter :
Le nouveau prix en dinars est : 25 + 25x … = 25 x (…….) = ….

Activité 2

Le prix marqué d'un article est 15 D. Le magasin décide de faire une remise à la caisse de 20%.

Quel est le prix à payer ?

$1 - \frac{20}{100} = 0,8 \leq 1$
est le coeficient multiplicateur associé à la diminution de 20%.

Savoir

a représente p % de b si $a = \frac{P}{100} b$

Augmenter **a** de p % c'est multiplier a par $(1+\frac{P}{100})$

Diminuer **a** de p % c'est multiplier a par $(1-\frac{P}{100})$

Les constantes $1+\frac{P}{100}$ et $1-\frac{P}{100}$ sont appelés coefficients multiplicateurs.

Remarque :
Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de p% est supérieur à 1 et vaut

$$1+\frac{P}{100}$$

Le coefficient multiplicateur associé à une diminution de p% est inférieur à 1 et vaut

$$1-\frac{P}{100}$$

Exercice résolu :

Le tableau suivant présente l'évolution des effectifs des élèves dans le gouvernorat de Nabeul pour les années 2003-2004 et 2004-2005.

	2003-2004	2004-2005
1^{er} cycle de l'enseignement de base	78908	76520
$2^{ème}$ cycle de l'enseignement de base	37897	37192
Enseignement secondaire	28234	28996

Source : ***(DRE Nabeul)***

1. Calculer, pour chaque année scolaire, le pourcentage de chaque catégorie par rapport au total des élèves dans la région de Nabeul.
2. Pour chaque catégorie calculer la variation en pourcentage entre les deux années.

Solution :

1. L'effectif total en 2003-2004 est 145039.

Le pourcentage des élèves du 1^{er} cycle de l'enseignement de base est : $\frac{78908}{145039} \times 100 \approx 54\%$. Pour les autres catégories on obtient approximativement 26% et 20%.
On procède de même en 2004-2005, on obtient à peu près 54%, 26% et 20%

2. Pour le 1^{er} cycle de l'enseignement de base :
La variation en pourcentage entre les deux années est : $\frac{78908-76520}{78908} \approx 0{,}03026$. L'effectif du 1er cycle de l'enseignement de base a diminué de 3,02%.

Pour calculer un tel pourcentage il faut d'abord calculer l'effectif total.

Pour calculer une variation en pourcentage, diviser la différence par l'effectif

Remarques :

– Lorsqu'une grandeur positive augmente et passe de la valeur initiale **a** à la valeur finale **b**, la variation en pourcentage d'augmentation est donnée par $\frac{b-a}{a}$.

– Lorsqu'une grandeur positive diminue et passe de la valeur initiale **a** à la valeur finale **b**, la variation en pourcentage de baisse est donnée par $\frac{a-b}{a}$.

Exercez-vous

1

Donner les pourcentages d'évolution associés aux coefficients multiplicateurs suivants et préciser dans chaque cas s'il s'agit d'une baisse ou d'une hausse.
0,7 ; 1,13 ; 1,30 ; 0,43 ; 0,04 ; 1,25 ; 0,95 ; 1,75 ; 0,15

2

Compléter le tableau suivant :

Vocabulaire :
Un pourcentage permet de traduire une évolution : soit une augmentation soit une diminution.

Evolution en %	Opération x ...
Augmenter de 15%	x 1.15
Diminuer de 8	x 0.92
	x 0.8
Augmenter de 10%	
	x 1.2
	x 2
Diminuer de 28%	

3

Trois nouveaux élèves arrivent dans une classe de 25 élèves.
Quel est le pourcentage de variation correspondant à cette augmentation d'effectif ?

4

Une veste se vendait à 155D. Quel est son prix après un solde de 45 % ?

Activité 3

Un magasin de sport affiche un article à 80 dinars. (avant le solde)

1. Le commerçant accorde une remise de 20 % sur ce prix. Calculer le montant de la remise et le prix de vente de l'article après remise.
2. Après le solde, il décide d'augmenter ce nouveau prix de 10%. Calculer le prix de vente de l'article après cette augmentation.
3. Quel est finalement le montant de la réduction accordée par le commerçant par rapport au prix initial ?
4. Exprimer le pourcentage de la remise par rapport au prix initial. (après la remise de 20% et l'augmentation de 10 %)

Savoir

Augmenter **a** de $p\%$ puis augmenter le résultat de $p'\%$, c'est multiplier **a** par $(1+\frac{p}{100})(1+\frac{p'}{100})$

Augmenter **a** de $p\%$ puis diminuer le résultat de $p'\%$, c'est multiplier **a** par $(1+\frac{p}{100})(1-\frac{p'}{100})$

Exercez-vous

1

Le prix d'un produit est 120 D. Ce prix subit successivement une hausse de 10 % et une baisse de 5 %.
1. Quel est le prix final du produit ?
2. Quel est le pourcentage de variation final ?

2

Un article qui coûtait 100 D a subi une hausse de 15% puis une nouvelle hausse de 15%.
Maram prétend qu'il y'a eu en tout une hausse de 30%. A-t-elle raison ?

3

Un article qui valait 100D a subi une hausse de 15% puis une baisse de 15%.
Quel est son prix final ? L'article retrouve-t-il son prix initial ?

4

Après deux augmentations successives de 25%, le prix d'un article est de 25 D.
Quel était son prix initial ? Comparer à une hausse de 50%.

5

Après une augmentation de 50% et une baisse de 25%, le prix d'un article est de 22,500 D.
Quel était son prix initial ? Comparer à une hausse de 25%.

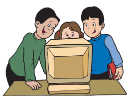
6

Est-il vrai qu'une baisse de 5% suivie d'une hausse de 10% est la même qu'une hausse de 10% suivie d'une baisse de 5% ? Justifier.

L'essentiel du cours

- **a** représente p % de **b** si a = $\frac{p}{100}$ x b
- **Augmenter** une grandeur **a** de p % revient à la multiplier par $\left(1+\frac{p}{100}\right)$
- **Diminuer** une grandeur **a** de p % revient à la multiplier par $\left(1-\frac{p}{100}\right)$
- $1+\frac{p}{100}$ **et** $1-\frac{p}{100}$ sont appelés coefficients multiplicateurs.
- **Augmenter** une grandeur **a** de p % puis augmenter le résultat de p' % c'est multiplier **a** par $\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p'}{100}\right)$
- **Augmenter** une grandeur **a** de p % puis diminuer le résultat de p' % c'est multiplier **a** par $\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{p'}{100}\right)$

Réfléchir avec l'ordinateur



Un emprunteur doit rembourser un prêt de 36000 dinars en 5 ans en respectant les conditions suivantes :

✓ Le montant de sa première mensualité sera égal à 600D.

✓ Le montant de chaque mensualité augmente de 0,2% par rapport à la mensualité du mois précédent.

a) Calculer les montants de la deuxième et de la troisième mensualité puis arrondir les résultats au centième.

b) On se propose de faire afficher sur une feuille de calcul d'un tableur la liste des 60 mensualités sans les calculer une par une.

Sur une feuille de calcul d'un tableur, entrer les données ci-dessous :

✓ On utilise la colonne A comme colonne des numéros des mensualités. Pour cela on écrit dans la cellule A1 le titre de la colonne « mensualité » puis on tape 1 et 2 dans la cellule A2 et A3. Compléter la colonne A par un copier-glisser des deux premières cellules.

✓ On utilise la colonne B pour l'affichage des mensualités. Pour cela on écrit en B1 «montant» puis on tape 600 dans la cellule B2 car elle contient la première mensualité.

✓ Dans la cellule B3 : on tape la formule : **=B2*1,002** puis étendre cette formule jusqu'à la ligne 61.

c) Sur la même feuille de calcul on peut afficher la somme totale que doit rembourser l'emprunteur au bout de 5 ans.

Pour cela

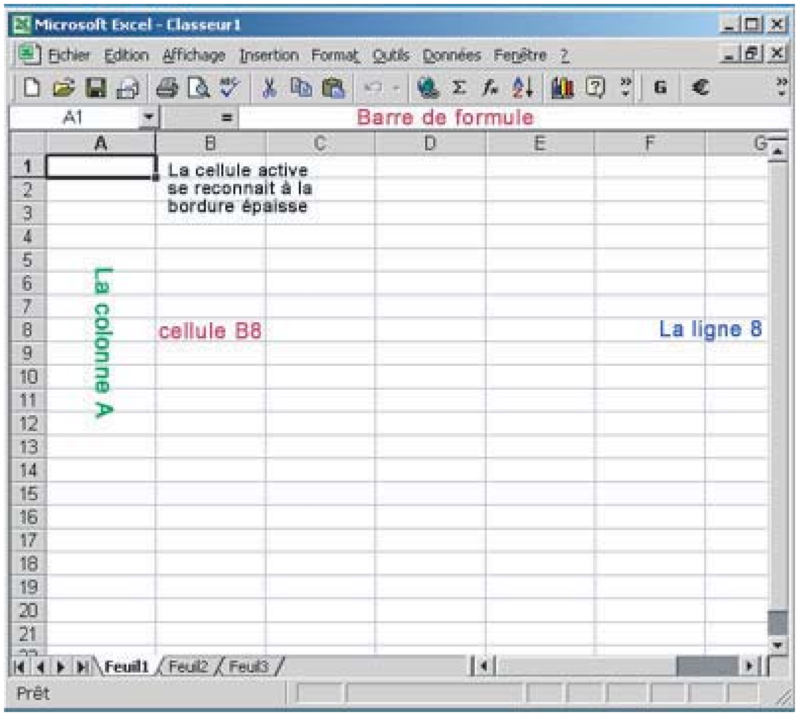
✓ On écrit dans la cellule C1 le titre de la colonne «Total»

✓ Dans la cellule C2 : on tape la formule **=Somme(B2:B61)**

Quel est alors la somme que doit rembourser l'emprunteur.

Tableurs :

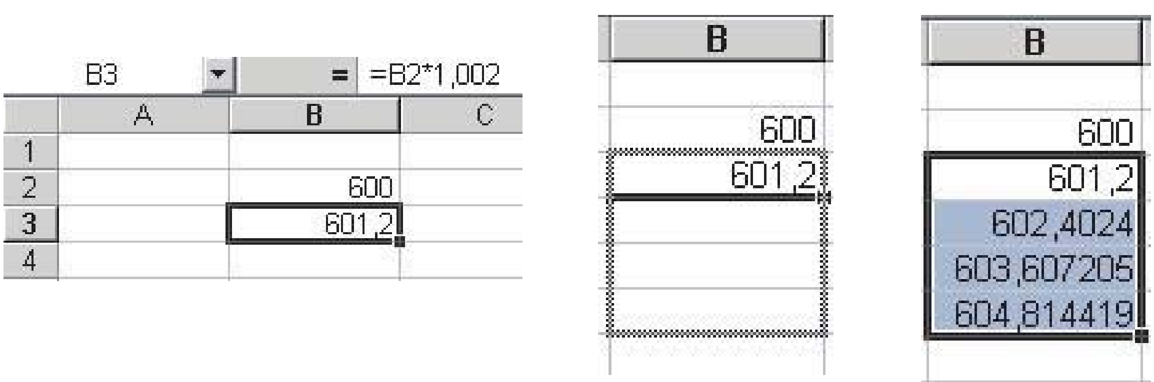
Les tableurs sont des logiciels qui permettent des calculs nombreux et répétitifs. Les tableurs les plus souvent utilisés sont Excel et Works.



Les formules de calcul :
Une formule commence toujours par = et permet de calculer le contenu d'une cellule à partir d'une autre.

Exemple :

Taper 600 dans la cellule B2 et la formule =B2*1,002 dans la cellule B3.
En saisissant, avec le bouton gauche de la souris, le petit carré noir en bas à la droite de la cellule B3 étendre cette formule vers le bas, par exemple, Ainsi, automatiquement, B4 contient=B3*1,002, B5 contient =B4*1,002, ...



Q.C.M.

1. La longueur de chacune des arêtes d'un cube augmente de 50%. L'aire totale du cube augmente de :

- ❑ 50%
- ❑ 125%
- ❑ 225%
- ❑ 237,5%
- ❑ 2500%

2. Le prix d'un livre est passé de 15D à 18D. Il a augmenté de :

- ❑ 120%
- ❑ 0,2%
- ❑ 16.66%

3. Une action de 150D voit son cours chuter de 30%. Son cours devient :

- ❑ 45D
- ❑ 105D
- ❑ 120D

4. Un artisan solde tous ses articles en affichant 15% de baisse. Il doit multiplier tous les prix de ses articles par k pour obtenir les prix soldés :

- ❑ $k = 1,15$
- ❑ $k = 0,85$
- ❑ $k = 1,015$

5. Le prix d'un article augmente de 10% puis son nouveau prix diminue de 10% alors :

- ❑ L'article retrouve son prix initial
- ❑ Le prix initial de l'article augmente de 1%
- ❑ Le prix initial de l'article diminue de 1%

6. Le prix P d'un article augmente de 12%, pour obtenir son nouveau prix :

- ❑ On multiple P par 1,12
- ❑ On ajoute $\frac{12}{100}$ à P
- ❑ On ajoute 0,12P à P

7. Augmenter de 10% puis de 20% revient à :

- ❑ Augmenter de 30%
- ❑ Augmenter de 20%
- ❑ Augmenter de 32%

Exercices

1

En utilisant la calculatrice vérifier que :

a) $\frac{1}{2}\sqrt{0,5623 + 1,271016} - 0,037$ est le carré de 0,8.

b) $\frac{(4,915 + 0,3125)^2 - 4,6125^2}{(1,23)^2} = 4$

2

On donne $A = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ et $B = 2\sqrt{6}$.

Calculer $A^2 + B$; $5 - A^2$; B^2

3

Calculer le plus simplement possible :

$A = \left(\sqrt{2^3 \times 9}\right)^{-1} \times \sqrt{\frac{81 \times 25}{100}}$

4

Calculer $\left(2 - \sqrt{7}\right)^2$ puis en déduire une écriture simplifiée de $\sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$

5

Développer $\left(2 + \sqrt{5}\right)^2$ puis en déduire une écriture simple du $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$

6

Pour tout entier naturel n montrer que l'inverse de $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ est $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. En déduire la valeur exacte de la somme $S = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{100} + \sqrt{101}}$

7

Vérifier à l'aide d'une calculatrice que 1632, 2015 et 2593 sont les longueurs des côtés d'un triangle rectangle.

8

Montrer que le nombre

$$A = \sqrt{43 - 30\sqrt{2}}$$

s'écrit sous la forme $A = a + b\sqrt{2}$, où a et b deux entiers relatifs que l'on déterminera.

9

4,573 est une approximation d'un réel x à 10^{-3} près.

1. Donner l'encadrement correspondant de x.

2. Pouvez vous donner une autre approximation de x. Avec quelle précision ?

3. Donner une approximation par défaut de x. Pouvez vous donner une autre ? Avec quelle précision ?

4. Donner une approximation par excès de x. Pouvez vous donner une autre ? Avec quelle précision ?

10

Un losange a une aire comprise entre $252{,}9\,m^2$ et $253{,}1\,m^2$. Une des deux diagonales du losange mesure exactement 61m.

1. Donner un encadrement de la longueur l de l'autre diagonale.

2. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de l.

11

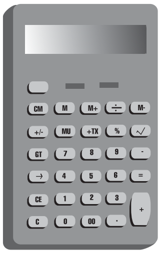
Encadrer le plus précisément possible les nombres suivants :

- $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (volume d'une sphère de rayon R) avec $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ et $1{,}51 < R < 1{,}52$.
- L'aire d'un triangle équilatéral de côté a avec $12 < a < 12{,}1$ et $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ à 10^{-2} près par défaut.

12

Ptolémée, mathématicien grec du II siècle, utilise comme valeur approchée de $\sqrt{3}$ le nombre :

$$a = \frac{103}{60} + \frac{55}{60^2} + \frac{23}{60^3}$$



En utilisant votre calculatrice :

1. Dire si a est une valeur approchée par excès ou par défaut de $\sqrt{3}$.

2. Donner une précision de cette approximation.

13

Compléter le tableau suivant donnant dans un lycée la répartition selon les sections des 1000 élèves de terminales.

Sections	Lettres	Economie et service	Sciences	Technologie et multimédia	Sport
Nombre	400	250	125		75
Pourcentages	40%		12.5	15%	

14

Le tableau ci-dessous indique la répartition des élèves d'une classe terminale suivant le sexe et la matière option.

	Filles	Garçons
Informatique	5	8
Italien	7	5

1. Quel est le pourcentage des garçons dans cette classe ?

2. Quel est le pourcentage des élèves qui étudient l'italien ?

3. Parmi les garçons quel est le pourcentage de ceux qui étudient l'informatique ?

Exercices

15

Une somme de 15 000 D est placée dans une banque au taux de 4,5%.
Quel est le nouveau capital au bout d'un an ?

16

Dans une classe de 30 élèves 21 ont 17 ans 20% ont 18 ans et les autres ont 16 ans.
Cocher la bonne réponse :

- ❑ 3% des élèves ont 16 ans
- ❑ 3 élèves ont 16 ans
- ❑ 75% des élèves ont 17 ans
- ❑ la proportion des élèves ayant 18 ans est $\frac{1}{5}$.

17

a) Quel est le pourcentage de remise au cours de ces soldes ?

b) Dans le même magasin, de combien sera soldé un produit affiché initialement 320 D ?

18

Un village comptait 1450 habitants, en un an sa population a diminué de 2%.
Combien compte-il alors d'habitants ?

19

Une photographie au format 24 x 36 est réduite de 25%.
Quel est le nouveau format ?

20

un rôti de veau de 1,250 Kg ne pèse plus qu' 1,100 Kg après cuisson.

a) Quel est le pourcentage de diminution due à la cuisson ?
b) Quel doit être le poids du rôti pour servir effectivement 1,250 Kg de viande sur la table ?

21

On mélange 6litres de jus de fruit contenant 30% de sucre avec 4litres de jus de fruit contenant 20% de sucre. Quel est le pourcentage du sucre du mélange obtenu ?

22

Dans un groupe d'élèves 40% des élèves ont une mauvaise vue, 70% des élèves ayant une mauvaise vue portent des lunettes, les 30% restants ont des lentilles de contact.
Dans ce groupe on compte 21 paires de lentilles. Combien y-a-t-il d'élèves dans ce groupe ?
Combien d'élèves ont une bonne vue ?

23

Ma facture de téléphone est passée de 96,28 D à 126,45 D. Quel a été le pourcentage d'augmentation ?

24

Un aliment pour bébé contient 75% de légumes, dont 60% de carottes.

a) La part des carottes dans cet aliment est-elle supérieur ou inférieur à la moitié ? justifier par un calcul.
b) Combien faut-il de kilogrammes de carottes pour fabriquer cinq mille pots de 150 g de cet aliment ?
c) Combien faut-il manger de cet aliment pour consommer 300 g de carottes ?

25

Un marchand propose pour les soldes une réduction de 15% à la caisse sur les prix marqués.
Un client achète un pantalon, une veste et une chemise dont les prix marqués sont :
Pantalon 38 D ; veste 72,5 D ; chemise 21 D
Quel prix total va-t-il payer à la caisse ?

26

Un disquaire vend des disques compacts (CD) et des cassettes (K7). Ses références sont soit arabes, soit étrangères. On sait que :

– Les références arabes représentent 35% des articles.
– 70% des références arabes sont des CD.
– 25% des K7 sont étrangères.

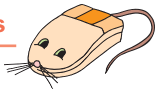
a) Quel pourcentage de CD étrangers possède ce disquaire ?
b) Quel pourcentage de K7 arabes possède ce disquaire ?

27

Au cours d'un référendum, deux questions ont été posées : 65% des personnes ont répondu OUI à la première question, 51% ont répondu OUI à la deuxième question et 45% ont répondu OUI aux deux questions.
100 personnes ont été interrogées dans ce référendum :

a) Combien de personnes ont répondu OUI à au moins une des deux questions ?
b) Combien de personnes ont répondu NON aux deux questions ?

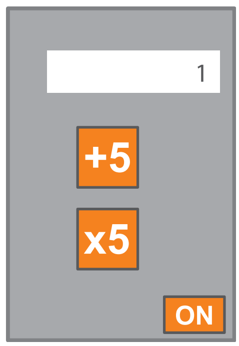
28 A vos souris



Tous les ans, pendant dix ans, le prix d'une voiture, de marque donnée, diminue de 5%.
1) Par quel nombre sont multiplier les prix chaque année.
2) On suppose que le prix initial de la voiture est 12 500 dinars.
Afficher sur une feuille de calcul d'un tableur la liste des prix pendant les dix années.

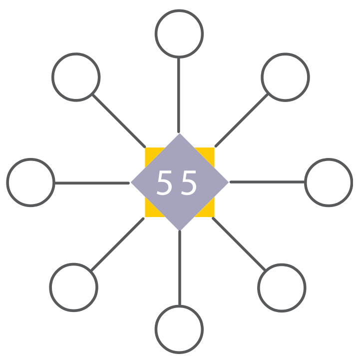
Jeux mathématiques

1



Cette calculatrice n'a que deux touches : + 5 et x 5. Lorsqu'on l'allume, elle affiche 1.
Combien de fois, au minimum, faut-il appuyer sur ses touches pour qu'elle affiche 100 ?

2



Le grand-père Mathias vous demande de remplir les huit cercles disposés autour du nombre 55, par des nombres tous différents, inférieurs à 100, de telle sorte que les produits de trois nombres alignés soient tous égaux à 1980.
Quelle est la somme des huit nombres entourant 55 ?

«Fédération française des jeux mathématiques»

3

On a effacé un chiffre dans cette division. Lequel ?

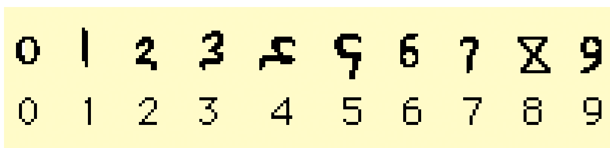
1 □ 30	3
0 3	41 □
00	

4

Une de ces nombres est différent des autres lequel ?

- ❑ 112
- ❑ 0,00112 x 100000
- ❑ 11,2 x 0,1
- ❑ 1,12 x 100
- ❑ 112000 x 0,001

Chiffre arabe



Les chiffres arabes, qui furent utilisés en France puis dans toute l'Europe et enfin dans le monde entier, proviennent d'inde et ont étés apportés en Europe dès la fin du X^{e} siècle grâce à l'enseignement du calcul, tel que pratiqué par les Arabes.

L'utilisation des chiffres dits arabes (alors que les arabes, les nomment «chiffres hindis» n'a vraiment commencé à se généraliser qu'au XII^{e} siècle. Leur tracé définitif est attesté dès le XV^{e} siècle.

Le mot «chiffre», utilisé d'abord pour signifier «zéro», vient de l'arabe « صفر » qui signifie le vide. le 0 est apparu au V^{e} siècle en Inde.

Article de Wikipédia, l'encyclopédie libre.

«Ce qui est affirmé sans preuve peut être nié sans preuve».

[Euclide d'Alexandrie[

SUITES ARITHMÉTIQUES
SUITES GÉOMÉTRIQUES

Suites arithmétiques

ACTIVITÉS

COURS

Suites géométriques

ACTIVITÉS

COURS

EXERCICES

S'auto-évaluer
Exercices
Jeux mathématiques

POINT D'HISTOIRE

I - Suite arithmétique

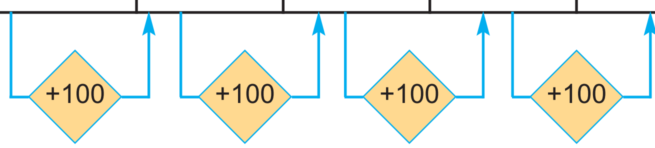
Activité 1

Dans u_n, « n est l'indice »
n est entier naturel.

La production d'une entreprise pour l'année 2000 est de 5000 unités.
L'entreprise prévoit une augmentation de production de 100 unités par an.

1. Compléter le tableau suivant :

Année	2000	2001	2002	2003	2004
Production	5000				



Les nombres u_0, u_1, u_2, u_3, … sont les termes d'une suite arithmétique de 1^{er} terme u_0 et de raison r = 100

Si on note u_0 la production en 2000, u_1 la production en 2001, … , u_4 la production en 2004.

2. Compléter :

a) 5600 = u... ; 5200 = u… ; 6200 = u…
b) u_5 =… ; u_{10} =… ; u_{12} =…

Notation : Une suite dont les termes sont u_0, u_1, u_2,…,u_n ,…, est généralement notée **(u_n)**

Activité 2

u_n s'appelle le terme de rang n de la suite (u_n)

On définit la suite (u_n) par : $u_n = 10 - 2n$ pour tout entier n.

1. Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n							

(u_n) est une suite arithmétique de 1^{er} terme u_0 = 10 et de raison – 2

2. Calculer $u_1 - u_0$, $u_2 - u_1$, $u_3 - u_2$, $u_4 - u_3$ et $u_5 - u_4$. Que constatez-vous ?

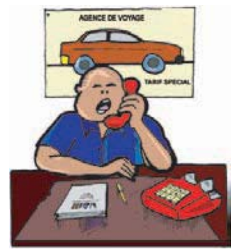
3. a) Montrer que $u_{n+1} = 8 - 2n$

b) Déduire que $u_{n+1} - u_n = -2$

4. Représenter dans un repère orthogonal les points de coordonnées (n, u_n) pour n = 0, n = 1, … , n = 6
Que remarquez-vous ?

Activités

Activité 3



Une agence de voyage propose à ses clients un tarif spécial de location de voitures :

- 80 D pour l'abonnement (on pose $p_0 = 80$)
- 45 D par jour de location à partir du second jour.

1. Quel est le montant p_1 en dinars payé pour une journée de location ?, le montant p_2 en dinars pour deux jours de location ?

2. On désigne par p_n le montant en dinars payé après n jours, avec $n \geq 1$

a) Déterminer p_3

b) Calculer $p_1 - p_0$; $p_2 - p_1$; $p_3 - p_2$

c) Conjecturer pour $p_{n+1} - p_n$.

d) Compléter par un entier :

$p_1 = p_0 + 1x45$
$p_2 = p_0 + \ldots x45$
$p_3 = p_0 + \ldots x45$
$p_4 = p_0 + \ldots x45$
$p_7 = p_0 + \ldots x45$
$p_{10} = p_0 + \ldots x45$

D'une façon générale :

$p_n = p_0 + \ldots x45$

> **Tu peux dresser une liste des valeurs p_i à l'aide de ta calculatrice, pour cela :**
>
> **Taper 80 dans ta calculatrice puis la touche $\boxed{=}$**
>
> **taper $\boxed{+}$ 45 puis $\boxed{=}$: p_1 apparaît**
>
> **taper $\boxed{=}$: p_2 apparaît**
>
> **taper $\boxed{=}$: p_3 apparaît etc…**
>
> **L'opérateur « ajouter 45 » se répète de manière automatique mais on doit noter chaque fois la valeur de n.**

3. Dans un repère du plan après avoir choisi convenablement les unités sur les deux axes, placer les points de coordonnées (n, p_n) de $n = 0$ jusqu'à $n = 6$.

Montrer que ces points sont situés sur la droite d'équation $y = 80 + 45x$.

Savoir

- Une suite arithmétique est une suite de nombres tels que chacun de ses termes autres que le premier, s'obtient en ajoutant au terme précédent un nombre constant r appelé raison de la suite. Généralement les termes de la suite sont notés u_0, u_1, u_2, $\ldots u_n, \ldots$
- Le terme u_{n+1} est égal au terme précédent u_n augmenté de la raison r.

$$u_{n+1} = u_n + r$$

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 = u_0 + r \xrightarrow{+r} u_2 = u_0 + 2r \ \ldots .$$

- Pour une suite arithmétique de raison r le terme général est $u_n = u_0 + nr$.
- Dans un repère du plan les points de coordonnées (n, u_n) son alignés.

Exercez-vous

1

Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison (-4), Calculer u_{90}.

2

On considère la suite (v_n) des entiers positifs impairs. Calculer v_{15}.
Comment s'écrit le nième nombre impair ?

Activité 4

Si u_p et u_q sont deux termes d'une suite arithmétique de raison r alors
$\mathbf{u_p = u_q + (p-q)r}$.
En particulier :
$\mathbf{u_p = u_1 + (p-1)r}$.

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -1$ et de raison $r = \frac{1}{2}$

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

2. Vérifier que $u_2 = u_1 + r$; $u_3 = u_2 + r = u_1 + 2r$; $u_4 = u_1 + 3r$; $u_5 = u_2 + 3r$.

3. Soit p et q deux entiers.

Calculer u_p en fonction de p et u_q en fonction de q.
Vérifier que $u_p = u_q + (p-q)r$.

Exercez-vous

1

Trouver la raison de la suite arithmétique (u_n) de premier terme 3 et de second terme 8.
Ecrire u_n en fonction de n puis calculer u_{10}.

2

Trouver la raison de la suite arithmétique (v_n) telle que $v_3 = 45$ et $v_7 = 57$.
Calculer le premier terme v_0 et le quarantième terme.

Activité 5

u_{n-1}, u_n et u_{n+1} sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. u_n est la moyenne arithmétique des termes u_{n-1}et u_{n+1}
Dans une suite arithmétique chaque terme (excepté le premier) est la moyenne arithmétique des deux termes qui l'encadrent.

Voici le début de la liste des nombres entiers multiples de 3 à partir de 3 :
$u_0 = 3$, $u_1 = 6$, $u_2 = 9$, $u_3 = 12$…

1. Vérifier que cette liste constitue une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 3.
Déduire que pour tout n de IN on a $u_n = 3 + 3n$

2. Comparer :

$\dfrac{u_0 + u_2}{2}$ et u_1

$\dfrac{u_1 + u_3}{2}$ et u_2

$\dfrac{u_2 + u_4}{2}$ et u_3

Comparer en général :

$\dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$ et u_n

Exercez-vous

1

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 5$ et $u_4 = 11$, on note r la raison de cette suite.

a) Calculer u_3

b) Déterminer alors r

c) Calculer u_1 puis u_0

d) Déterminer u_n à l'aide de n.

2

Une suite arithmétique (u_n) est telle que $u_5 + u_6 + u_7 = 15$ et $u_9 = 20$

a) Calculer u_6

b) Calculer la raison et le premier terme u_0.

3

Mon âge et ceux de mes deux frères sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 3. La somme de nos trois âges est égale à 42 ans.
Quel est mon âge sachant que je suis le plus jeune ?

Activité 6

On se propose de calculer la somme
$S = 1+2+3+\ldots+n$.
Pour $n=3$ on a $S=1+2+3$.

1. Compléter les calculs suivants :

S	**=**	**1**	**+**	**2**	**+**	**3**
+		**+**		**+**		**+**
S	**=**	**3**	**+**	**2**	**+**	**1**

2xS	**=**		**+**		**+**	

D'où $S = \dfrac{\ldots \times \ldots}{2}$

2. Etablir une disposition semblable pour $n=4$ et déduire que

$S = \dfrac{4 \times 5}{2}$

3. Pour n quelconque, compléter les calculs suivants

S	**=**	1	+	2	+	3	+	**...**	**+**	**n-2**	**n-1**	**n**
+		+		+		+		**+**		**+**	**+**	**+**
S	**=**	n	**+**	n-1	**+**	**n-2**	+	**...**	**+**	**3**	**2**	**1**

2xS	**=**		+		+		+	**...**	**+**			

Combien de fois a-t-on **n+1** dans l'expression de 2S ?

Déduire que $S = \dfrac{n \times (n+1)}{2}$

$1 = 2 + 3 + \ldots + n$

$= \dfrac{n(n+1)}{2}$

Activité 7

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r ; soit

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

1. Compléter :

$S = u_0 + (u_0 + 1\text{x}r) + (u_0 + \ldots\text{x}r) + \ldots + (u_0 + \ldots\text{x}r)$

$= (u_0 + u_0 + u_0 + \ldots + u_0) + r\,(1 + \ldots + \ldots + \ldots)$

2. Dans l'écriture précédente combien a-t-on de termes u_0 ?

3. Montrer alors que $S = (n+1)u_0 + r\,\dfrac{n \times (n+1)}{2}$

$= (n+1)\left(u_0 + r\,\dfrac{n}{2}\right)$

4. En déduire que $S = (n+1)\left(\dfrac{u_0 + u_n}{2}\right)$

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de 1er terme u_0 et de raison r est égale à :

$(n+1)\left(\dfrac{u_0 + u_n}{2}\right)$

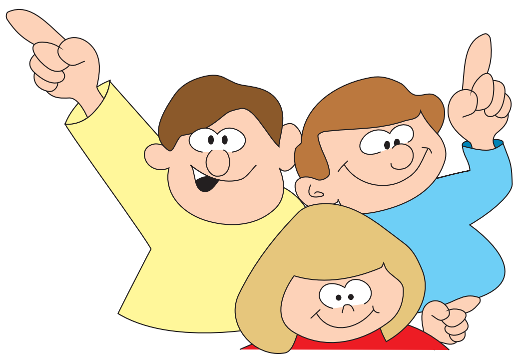
Exercez-vous

1

a) Calculer la somme S = 6 + 12 + … + 180 des 30 premiers termes d'une suite arithmétique.
b) Calculer alors la somme des trente premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 14 et raison 6.

2

Une entreprise fabrique 100 objets par semaine, vendus à 15 D la pièce.
Une réorganisation des ateliers permet à cette entreprise de fabriquer 12 objets de plus chaque semaine.
Comme le nombre des objets sur le marché augmente, le prix de vente d'un objet diminue de 0,15 D par semaine.
a) Combien d'objets seront-ils fabriqués la nième semaine ?
b) Quel sera alors le prix d'un objet la nième semaine ? Quel sera le prix de vente total la dixième semaine ?.



Réfléchir avec l'ordinateur

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 12.
On se propose d'utiliser **un tableur-grapheur**, qui affiche les termes de la suite de u_0 jusqu'à u_{20}, et qui représente graphiquement cette suite.

1. Utiliser la colonne A comme colonne des indices ;
- Dans la cellule A1 taper le titre de la colonne « indice n » ;
- Taper 0 et 1 dans les cellules A2 et A3.
- Compléter la colonne A par un copier-glisser des deux premières cellules.

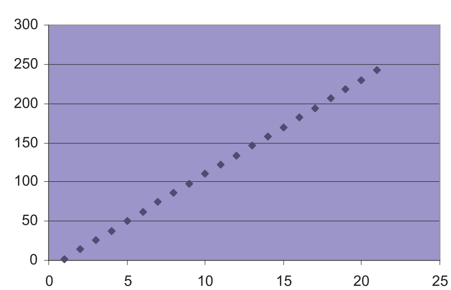
2. Utiliser la colonne B pour l'affichage des termes successifs de la suite
- Ecrire en B1 le titre de la colonne « U_n » ;
- Taper 2 dans la cellule B2, qui est u_0.
- Calculer le terme u_1 situé en B3, taper la formule : **= B2+12**
- Compléter alors la colonne B en recopiant vers le bas cette formule.
- Calculer la somme des 20 termes avec la fonction =SOMME(B2 ; B21)

	A	B
1	**indice n**	**Un**
2	0	2
3	1	14
4	2	26
5	3	38
6	4	50
7	5	62
8	6	74
9	7	86
10	8	98
11	9	110
12	10	122
13	11	134
14	12	146
15	13	158
16	14	170
17	15	182
18	16	194
19	17	206
20	18	218
21	19	230
22	20	242

3. Sélectionner la colonne B.
- Utiliser l'assistant graphique
- Choisir le type « nuage de points »

Les grapheurs :

Pour représenter par exemple par un nuage de points le tableau ci-dessus :
- Sélectionner avec la souris la plage B2 : B22
- Choisir **Insertion/Graphique** pour Excel.
- Choisir le type de graphique (ici nuage de points).



L'essentiel du cours

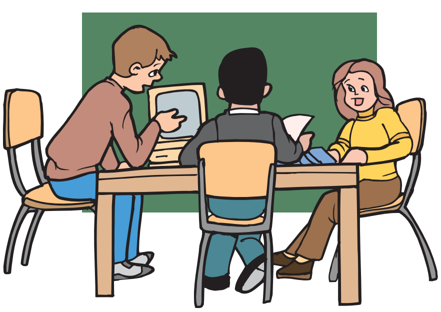
(u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

- Le terme u_n de rang n s'écrit : $\mathbf{u_n = u_0 + nr}$
- Si u_p et u_q sont deux termes de la suite (u_n) alors :
  $\mathbf{u_p = u_q + (p - q)\,r}$
- $u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$
- $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = n\left(\dfrac{u_0 + u_{n-1}}{2}\right)$

En général : soit $S' = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_q$

On a :

$$S' = \text{nombre de termes de la somme} \times \left(\frac{\text{premier terme de la somme} + \text{dernier terme de la somme}}{2}\right)$$



II - Suite géométrique

Activité 1

> Un capital est placé à intérêts composés au taux de **6%**, signifie qu'au début de chaque année, on ajoute à ce capital un intérêt égal à **6%** du capital de la fin de l'année précédente.

Une automobile d'une marque donnée coûte 8000 D au 1er janvier 2005, son prix augmente régulièrement de 2% au 1er janvier de chaque année.
Une personne désire acheter une automobile de cette marque, mais il ne dispose que de 6000 D au 1er janvier 2005. Ne voulant pas prendre de crédit, cette personne décide de placer le capital qu'il dispose dans un organisme financier qui lui assure un intérêt composé au taux de 6% chaque premier janvier de l'année suivante.
On se propose de calculer en quelle année, cette personne pourra acheter la voiture dont-il rêve.
On note C_0 le capital initial (6000 D), C_1 le capital (capital initial et intérêts) dont elle dispose au bout d'un an, C_2 : le capital dont elle dispose au bout de deux ans ; … ; C_n : le capital dont elle dispose au bout de n ans.

1. Compléter le tableau suivant :

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4

> On dit que la suite (C_n) est une suite géométrique de raison 1,06 et de premier terme 6000.

2. Indiquer la relation permettant de calculer C_5 à partir de C_4

$$C_5 = \ldots C_4$$

De façon générale, indiquer la relation permettant de calculer C_{n+1} à partir de C_n.

$$C_{n+1} = \ldots C_n$$

3. Compléter par un entier :

$C_2 = (1{,}06)^{\cdots} C_0$

$C_3 = (1{,}06)^{\cdots} C_0$

$C_4 = (1{,}06)^{\cdots} C_0$

De façon générale conjecturer que **$C_n = (1{,}06)^{\cdots} C_0$**

4. Représenter dans le plan muni d'un repère convenablement choisi, les points (n, C_n) pour n allant de 1 à 12.

5. Pour n dans IN, on note u_n le prix de l'automobile au 1er janvier de l'an 2005 +n.

- Exprimer u_n en fonction de n.
- La personne pourra-t-il acheter la voiture après 5 ans, après 8 ans ?

Activités

Activité 2

Les nombres p_n forment une suite géométrique de 1^{er} terme 40000 et de raison 0,95

La population d'une ville diminue de 5% par an.
Le 1^{er} janvier 2000, elle était de 40000 habitants.

1. Quelle sera cette population p_1 au bout d'une année ?, au bout de deux ans ?.
2. Quelle sera aux environs cette population au bout de 5 années.
3. A partir de combien d'années cette population aura t-elle diminué de plus que de la moitié ?

Savoir

- Une suite géométrique est une suite de nombres tels que chacun de ses termes autres que le premier, s'obtient en multipliant le terme précédent par un nombre constant **q** appelé raison de la suite. Généralement les termes de la suite sont notés $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$
- Le terme u_n est égal au précédent u_{n-1} multiplié par la raison **q**.

$$u_n = qu_{n-1}$$

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 = qu_0 \xrightarrow{\times q} u_2 = q^2u_0 \ \ldots$$

Pour une suite géométrique de raison q, le terme général est $u_n = q^n u_0$

Remarque :

- (u_n) suite géométrique de raison $q \neq 0$

$$u_{n-1} \underset{\times \frac{1}{q}}{\overset{\times q}{\rightleftarrows}} u_n \underset{\times \frac{1}{q}}{\overset{\times q}{\rightleftarrows}} u_{n+1}$$

$$u_n^2 = u_{n-1} \times u_{n+1}$$

u_{n-1}, u_n et u_{n+1} sont des termes consécutifs d'une suite géométrique u_n est la moyenne géométrique des termes u_{n-1} et u_{n+1}.

Exercez-vous

1

1. Trouver la raison de la suite géométrique (u_n) de 1^{er} terme $u_0 = 9$ et de 2^e terme $u_1 = -3$
2. Ecrire son terme général u_n en fonction de n et calculer u_{12}.

2

Quelles sont les raisons possibles d'une suite géométrique (v_n) telle que $v_2 = 3$ et $v_6 = 48$?
Calculer le dixième terme dans chacun des cas.

3

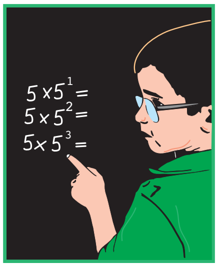
a) 4 ; 1 et 0,25 sont ils trois termes consécutifs d'une suite géométrique ?
b) Si oui, calculer les deux termes suivants.

Activité 3

Cette suite est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 5.

Voici le début de la liste des entiers puissances de 5 : 5^0, 5^1, 5^2, …

Le premier terme de la liste est $5^0 = 1$, on le note u_0.



Et on a :

$u_1 = 5^1 = 5u_0$

$u_2 = 5^2 = 5 \times 5^1 = 5u_1$

$u_3 = 5^3 = 5 \times 5^2 = 5u_2$

….

$u_n = 5^n = 5 \times 5^{n-1} = 5u_{n-1}$

1. Compléter : $u_{\dots} = 125$

$u_{\dots} = 625$

$u_{\dots} = 3125$

2. Compléter le tableau suivant

n	0	1	2	3	4	5
u_n						

Représenter dans un repère orthogonal les points de coordonnées (n, u_n), n allant de 0 à 5.

Ces points sont-ils alignés ?

3. On se propose de calculer la somme des huit premières puissances de 5 :

$S = 5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^7$

Vérifier à l'aide de la calculatrice que S = 97656

Voici une autre méthode on a :

$S = 5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots + 5^7$

$5S = 5^1 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^8$

En retranchant membre à membre S et 5S vérifier que :

$S - 5S = 1 - 5^8$

En déduire que $S = \dfrac{1 - 5^8}{1 - 5} = 97656$

Savoir

❖ La somme S des n premiers termes d'une suite géométrique de 1^{er} terme u_0 et de raison q est :

Si $q \neq 1$

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = u_0 \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$S = \text{Premier terme de la somme} \times \left(\frac{1 - (\text{raison})^{\text{nombre de termes de la somme}}}{1 - \text{raison}} \right)$$

Si $q = 1$

$S = nu_0$

Exercez-vous

1

Les sommes présentées ci-dessous sont les sommes des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Calculer :

$S = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{10}$

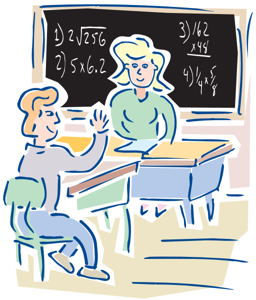
$T = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^9}$

$U = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots (-1)^{2005}$

2

Montrer que

$\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + 4 + \ldots + (\sqrt{2})^{20} = 1023\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)$



(u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison **q**.

❖ Le terme u_n s'écrit : $\mathbf{u_n = u_0 \times q^n}$.

❖ Si u_p et u_m sont deux termes de la suite (u_n) alors :
$\mathbf{u_p = u_m \times q^{p-m}}$.

❖ $u_n^2 = u_{n-1} \times u_{n+1}$.

❖ La somme S des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est :

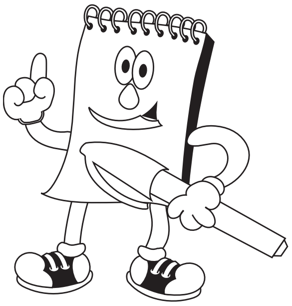
Si q ≠ 1

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \, \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$S = \text{Premier terme de la somme} \times \left(\frac{1 - (\text{raison})^{\text{nombre de termes de la somme}}}{1 - \text{raison}} \right)$$

Si q = 1

$S = (n+1)\, u_0$



TESTS D'AUTO-EVALUATION

Répondre par vrai ou faux et justifier la réponse.

1. 1, –1, –3, –5, … sont quatre termes d'une suite arithmétique

2. La suite (u_n) de terme général $u_n = 3n + 2$

- ❑ est-une suite arithmétique
- ❑ La raison de cette suite est 3
- ❑ $U_{n+1} = 3n + 5$

3. Soit la suite arithmétique (u_n) de 1er terme $u_0 = 2$ et de raison 3 on a :

- ❑ $u_n = 2 + 3n$
- ❑ $u_n = 3n + 2$

4. La somme des entiers naturels inférieurs ou égale à 100 est :

- ❑ 5050
- ❑ 5100

5. 1, 2, 4, 8,16,…sont les premiers termes d'une suite géométrique

6. Soit (u_n) la suite géométrique de 1er terme $u_0 = 3$ et de raison $\frac{1}{2}$ on a :

- ❑ $u_n = \frac{3}{2^n}$
- ❑ $u_n = \frac{3^n}{2}$

7. La somme des premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 3 et de raison –2 est :

- ❑ 1023
- ❑ –1023

1

Quel est le nombre de termes de chacune des suites ci-dessous :

a) 5,10, 15, …, 55.
b) 0, 2, …,2n.
c) 2, 2+k, 2+2k, …, 2+30k.
d) 1, 3, 9, 27, …, 591441.
e) 22, 24, 26, …, 224.

2

(u_n) est une suite arithmétique de raison r, et de 1er terme u_1.
$u_1 = 5$ et $r = 3$, calculer le 20ème terme.

3

Les deux premiers termes d'une suite arithmétique de 1er terme u_0 sont 2 et 7. Calculer son trentième terme puis son quarante troisième terme.

4

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

a) On sait que $u_2 = 15$ et $u_5 = 48$.
Calculer r et son vingtième terme.

b) $u_4 = 14$, $u_6 = 4$. Calculer u_0, r et u_{20}.

5

Une voiture neuve vaut 18000 D, on estime que chaque année, sa valeur diminue de 1200 D, au bout de combien d'années sa valeur sera 9600 D ?

6

Trouver la raison de la suite arithmétique (v_n) telle que $v_2 = 14$ et $v_8 = 50$.
Calculer le premier terme v_0 et le cinquantième terme.

7

Trouver la raison de la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de second terme 5.
Ecrire u_n en fonction de n puis calculer u_7.

8

On a $u_n = 3n - \frac{1}{2}$, les nombres u_n sont-ils les termes d'une suite arithmétique ?
Si oui la préciser (raison et premier terme)

9

a) Calculer la somme $S = 4 + 8 + 12 + \ldots + 96$

b) Calculer alors la somme des vingt quatre premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 6 et de raison 4.

Exercices

10

Calculer la somme des 2005 premiers entiers : 1+2+3+…+2004

En déduire la somme : $1-2^2+3^2-4^2+\ldots-2004^2$

Remarque : $1-2^2=(-1)(1+2)$; $3^2-4^2=(-1)(3+4)$;…

11

Un parking de voitures reçoit le premier jour 180 voitures. On prévoit une augmentation du passage dans le parking de 30 voitures supplémentaires tous les jours.
Déterminer la somme totale de véhicules passés dans le parking pendant 6 jours.

12

Ahmed achète une plante de 0,60 m. Le vendeur lui assure qu'elle grandira de 0,3 m tous les ans.
Au bout de combien d'années cette plante dépassera t-elle la hauteur sous plafond de son logement qui est 2,4 m.

13

Azer met dans son tirelire 1D au mois de janvier, 2D au mois de février, 3D au mois de mars et ainsi de suite. Quelle somme aura-t-il dans son tirelire dans 3 ans ?

14

La suite (u_n) de terme général u_n est elle arithmétique ?

1. $u_n = 3n-1$

2. $u_n = n^2-2$

3. $u_n = \frac{2}{n}$

4. $u_n = -(0{,}6)n+1$

15

On définit une suite (v_n) de la manière suivante :

$v_0 = 1$

$v_{n+1} = v_n+3$, pour n dans IN

a) Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4

b) Représenter graphiquement ces quatre termes et vérifier que les points $A(1,v_1)$, $B(2,v_2)$, $C(3,v_3)$ et $D(4,v_4)$ sont situés sur la droite D dont une équation est : $y = x+3$

c) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique dont-on précisera la raison et le premier terme.

16

1. 3 ; 0,9 et 0,27 sont ils trois termes consécutifs d'une suite géométrique ?
2. Si oui, calculer les deux termes suivants.

17

Quelle est la raison d'une suite géométrique (v_n) telle que $v_4 = 18$ et $v_7 = -144$?

18

1. Trouver la raison de la suite géométrique (u_n) de 1er terme $u_0 = 3$ et de 2^e terme $u_1 = 6$
2. Ecrire son terme général u_n en fonction de n et calculer u_6.

19

La suite (u_n) de terme général u_n est elle géométrique ?

a) $u_n = 3^n$
b) $u_n = (-1)^n$
c) $u_n = (-5)^{n+1}$
c) $u_n = n^2$
d) $u_n = 2^{2n}$

20

Calculer

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots \frac{1}{2^{2004}}$$

21

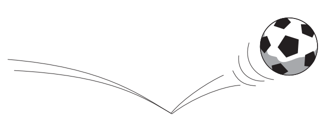
Calculer la somme des 10 premiers termes d'une suite géométrique de 1er terme 4 et de raison 2.

22

Calculer la somme des puissances de 2 comprises entre 3 et 2500.

23

Calculer la somme des entiers multiples de 7 qui sont plus grands que 90 et plus petits que 352.



24

Une balle en caoutchouc est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur de 2 mètres au dessus du sol. Le choc n'étant pas parfaitement élastique, la balle rebondit jusqu' à une hauteur de 1,60 mètre et ainsi de suite, en atteignant à chaque rebond les $\frac{4}{5}$ de la hauteur du rebond précédent. On désigne par h_n la hauteur maximale, exprimée en mètre, atteinte par la balle après le nième rebond. ($h_0 = 2$).

a) Calculer h_1, h_2, h_3.
b) Exprimer h_{n+1} en fonction de h_n. Quelle est la nature de la suite (h_n) ?
c) Exprimer h_n en fonction de n.

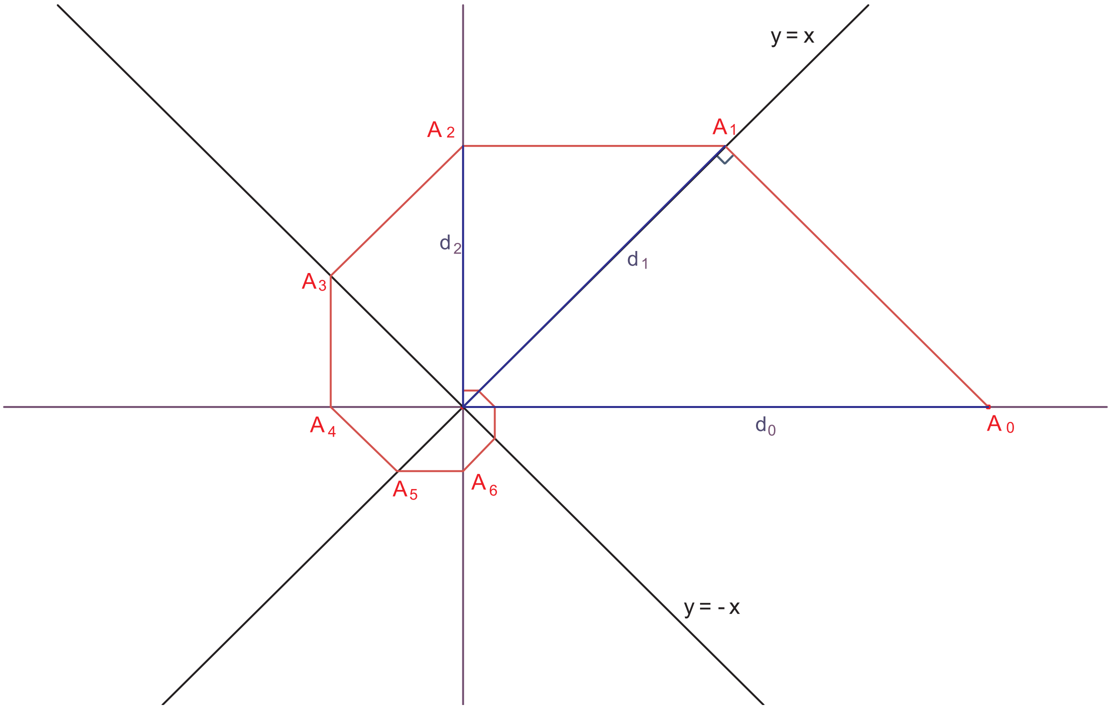
25

Pour une suite (v_n) on a : $v_1 = 3$ et $v_2 = -6$.
Dans chacun des cas suivants :
a) (v_n) suite arithmétique.
b) (v_n) suite géométrique.
Calculer v_0
Déterminer v_n en fonction de n
Calculer la somme des 30 premiers termes de cette suite.

26

a) Si un capital P est placé à intérêts simples aux taux annuel de 4%, chaque année l'intérêt versé est égal à 0,04xP. On désigne par P_n la somme touchée au bout de n années. Calculer P_n en fonction de n et P.
b) Le même capital P est placée à intérêts composés au taux annuel de 3,5%. On désigne par Q_n la somme touchée au bout de n années. Exprimer Q_n en fonctions de P et n.
c) Vérifier qu'à partir de la neuvième année, le second placement est plus intéressant que le premier.

27



1. Calculer d_1, d_2 et d_3 en fonction de d_1
2. Calculer d_n en fonction de d_{n-1}
3. Exprimer d_n en fonction de d_0 et n.

28

Au 1er janvier 2005, la population d'une ville est de 50.000 habitants elle augmente de 5% par an. On prend p_0 =50.000 et on désigne par p_n la population n années après.

1. Calculer p_1, p_2.

2. Quelle sera aux environs la population p_3 (arrondir à l'entier le plus proche).

3. Exprimer p_n en fonction de n et p_0.

4. A partir de combien d'années cette population aura-t-elle dépassé le double ?

29

On définit une suite (v_n) de la manière suivante :

$v_0 = 1$

$v_{n+1} = 3v_n$; pour n dans IN

1. Calculer v_1 ,v_2, v_3, v_4, v_5.

2. Représenter graphiquement ces cinq termes.

3. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

30

Une personne loue une maison à partir du 1er janvier 2005. Elle s'engage à occuper la maison pendant neuf années complètes, le loyer annuel initial est de 2400 D. Le locataire a le choix entre deux formules de contrat.

Contrat numéro 1
Le locataire accepte une augmentation annuelle de 5% du loyer par rapport à l'année précédente.

Contrat numéro 2
Le locataire accepte une augmentation annuelle forfaitaire de 150 D à chaque année.

1. Pour le premier contrat
  a) Calculer le loyer payé lors de la deuxième année.
  b) Calculer le loyer payé lors de la 9ème année.

2. pour le deuxième contrat
  a) Calculer le loyer payé lors de la deuxième année.
  b) Calculer le loyer payé lors de la 9ème année.

3. Calculer pour chaque cas, la somme payée à l'issue des neuf années de contrat. Quel est alors le contrat le plus avantageux pour le locataire ?

31

On suppose qu'un pin d'un âge compris entre 15 et 30 ans a une croissance régulière annuelle de 40 cm de hauteur. On note h_n la hauteur en mètres du pin à l'âge n (pour n tel que $15 \leq n \leq 30$)

a) En supposant que $h_{15} = 22$ m. Calculer h_{16} et h_{17}.

b) Montrer que la suite (h_n) est une suite arithmétique.

c) On suppose qu'un pin de 15 ans a une hauteur de 17 m. Quelle sera sa hauteur lorsqu'il aura 30 ans ?

d) On suppose qu'un pin de 28 ans a une hauteur de 28 m. Quelle étant sa hauteur lorsqu'il avait 18 ans.

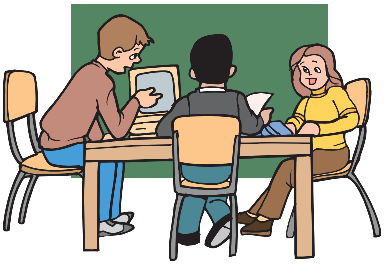
e) Représenter graphiquement pour n compris entre 15 et 30, la hauteur d'un pin qui mesure 20 m à 15 ans.

32

Les rayons cosmiques produisent continuellement dans l'atmosphère du carbone 14, qui est un élément radioactif. Durant leur vie, les tissus animaux et végétaux ont la même proportion de carbone 14 que l'atmosphère. Cette proportion de carbone 14 décroît de 1,24% en 100 ans après la mort du tissu.

1. Déterminer les pourcentages de la proportion initiale de carbone 14 contenu dans le tissu au bout de 1000 ans, 2000 ans, 10 000 ans.

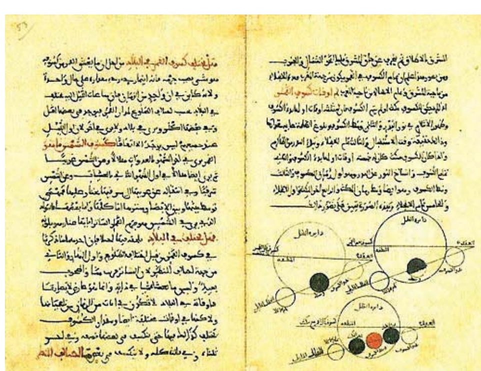
2. Un fossile ne contient plus que 20% de ce qu'il devait contenir en carbone 14. Donner une estimation de son âge.



عبد الرّحمان ابن خلدون

.... أن الأعداد إذا توالت متفاضلة بعدد واحد فإن جمع الطّرفين منها مساو لجمع كلّ عددين بعدهما من الطّرفين بعد واحد ومثل ضعف الواسطة إذا عدة تلك الأعداد فردا مثل الأفراد على تواليها والأزواج على تواليها ومثل أنّ الأعداد إذا توالت على نسبة واحدة يكون أوالها نصف ثانيها وثانيها نصف ثالثها إلخ أو يكون أوّلها ثلث ثانيهما وثانيهما ثلث ثالثها إلخ فإن ضرب الطّرفين أحدهما في الآخر كضرب كلّ عددين بعدهما من الطّرف بعد واحد ومثل مربّع الواسطة إذا كانت العدّة فردا وذلك مثل أعداد زوج الزّوج المتوالية من اثنين فأربعة فثمانية فستّة عشر....

مقدّمة ابن خلدون – الفصل الرّابع عشر (في العلوم العدديّة)



2 ACTIVITÉS ALGÉBRIQUES

«La mathématique est une science dangeureuse : elle dévoile les supercheries et les erreurs de calcul».

[Galilé]

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

VÉRIFIER VOS ACQUIS

Equations du premier degré à une inconnue
Inéquations du premier degré à une inconnue

ACTIVITÉS

Equations de type $(ax+b)(cx+d)=0$

Equations de type $\frac{ax+b}{cx+d} = 0$

ACTIVITÉS

COURS

Signe de $ax+b$
Inéquations de type $(ax+b)(cx+d) \leq 0$

Inéquations de type $\frac{ax+b}{cx+d} \leq 0$

ACTIVITÉS

COURS

Système linéaire de deux équations à deux inconnues.

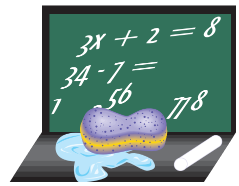
EXERCICES

S'auto-évaluer
Exercices
Informatique : A vos souris
Jeux mathématiques

POINT D'HISTOIRE

Vérifier vos acquis

Equation du premier degré à une inconnue.



1

- Le nombre –3 est-t-il solution de l'une des équations : $x-3=0$ ou $3x=0$ ou $2x+6=0$?
- Le nombre –4 est-t-il solution de l'équation :
  $(x-3)\,(x+4)=0$?
- Le nombre $\frac{1}{2}$ est-t-il solution de l'équation :
  $(x-\frac{1}{2})\,(x+1)=2x-1$?

2

Recopie et complète le tableau :

Equation	Etape de la résolution	Conclusion
$x+5=0$	x = ...	Pour x =… x+5 = … … est la solution de l'équation x+5=0.
$5x=2$	x = ...	Pour x =… 5x = … … est la solution de l'équation 5x=2.
$2x-4=10$	2x = … x = …	Pour x =… 2x–4 = … … est la solution de l'équation 2x–4=10.

3

Maram a 25 dinars. Après avoir acheté un nombre de cahiers à 2 dinars le cahier, elle lui reste un dinar.
Combien a-t-elle acheté de cahiers ?

4

Dans une classe de 2ème lettres, un groupe de 4 élèves a obtenu les notes suivantes dans un devoir de mathématiques : 6, 7, 11 et 10.

a) Calculer la moyenne de ces quatre notes.

b) On associe à ce groupe d'élèves deux autres élèves de la même classe qui ont obtenu la même note 13 dans ce devoir.
Calculer, à l' arrondie au dixième, la moyenne en mathématique des six notes.

c) On se demande si on peut associer à ce groupe de ces quatre élèves de départ, deux autres élèves ayant la même note x en mathématique pour que la moyenne des six notes soit égal à 10 ?

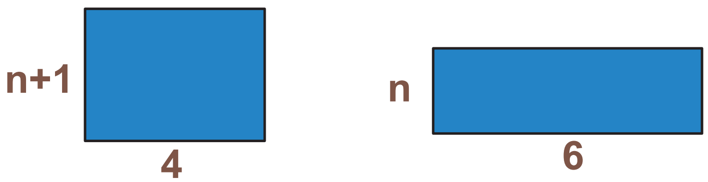
- Mettre ce problème en équation
- Résoudre ce problème
- Conclure.

5

Le quart d'un nombre plus trois est égal au sixième de ce nombre plus cinq. De quel nombre s'agit-il ?

6

Les deux rectangles suivants ont la même aire.



Quelle est la valeur de n ?

7

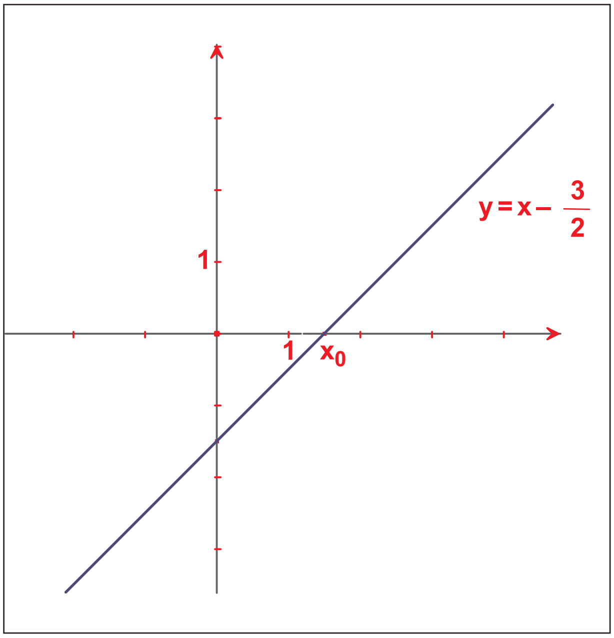
37500 spectateurs représentent 80 % de la capacité d'un stade olympique. Quelle est la capacité de ce stade ?

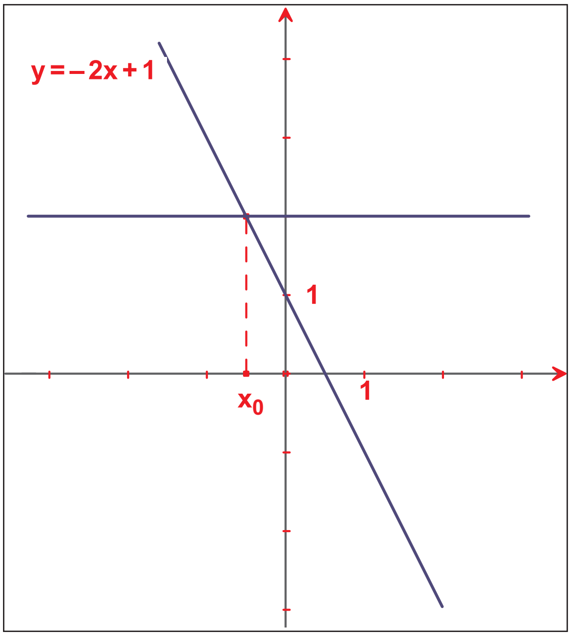
8

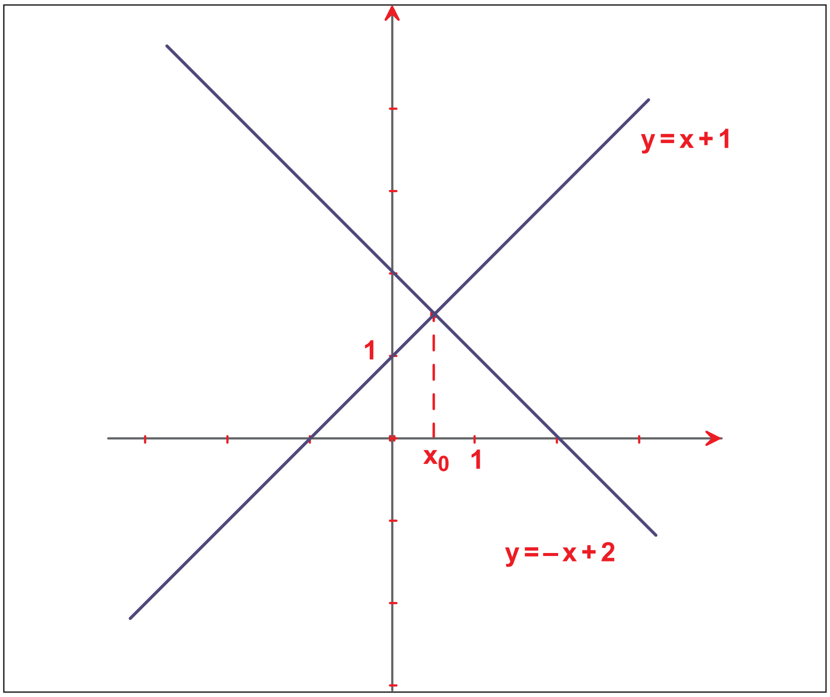
Dans chaque cas de figure :

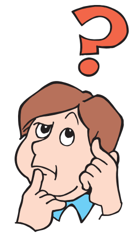
a) Déterminer graphiquement le réel x_0.

b) Retrouver par le calcul la valeur de x_0.









Exercice résolu :

Elaa a acheté deux CD de jeux éducatifs au même prix ; il lui reste 12 dinars.
Elle constate que si chaque CD avait coûté un dinar de moins, elle aurait pu en acheter exactement trois.
Quel est le prix d'un CD ?

Solution :

1. On note x le prix en dinars d'un CD

2. Lorsque Elaa achète deux CD, elle dépense 2x dinars ; il lui reste 12 dinars c'est donc qu'elle possédait 2x+12 dinars, si elle achetait 3 CD à (x–1) dinars, elle dépenserait 3(x–1) dinars, il ne reste rien, c'est donc qu'elle possédait 3(x–1) dinars.
On obtient l'équation $3(x-1) = 2x+12$

3. $3x - 3 = 2x+12$
$3x - 2x = 12+3$
$x = 15$

4. Chaque CD acheté par Elaa coûte 15 dinars.

1. Choix de l'inconnu
2. Mise en équation du problème.

3. Résolution de l'équation.

4. Interprétation du résultat.

10

Résoudre dans IR les équations suivantes :
$0,3y+1,1=0,4(2y-1)$
$2(x-6) = 4x$
$3(x-5) = 6$
$24 = 3(4b+1)$

11

Résoudre dans IR les équations suivantes :
$3(x-2) = 2(x-4) + x$
$8x-2(x-4) = 3(2x+1)+5$

12

Un enfant a 14 ans et son père a 48 ans.
Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il égal au double de celui de son fils ?.

Vérifier vos acquis

Inéquation du premier degré à une inconnue.

1

Recopie et compléte chaque phrase par : > , < , ≤ , ≥.

a) Si $a < 4$ alors $a+3 \ldots 7$
Si $a < 4$ alors $a-5 \ldots -1$

b) Si $b > 11$ alors $4b \ldots 44$
Si $b \leq 11$ alors $\frac{b}{3} \ldots \frac{11}{3}$

c) Si $-3c \geq 9$ alors $c \ldots -3$
Si $\frac{c}{4} < -3$ alors $c \ldots -12$

2

1. Résoudre dans IR l'inéquation $2x-5 \geq 3$
2. Représenter sur une droite graduée l'ensemble des solutions de l'inéquation proposée.

Exercice résolu :

Une société de transport propose à ses clients deux tarifs pour un voyage entre deux villes.

Tarif A :
Un abonnement annuel de 27 dinars puis 5,250 dinars par voyage.

Tarif B :
7,500 dinars par voyage.
A partir de combien de voyages dans l'année, a-t-on intérêt à choisir le tarif A ?

Solution :

1. On note x le coût en dinars d'un voyage.
2. Montant à payer en utilisant le tarif A : $27 + 5{,}25x$
Montant à payer en utilisant le tarif B : $7{,}5x$
Le tarif A est plus avantageux lorsque :
$27 + 5{,}25x < 7{,}5x$
3. $27 + 5{,}25x < 7{,}5x$
$27 < 2{,}25x$
$x > \frac{27}{2{,}25} = 12$

4. Au delà de 12 voyages, on a intérêt à choisir le tarif A.

1. Choix de l'inconnu
2. Mise en équation du problème.

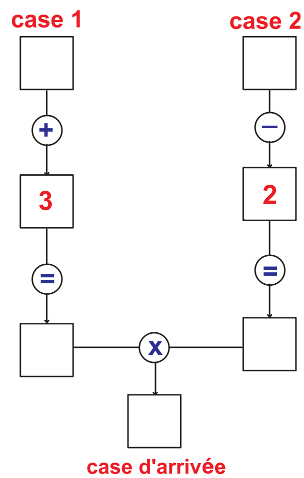
3. Résolution de l'équation.

4. Interprétation du résultat.

Equations du type (ax+b) (cx+d) = 0

Activité 1

On considère l'organigramme suivant :



1. Qu'obtient-on dans la case d'arrivée si on place 3 dans la case 1 et $\frac{1}{2}$ dans la case 2 ?

2. La case1 comporte le nombre 5. Que faut-il mettre dans la case 2 pour obtenir 0 dans la case d'arrivée ?

3. Que faut-il mettre dans la case 1 pour obtenir 0 dans la case d'arrivée quelque soit le nombre placé dans la case 2 ?

4. Quel nombre faut-il mettre dans les cases 1 et 2, pour obtenir son carré dans la case d'arrivée ?

Activité 2

$a\,b = 0$
signifie
$a = 0$ ou $b = 0$

Les solutions de l'équation :
$(ax + b)(cx + d) = 0$
sont les solutions de chacune des équations
$ax+b = 0$ et
$cx + d = 0$

On se propose de résoudre dans IR l'équation :
$(2x - 1)\,(-3x + 4) = 0$

Pour cela :

1) Résoudre l'équation $2x - 1 = 0$.

2) Résoudre l'équation $-3x + 4 = 0$.

3) Déduire que l'ensemble S_{IR} des solutions de l'équation $(2x - 1)\,(-3x + 4) = 0$

est $S_{IR} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right\}$.

Exercez-vous

1

Résoudre dans IR les équations suivantes :

$(2x-3)(4x-3)=0$

$4x^2-9=0$

$(4x^2-9)(x-1)=x-1$

$(x-3)(x+5)=x^2+1$

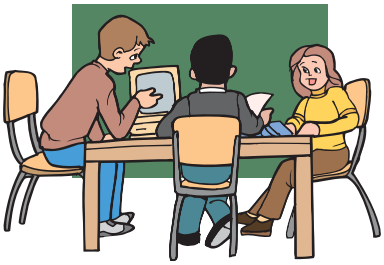
2

On se propose de résoudre l'équation $(2x-1)(3x+2) = 5$

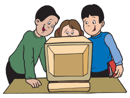
1. Montrer que l'équation donnée peut s'écrire $6x^2+x-7=0$

2. a) Développer le produit $(x-1)(6x+7)$

b) En déduire les solutions de l'équation initiale.



Réfléchir avec l'ordinateur



On considère l'expression $A(x)=2x^2-7x+6$.

On se propose de chercher s'il existe des valeurs de x pour lesquelles $A(x)=0$.

A- A l'aide d'un tableur-grapheur.

1. Sur une feuille de calcul d'un tableur, entrer les données ci-dessous :
- Dans la cellule A1 : calcul de A(x)
- Dans la cellule A2 : x
- Dans la cellule B2 : A(x)
- Dans la cellule A3 : 0
- Dans la cellule B3 : la formule : = 2*A3*A3 – 7*A3+6
- Dans la cellule A4 : la formule : = A3+0,1 puis étendre cette formule jusqu'à la ligne 25.

2. Représenter graphiquement ces résultats, pour cela :
- Sélectionner les colonnes A et B de la ligne 2 à la ligne 25.
- Avec Excell choisir le menu suivant : Insertion - Graphique - Nuage de points.

3. Lire sur le graphique les solutions de l'équation $A(x)=0$

B- Par le calcul

1. Vérifier que $A(x)=(2x-3)(x-2)$

2. Retrouver alors les solutions de l'équation $A(x)=0$

Equations du type $\dfrac{ax + b}{cx + d} = 0$

Exercice résolu 1 :

Résoudre dans IR l'équation :

$$\frac{3x + 1}{x - 1} = 0$$

Solution :

Le quotient $\dfrac{3x+1}{x-1}$ n'existe que si $x \neq 1$

Dans IR\{1} on a :

$\dfrac{3x + 1}{x - 1} = 0$ équivaut à $3x + 1 = 0$

équivaut à $x = -\dfrac{1}{3}$

$S_{IR} = \{-\dfrac{1}{3}\}$

Le dénominateur d'une fraction doit être différent de 0

$\dfrac{a}{b} = 0$ équivaut à $a = 0$ et $b \neq 0$

Exercice résolu 2 :

Résoudre dans IR l'équation :

$$\frac{2x-1}{x-2} = 1$$

Solution :

Le quotient $\dfrac{2x-1}{x-2}$ n'existe que si $x \neq 2$ on dit qu'on résout l'équation dans IR\{2}.

Dans IR\{2} on a :

$\dfrac{2x - 1}{x - 2} = 1$ équivaut à $2x - 1 = x - 2$

équivaut à $x = -1$

$S_{IR} = \{-1\}$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ équivaut $ad = bc$

Exercez-vous

Résoudre dans IR les équations suivantes :

$$\frac{x - \sqrt{3}}{x - 3} = 0 \quad ; \quad \frac{-x + 1}{x} = 1 \quad ; \quad \frac{x^2 - x}{x + 1} = 0$$

Signe de ax + b

Activité 1

1. Représenter graphiquement la fonction affine f définie sur IR par $f(x)=2x-3$

2. Utiliser le graphique pour répondre aux questions suivantes :

a) Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x)=0$; $f(x)<0$, $f(x)>0$.

b) Compléter alors le tableau suivant :

x	$-\infty$ $\qquad \frac{3}{2} \qquad$ $+\infty$
Signe de $2x-3$	

c) Indiquer, sans calculs, le signe de $2x-1$ pour $x=2$, $x=\frac{1}{4}$ et $x=-2$

3. Reprendre les questions **2.a)** et **b)** en résolvant l'équation $f(x)=0$, l'inéquation $f(x)<0$ et l'inéquation $f(x)>0$. Déduire le tableau de signe de f(x).

Activité 2

Reprendre **l'activité 1** en considérant la fonction g définie sur IR par $g(x)=-2x+5$.

Savoir

En s'inspirant des activités précédentes on retient :

Pour a > 0

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe de ax+b	$-$	0	$+$

Pour a < 0

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe de ax+b	$+$	0	$-$

Exercez-vous

1

Déterminer le tableau de signe de : $-\frac{1}{4}x+1$

2

Etudier le signe des expressions suivantes

1. $A(x) = 2x-2$

2. $B(x) = 3-5x$

3. $C(x) = \frac{1}{3}x+7$

4. $D(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}$

Activité 3

I. On veut résoudre l'inéquation $(2x+1)(1-3x) \leq 0$

1) Etablir un tableau de signe pour chacune des expressions $2x+1$ et $1-3x$

2) Fusionner ces deux tableaux en un seul du type :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$2x+1$	
$1-3x$	
$(2x+1)(1-3x)$	

Il y a deux valeurs de x à placer dans le tableau.

Utiliser ce tableau pour répondre aux questions suivantes :

a) Quel est le signe de $(2x+1)(-3x+1)$ pour $x < -\frac{1}{2}$? $x > \frac{1}{3}$?

b) Résoudre l'inéquation $(2x+1)(-3x+1) \leq 0$.

II. On veut maintenant résoudre l'inéquation :

$$\frac{2x+1}{-3x+1} \leq 0$$

1 – 3x doit être non nul

Expliquer comment on peut s'inspirer du tableau précédent pour résoudre cette inéquation.

Système linéaire de deux équations de premier degré à deux inconnues.

Activité 1

$\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples (x,y) où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Il s'agit de trouver tous les couples de nombres réels (x, y) vérifiant le système :

$$(S)\ \begin{cases} x - 2y = -3 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

1. Interprétation graphique :

Le système (S) peut s'écrire :

$$(S')\ \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ y = 3x - 1 \end{cases}$$

On dit que le système (S) est équivalent au système (S')

a) Tracer les droites D_1 et D_2 d'équations respectives $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ et $y = 3x - 1$.

b) Déterminer graphiquement les coordonnées de leur point d'intersection.

c) Déduire que le système (S) admet un seul couple de solution.

2. Résolution par calcul :

a) Par élimination ou combinaison

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\ \begin{cases} x - 2y = -3 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

L_1 désigne la première ligne

L_2 désigne la deuxième ligne

Montrer qu'on calculant : $L_1 - 2L_2$ et $3L_1 - L_2$ on obtient :

$$\begin{cases} -5x = -5 \\ -5y = -10 \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

L'équation $-5x = -5$ a été obtenu en faisant la combinaison linéaire $L_1 - 2L_2$

Conclure en donnant le couple de solutions de (S).

b) Par substitution

L'équation $x - 2y = -3$ nous permet d'exprimer simplement x en fonction de y : $x = 2y - 3$ on substitue à x cette expression dans $3x - y = 1$. On obtient : $3(2y-3) - y = 1$ c'est à dire $5y = 10$ d'où $y = 2$ et on aura $x = 2 \times 2 - 3 = 1$.

La seule solution du système (S) est (1,2). $S_{\mathbb{R}^2} = \{(1,2)\}$

Activité 2

Avec 7 dinars tu peux acheter soit 4 CD et 2 cassettes soit 2 CD et 8 cassettes.
Combien coûte un CD ? une cassette ?

Activités

Activité 3

Une personne partage entre ses deux enfants âgés 7 ans et 10 ans, une somme d'argent égale à 34 dinars, proportionnellement à leurs âges. Quelle est la part de chaque enfant ?

Activité 4

60 livres de deux sortes occupent 210 cm sur une étagère, ces livres sont rangés les uns contre les autres, leurs épaisseurs est soit 4 cm soit 2 cm.
Quel est le nombre de livres de chaque sorte ?

Activité 5

Chez le même poissonnier, une cliente achète 2 Kg de sardines et 3 Kg de rougets et elle paye 16 dinars. Une seconde cliente achète 4 Kg de sardines et 2 Kg de rougets et elle paye 14 dinars.
Quel est le prix d'un Kg de sardine et d'un Kg de rouget ?

Activité 6

Trouver deux termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison –2 dont la somme est égale à 4.

Activité 7

Trouver deux termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de somme égale à $\frac{3}{8}$.

Déterminant d'un système.

Considérons le système en x et y ;

$$(S) \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

a, b, a', b', c, c' sont des réels donnés.

Le réel ab' – a'b s'appelle le déterminant du système (S) et se note $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

Activité 1

Considérons le système

$$(S)\quad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Le réel ab' – a'b s'appelle le déterminant du système (S) et se note.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

où a, b, c, a', b' et c' sont des réels donnés et $ab' - a'b \neq 0$.
Si on multiplie la première ligne du système par a' et la deuxième ligne de système par a on obtient ce système.

$$\begin{cases} a'a\,x + a'by = a'c, \\ aa'\,x + ab'y = ac' \end{cases}$$

En soustrayant la première ligne de la deuxième, on obtient

$$(ab' - a'b)\,y = ac' - a'c$$

a) Déterminant alors y.
b) Comment peut-on déterminer x ?

Savoir

$(S)\ \begin{cases} ax + by = c \\ ax' + b'y = c' \end{cases}$ le déterminant de S est $D = ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

Si $D \neq 0$ alors le système (S) est dit de **cramer**. (S) admet un seul couple (x, y) comme solution et on a :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{D} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{D}$$

Activité 2

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{a'} & \mathbf{b'} \end{vmatrix}$$

$=$

ab' – a'b

Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - 4y = -1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ -x - \frac{2}{3}y = 1 \end{cases}$

Exercez-vous

Résoudre par la méthode du déterminant $(S_1) : \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ $(S_2) : \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ -3x + 2y = 3 \end{cases}$

$(S_3) : \begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ x - 3y = 4 \end{cases}$

Activité 3

1. On se propose de résoudre dans IR^2 le système $(S):\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+6y=8 \end{cases}$

a) Vérifier que le déterminant de (S) est nul.

b) En divisant par 2 les deux membres de l'équation $2x+6y=8$ montrer qu'on obtient le système équivalent à (S) :

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ x+3y=4 \end{cases}$$

peut-on trouver alors des couples (x, y) solutions au système (S) ?.

2. On se propose cette fois de résoudre le système $(S_1):\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 6x+9y=12 \end{cases}$

a) Vérifier que le déterminant de (S_1) est nul.

b) Montrer, qu'en divisant par 3 les deux membres de l'équation $6x+9y=12$

on obtient : $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$

c) Le système (S_1) se réduit-t-il à une seule équation ? Que peut-on déduire ?

Exercez-vous

Résoudre dans IR^2, les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 4x+8y=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x-y=5 \\ -\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}y=-\dfrac{5}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x-\dfrac{1}{2}y=1 \\ 2x-y=5 \end{cases}$$

Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

TESTS D'AUTO-EVALUATION

Q.C.M

1. L'équation (3x+2) – (5x–3)=0 admet pour solution(s) :

a) Les nombres $-\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{5}$ **b)** Le nombre $\frac{5}{2}$ **c)** Les nombre $-\frac{2}{3}$ et $-\frac{3}{5}$

2. L'équation (3x+1) (2x–5) = 0 admet pour solution(s) :

a) Le seul nombre $-\frac{1}{3}$ **b)** Les nombres $-\frac{1}{3}$ et $-\frac{5}{2}$ **c)** Les nombres $-\frac{1}{3}$ et $\frac{5}{2}$

3. Un agriculteur vend 40% de sa récolte d'oranges puis il en vend encore 6 tonnes. Il lui reste 12 tonnes.

Pour connaître la quantité d'oranges x, en tonnes, qu'il avait récolté, on résout l'équation :

a) $x - (0{,}4x + 6) = 12$ **b)** $0{,}4x+6 = x+12$ **c)** $x - 0{,}4x + 6 = 12$

4. Si $x \leq 6$ alors :

a) $-\frac{1}{2}x \leq -3$ **b)** $-\frac{1}{2}x \geq -3$ **c)** $-\frac{1}{2}x \geq 3$

5. Les solutions de l'inéquation $-4x < \frac{1}{3}$ sont les nombres x tels que…

a) $x < -\frac{1}{12}$ **b)** $x > -\frac{1}{12}$ **c)** $x > \frac{1}{12}$

6. L'ensemble des solutions de l'inéquation $-x+1 < 2x+5$ est :

a) $]-\infty, \frac{4}{3}[$ **b)** $]-\frac{4}{3}, +\infty[$ **c)** $]\frac{4}{3}, +\infty[$

7. x désigne un nombre réel, $-2x+5 \leq 0$ est équivaut à :

a) $x \geq \frac{5}{2}$ **b)** $x \leq \frac{5}{2}$

8. Le tableau de signe de $-\frac{1}{2}x+3$ est :

a)

x	$-\infty$		**6**		$+\infty$
$-\frac{1}{2}x + 3$		-	0	+	

b)

x	$-\infty$		**6**		$+\infty$
$-\frac{1}{2}x + 3$		+	0	-	

c)

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-\frac{1}{2}x + 3$		+	0	-	

9. L'expression $\frac{x+5}{x^2-1}$ n'existe pas pour la valeur de x égale à :

a) –1 **b)** –5 **c)** 1 **d)** 0

Q.C.M

10. $(x-1)(x-3) \geq 0$ équivaut à :

a) $x-1 \geq 0$ et $x-3 \geq 0$ **b)** $x-1 \leq 0$ et $x-3 \leq 0$ **c)** $x-1 \geq 0$ et $x-3 \geq 0$ ou $x-1 \leq 0$ et $x-3 \leq 0$

11. Le système (S) : $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=3 \end{cases}$:

a) admet un unique couple solution **b)** n'admet pas de solutions **c)** admet une infinité de solutions

12. Le système (S) : $\begin{cases} x-\dfrac{1}{2}y=1 \\ -2x+y=-2 \end{cases}$:

a) admet un unique couple solution **b)** n'admet pas de solutions **c)** admet une infinité de solutions

13. Le système (S) : $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x+3y=0 \end{cases}$:

a) admet un unique couple solution **b)** n'admet pas de solutions **c)** admet une infinité de solutions

14. Azer a 7 ans de plus que Maram. Dans 4 ans, Azer sera deux fois plus âgé que Maram.

Si on désigne par a l'âge d'Azer et par b celui de Maram. a et b sont solutions du système :

a) $\begin{cases} a=b+7 \\ a+4=2(b+4) \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} a=b-7 \\ b+4=2(a+4) \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} a=b+7 \\ a+4=2b+4 \end{cases}$

15.

a) Le couple (5,2) est la seule solution de l'équation $2x+4y=18$

b) (5,2) et (7,1) sont solutions de l'équation $2x+4y=18$

c) (9,0) est solution de l'équation $2x+4y=18$

16. Le nombre de pattes de x poules et y lapins est égal à 18 ; le couple (x, y) est solution de l'équation :

a) $x+y=18$ **b)** $2x+4y=18$ **c)** $4x+2y=18$

1

Résoudre dans IR les équations suivantes :

a) $2x - 3 = x + \frac{5}{2}$

b) $\frac{10x+3}{2} = \frac{1}{3}$

c) $(1-2x)(3x-4)=0$

d) $2x(x-1)=0$

e) $x^2 - 1 = 0$

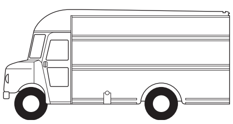
f) $x^2 - 4x = 0$

2

Trois cousins ont respectivement 42, 28 et 8 ans
Dans combien d'années l'âge de l'aîné sera-t-il égal à la somme des âges des deux autres ?

3

Un routier constate que s'il ajoute 40 litres de carburant dans le réservoir de son camion à moitié plein, il le rempli aux $\frac{3}{4}$. Quelle est la capacité du réservoir ?



4

Azer joue avec ses camarades aux billes. Il a perdu le huitième de ses billes dans la première partie puis le sixième de ce qui reste dans la deuxième partie. Il dispose encore de 35 billes.

a) Ecrire une équation traduisant l'énoncé.

b) Résoudre l'équation trouvée.

c) En déduire le nombre de billes perdues dans chaque partie.

5

ABC est un triangle rectangle en A tel que :
AC = 3 cm et BC dépasse AB de 2 cm.
Calculer AB et BC.

6

Résoudre dans IR les équations suivantes :

$(2x+1)^2 = (4x+1)(x-3)$

$(x-1)^2 = (x-1)(x+2)$

$x(x-1)(x-2) - 3x(x-1)(3-2x) = 0$

$(x+4)^2 - (2x+1)^2 = 0$

7

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

- $6 - 5t \geq 14$
- $5x - 3 > 1 + 2x$
- $2(1-3t) \leq 3(2-t)$

Exercices

8

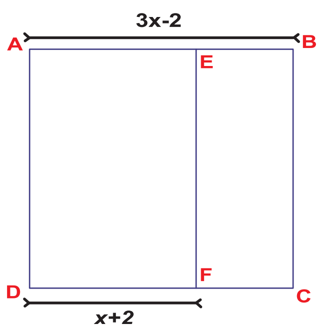
Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{x-1}{4} - 5 \leq \frac{2x-3}{2} + \frac{3}{4}$$

9

1. Résoudre dans IR l'inéquation :
$3x-2 \geq x+2$

2. Soit x un réel supérieur ou égal à 2
ABCD est un carré dont le côté mesure $3x-2$



a) Montrer que l'aire du rectangle BCFE est $A(x) = (3x-2)^2 - (3x-2)(x+2)$

b) Factoriser A(x)

c) Résoudre dans IR l'équation $(3x-2)(2x-4) = 0$

d) Pour quelle(s) valeur(s) de x, les aires des rectangles BCFE et ADFE sont-elles égales ?

10

«1glace et 2 jus coûtent 4 dinars» alors que «2 glaces et 2 jus coûtent 5 dinars». Quel est le prix d'une glace et celui d'un jus ?

11

Des pigeons et des colombes se posent sur une ligne électrique. Wael dit à son frère Fakhri : je compte 28 pattes. Fakhri répond : Il y a deux pigeons de plus que les colombes.
Combien y-a-t-il de pigeons ?

12

Mohamed dit à son fils Ahmed, l'année prochaine mon âge sera 4 fois ton âge.
Ahmed lui répond : Dans six ans tu auras 30 ans de plus que moi, Mohamed ajoute : «ceci est vrai aujourd'hui».

a) Sachant que les deux affirmations précédentes sont vraies, Mohamed a-t-il raison ?

b) Quels sont, dans ce cas, les âges respectifs du père et du fils ?

13

Etudier le signe de chacune des expressions suivantes :

a) $A(x) = 2x+3$

b) $B(x) = 4-3x$

c) $C(x) = (4-x)\,(2x-5)$

d) $D(x) = x(-2x+1)$

14

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a) $\dfrac{x-2}{2x-1} \leq 0$

b) $\dfrac{x-2}{2x-1} \leq 1$

c) $\dfrac{2x-1}{x-2} > 0$

d) $-\dfrac{3}{x} - 2 < 0$

e) $\dfrac{2x-3}{2x+3} \geq 0$

15

On donne le système (S) suivant d'inconnues x et y, m est un paramètre réel donné.

$$(S)\ \begin{cases} mx+y=1 \\ x+my=-2 \end{cases}$$

1. Calculer le déterminant D du système (S)

2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles (S) admet un seul couple de solutions.

3. Résoudre le système (S) pour la valeur $m = \sqrt{2}$.

4. Résoudre le système (S) pour la valeur $m = -1$.

16

Il y a x oiseaux sur terre et y oiseaux sur un arbre. Si un oiseau descend de l'arbre, on a égalité. Par contre si un oiseau s'envole vers l'arbre, le nombre d'oiseaux sur l'arbre devient le double de celui sur terre.

Déterminer x et y.

17

On considère le système :

$$(S)\ \begin{cases} (x+y)^2=4 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$$

1. Quelles sont les valeurs possibles de la somme $x+y$?

2. En déduire les solutions du système (S).

Exercices

18

Une salle de théâtre compte 500 places, les unes à 4 dinars, les autres à 6 dinars. Quand la salle est pleine la recette totale est 2200 dinars.
Combien y-a-il de places de chaque sorte ?

19

Si deux capitaux sont placés, le premier à 6%, le second à 4%, la différence des revenus annuels est 180 dinars. Si le premier est placé à 4% est le second à 6% la différence des revenus annuels serait 20 dinars.
Déterminer les deux capitaux.

20

Résoudre dans IR^2 le système suivant :

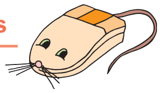
$$(S)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x}{7}=\dfrac{y}{5}\\ 3x-y=24\end{array}\right.$$

21

Un automobiliste part d'une ville A à 6 heures et se dirige vers une ville B à la vitesse de 100 km/h. De la ville B à la ville C il roule à la vitesse de 80 km/h. Il arrive à la ville C à 9 heures. La distance parcourue de A à C est 260 km.

1. À quelle heure l'automobiliste est-t-il arrivé à la ville B ?
2. Déterminer la distance qui sépare les villes A et B et celle qui sépare les villes B et C.

22 A vos souris



1. À l'aide d'un tableur-grapheur déterminer graphiquement des valeurs approchées des solutions de l'équation **(E)** : $3x^2-19x+28=0$.

2. En remarquant que $3x^2-19x+28=(3x-7)(x-4)$ déterminer les solutions de l'équation **(E)**

- Je pense à deux entiers positifs tels qu'en ajoutant leur somme, leur différence et leur produit, on obtienne 1991. Aide moi à les trouver.

- Mes deux nombres sont entiers, positifs et leur somme vaut aussi 1991. Si on ajoute au plus petit la moitié du plus grand, on trouve autant qu'en ajoutant au plus grand les deux cinquième du plus petit. Trouve-les.

- Résoudre ce cryptogramme : DEU + DEU = QUAT (je suis féble en horthografe !)
  Une lettre est remplacée par un chiffre et deux lettres différentes sont remplacées par deux chiffres différents.

Abou Abdallah Muhammad Ben Moussa al-Khauwarizmi

Abou Abdallah Muhammad Ben moussa al-Khauwarizmi «أبو عبد اللّه محمّد بن موسى الخوارزمي» (783-850), est l'auteur de l'ouvrage intitulé Aljabr wa Imuquabala « الجبر والمقابلة », le terme Aljabr fut repris par les Européens et devient plus tard le mot algèbre. Son autre ouvrage, disparu, Kitab al jamii wa altafriq bi Hissab al-Hind « حساب الهند » (livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul indien), est le premier à parler du système des chiffres arabo-indiens.

Son al-Kauwarizmi, latinisé au moyen age en «Algoritmi», puis en «Algorismi» par les Européens, est à l'origine du mot algorithme, qui veut dire procédure. En revanche le principe des algorithmes était connu depuis l'antiquité (algorithme d'Euclide) et on mentionne même leur usage par les babyloniens.

De manière anecdotique, on doit aussi à al-Kauwarizmi la tradition consistant à appeler l'inconnue d'une équation mathématique x. En effet, dans son ouvrage Aljabr wa Imuquabala, il expose une méthode ou un algorithme pour expliciter une inconnue, ou as-say « الشّيء » littéralement une chose dans une équation du premier degré en utilisant de jabr (soustractions) (ou transpositions) et des muquabala (égalités) (ou confortations de deux entités). Finalement as-sayest l'inconnue x.

Article de Wikipédia, ***l'encyclopédie libre.***

4 FONCTIONS

«Ne t'inquiète pas si tu as des difficultés en maths, je peux t'assurer que les miennes sont bien plus importantes»

[Albert Einstein]

FONCTIONS

VÉRIFIER VOS ACQUIS

ACTIVITÉS

Fonctions affines par intervalles.

ACTIVITÉS

COURS

Système d'inéquations du premier degré à deux inconnues

Fonctions : $x \mapsto ax^2$

Fonctions : $x \mapsto ax^2 + b$

Fonctions : $x \mapsto (x + \alpha)^2$

Fonctions : $x \mapsto (x + \alpha)^2 + b$

ACTIVITÉS

COURS

Fonctions : $x \mapsto \frac{a}{x}$

Fonctions : $x \mapsto \frac{a}{x+b}$

EXERCICES

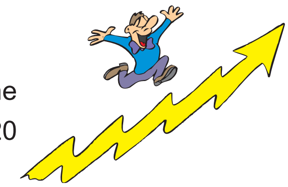
S'auto-évaluer

Exercices

Informatique : A vos souris

POINT D'HISTOIRE

1



Une entreprise décide que tous ses salariés auraient une augmentation de 4% suivie d'une augmentation de 20 dinars.
Chacun fait son calcul :
Ali gagnait 300 dinars, il aura donc :
(1,04 x 300) + 20 soit 332 dinars.

1. Mohamed et Salah gagnaient respectivement 350 dinars et 400 dinars. Calculer leurs nouveaux salaires.
2. Ecrire une formule valable pour tous les salariés.
3. On se demande ; si en intervertissant les deux augmentations, on arriverait au même salaire.
Etablir une nouvelle formule et déterminer les nouveaux salaires d'Ali, Mohamed et Salah.
4. Laquelle des deux formules est plus intéressante pour les salariés ?

2

a et b deux réels donnés, l'application f qui à tout réel x associe le réel ax+b est dite fonction affine et on note f(x) = ax + b

Reconnaître parmi les fonctions suivantes celles qui sont affines :

$f_1 : x \mapsto \frac{2+3x}{4}$; $f_2\ x \mapsto 1-x$; $f_3\ x \mapsto 2$

$f_4 : x \mapsto \frac{3}{x}$; $f_5\ x \mapsto (x-1)(x+2)-x^2+5$

3

Soit f une fonction définie sur D.
La représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est l'ensemble des points M (x , y) du plan tels que y = f(x) , $x \in D$.

Tracer dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan la représentation graphique des fonctions suivantes :

$f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$

$g : x \mapsto -x + 2$

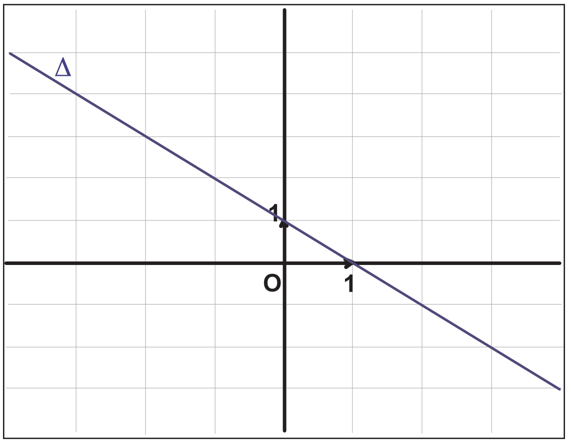
$h : x \mapsto 3x$

$k : x \mapsto 2$

4

Dans la figure ci-dessous la droite Δ est la représentation graphique d'une fonction f.

La représentation graphique d'une fonction affine $f : x \mapsto ax+b$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est la droite d'équation $y = ax + b$



a) f est-elle affine ?
b) Donner les images par f des réels 0, 1, –1 et 2
c) Donner les antécédents par f des réels 0, 1, –1 et 3
d) Trouver l'expression de la fonction affine f.

5

Trouver l'expression de la fonction affine f telle que :

$f(\frac{1}{2}) = 1$ et $f(1) = \frac{1}{4}$

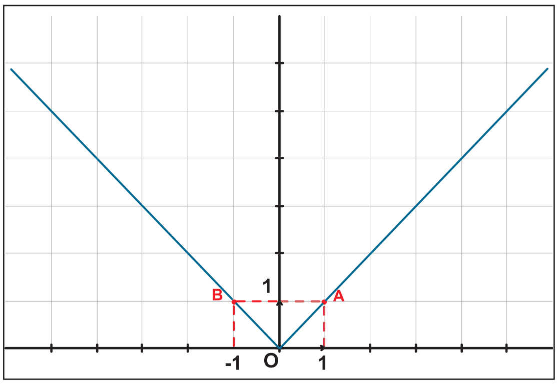
Fonctions affines par intervalles :

Activité 1

Soit f la fonction définie sur IR par f(x) = | x |.

1. Compléter :
Lorsque $x \geq 0$, f(x) = …
Lorsque $x \leq 0$, f(x) = …

2. La représentation graphique de f se compose de deux demi-droites comme l'indique la figure.

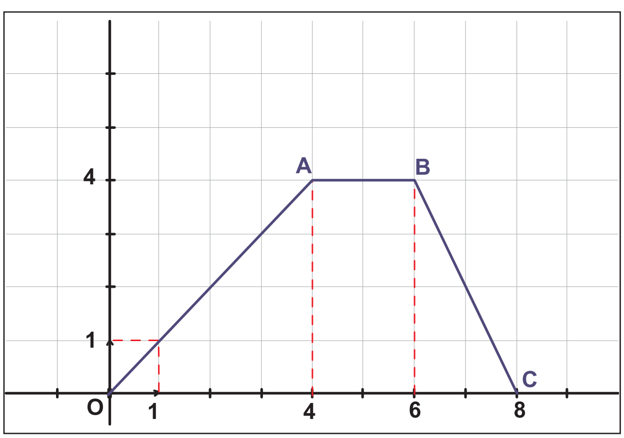


f est dite fonction affine par intervalles

a) f est-elle affine ?
b) Compléter les phrases suivantes :
- La représentation graphique de f sur $]-\infty\ ,\ 0]$ est la demi-droite ………
- La représentation graphique de f sur $[0\ ,\ +\infty[$ est la demi-droite ………
- La représentation graphique de f sur IR est la ………

Activité 2

Le graphique ci-dessous représente une fonction f définie sur l'intervalle [0 , 8].

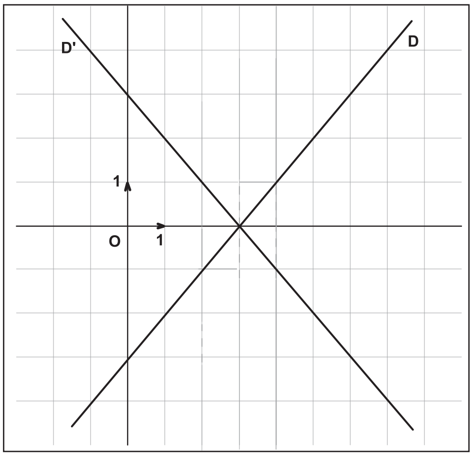


1. Donner f(0), f(1), f(4), f(5), f(6) et f(8).
2. Donner les réels qui ont pour image 2 par f.
3. Peut-on dire que :
a) f est une fonction affine ?
b) f est une fonction affine par intervalles ?

Activités

Activité 3

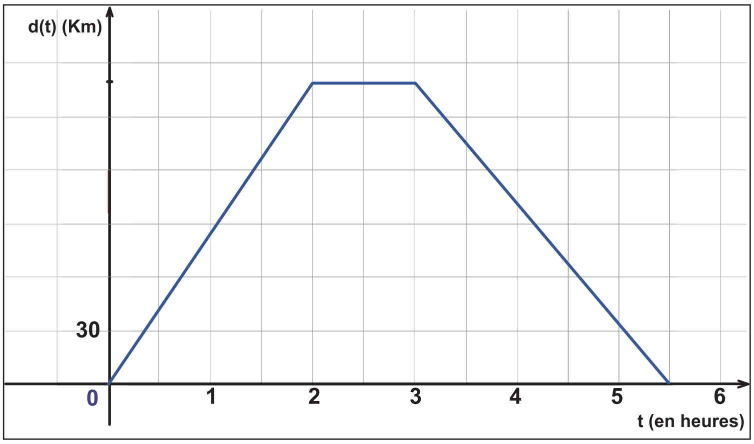
soit la fonction g définie sur IR par :
$g(x) = |x - 3|$.
1. Montrer que : $g(x) = x - 3$ pour $x \geq 3$ et $g(x) = -x + 3$ pour $x \leq 3$.
2. Sur le graphique ci-dessous on a représenté dans un repère orthogonal les droites D : $y = x - 3$ et D' : $y = -x + 3$.

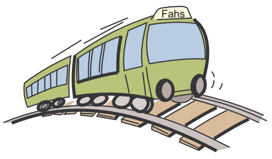


a) Colorer en rouge la représentation graphique de la fonction g.
b) Justifier que g est une fonction affine par intervalles.

Activité 4

Un train se rend d'une ville A à une ville B en 2 heures. On suppose qu'il effectue ce trajet à la vitesse moyenne de 85 km/h.
Après un arrêt d'une heure à la ville B, le train repart pour la ville A.
Le graphique ci-dessous représente les variations de la distance **d(t)** à l'instant **t** entre la ville A et la position du train.





1. a) Déterminer la distance en Kilomètres entre les villes A et B.
b) Déterminer la durée en heures du trajet **A → B → A** (arrêt compris).
c) Déterminer graphiquement la distance d après
- 1 heure de trajet.
- 2h30min de trajet.
- 5h30min de trajet.

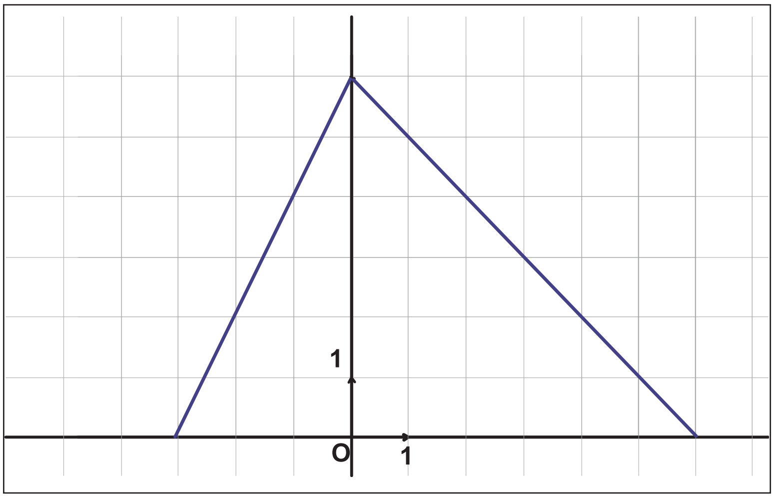
2. **a)** Vérifier que la vitesse moyenne du train pendant le retour est de 68 km/h.

b) Montrer que :

$$\begin{cases} d(t) = 85t & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ d(t) = 170 & \text{si } 2 \leq t \leq 3 \\ d(t) = 374 - 68t & \text{si } 3 \leq t \leq 5{,}5 \end{cases}$$

Activité 5

La représentation graphique d'une fonction h sur l'intervalle $[-3 , 6]$ se compose de deux segments comme l'indique la figure.



a) Déterminer graphiquement l'image par h de 2, celle de –2, puis celle de 0.

b) Trouver les réels ayant pour image 0.

c) Parmi les expressions suivantes, déterminer celle de h(x) sur l'intervalle $[-3 ; 0]$ et celle de h(x) sur $[0 ; 6]$:

$$h(x) = 6 - x \quad ; \quad h(x) = 2x - 6$$
$$h(x) = 2x + 6 \quad ; \quad h(x) = x + 6$$

d) Déduire l'expression de h(x) sur $[-3 ; 6]$

Savoir

❖ Une fonction f est dite fonction affine par intervalles lorsque sur chacun des intervalles où elle est définie, elle s'écrit sous la forme $f(x) = ax+b$, où a et b sont des réels donnés.

❖ La représentation graphique d'une fonction affine par intervalles est la réunion des demi-droites et / ou des segments de droites.

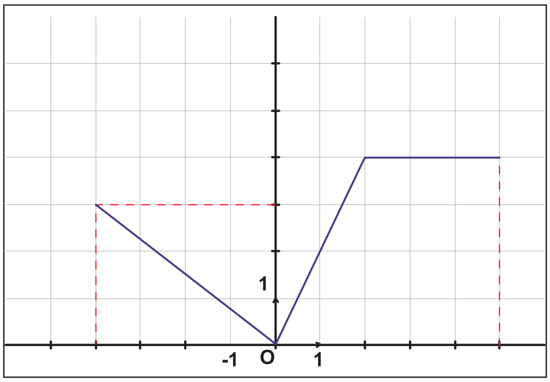
Exercez-vous

1

Le graphique ci-dessous représente une fonction f.

a) lire les images des réels –2, 0, 1 et 5.

b) lire les nombres qui ont pour images 3.



2

Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$.

1. Compléter

Pour $x \in IR_+$ $g(x) = \ldots\ldots$

Pour $x \in IR_-$ $g(x) = \ldots\ldots$

2. Représenter graphiquement g dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3. Déterminer graphiquement l'ensemble des solutions de l'équation $g(x) = 0$.

3

Soit f la fonction affine par intervalles définie sur [–2 ; 4 [par :

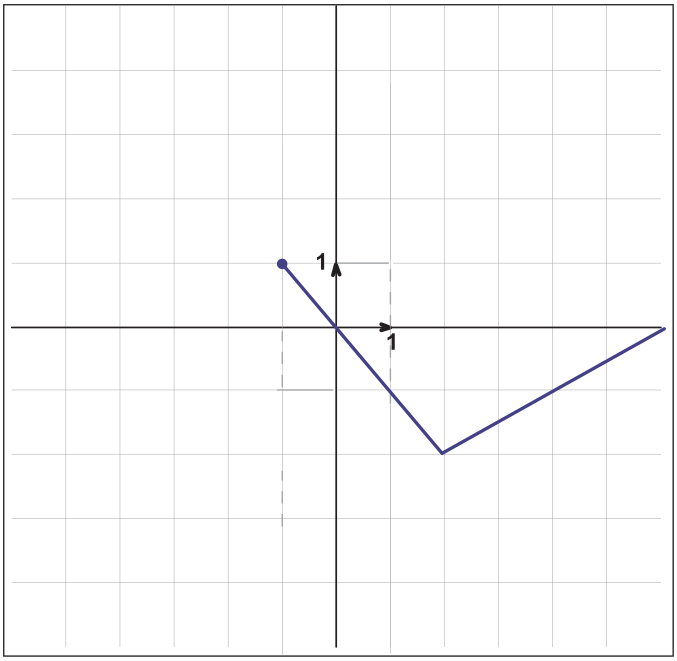
$$\begin{cases} f(x) = x - 1 & \text{si } x \in]-2\,;0] \\ f(x) = -x + 1 & \text{si } x \in]0\,;4] \end{cases}$$

Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal.

Sens de variation

Activité 1

La représentation graphique ci-dessous représente dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, une fonction affine par intervalles f.



Une fonction f est strictement croissante sur un intervalle I si pour tous a et b de I, f(a) et f(b) sont rangés dans le même ordre que a et b.

1. Soient a et b deux réels de l'intervalle $[-1 ; 2]$.
Compléter par : < ou >.
Si a < b alors f(a) … f(b).

Une fonction f est strictement décroissante sur un intervalle I si pour tous a et b de I, f(a) et f(b) sont rangés dans l'ordre contraire que a et b.

2. Soient a et b deux réels de l'intervalle $[2 ; +\infty[$.
Compléter par : < ou >.
Si a < b alors f(a) … f(b).

3. Que doit-on dire :
a) f est strictement croissante sur $[-1 ; 2]$?
b) f est strictement décroissante sur $[-1 ; 2]$?
c) f est strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$?
d) f est strictement décroissante sur $[2 ; +\infty[$?

Activité 2

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = -x & \text{si } x \in [-1 ; 2] \\ f(x) = \frac{1}{2}x - 3 & \text{si } x \in [2 ; +\infty[\end{cases}$$

1. a) Montrer que pour a et b de $[-1 ; 2]$ on a $f(b) - f(a) = a - b$
En déduire que pour tous a et b de $[-1 ; 2]$; si a < b alors f(a) > f(b).
b) f est-elle strictement croissante sur $[-1 ; 2]$?
c) f est-elle strictement décroissante sur $[-1 ; 2]$?

2. a) Montrer que pour a et b de $[2 ; +\infty[$ on a $f(b) - f(a) = \frac{1}{2}(b - a)$.
b) En déduire que f est strictement croissante sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$.

Activités

Activité 3

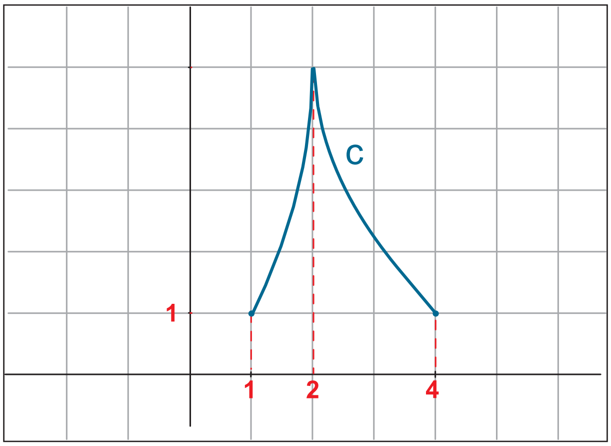
Une fonction f est dite constante sur un intervalle I si pour tous a et b de I, on a $f(a) = f(b)$.

Soit f la fonction affine par intervalles définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + 2 & \text{si } x \in [-5\,;-1] \\ f(x) = 1 & \text{si } x \in [-1\,;4] \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
2. Montrer que f est strictement croissante sur $[-5\,;-1]$.
3. Soient a et b deux réels quelconques de l'intervalle $[-1\,;4]$
Que pouvez-vous dire de f(a) et f(b) ?

Activité 4



Déterminer le sens de variation d'une fonction f sur un intervalle I, c'est dire que f est strictement croissante sur I, ou strictement décroissante sur I ou constante sur I.

C représente une fonction f définie sur $[1\,;4]$.

1. a et b désignent deux nombres réels de l'intervalle $[1\,;2]$ compléter par < ou >.

$a < b$ alors f(a) … f(b).

2. a et b désignent deux nombres réels de l'intervalle $[2\,;4]$ compléter par < ou >.

$a < b$ alors f(a) … f(b).

3. Quel est le sens de variation de f sur $[1\,;4]$?

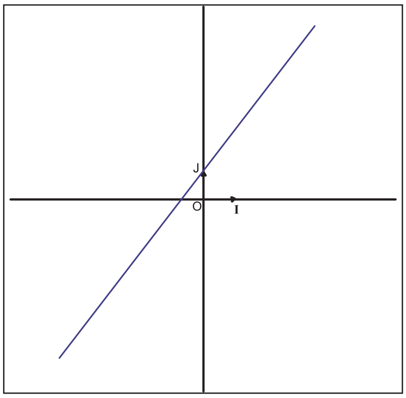
Savoir

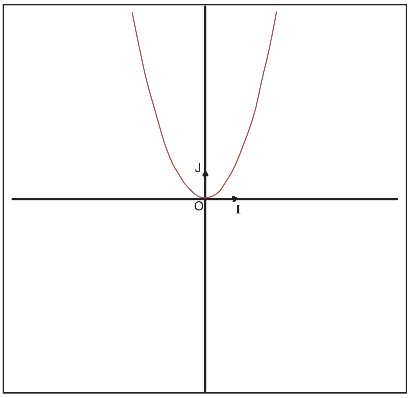
- Une fonction f est dite **strictement croissante** sur un intervalle I si : pour tous a, b appartenant à I, avec $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.
- Une fonction f est dite **strictement décroissante** sur un intervalle I si : pour tous a, b appartenant à I, avec $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.
- Une fonction f est dite **constante** sur un intervalle I si : pour tous a, b appartenant à I, on a $f(a) = f(b)$.

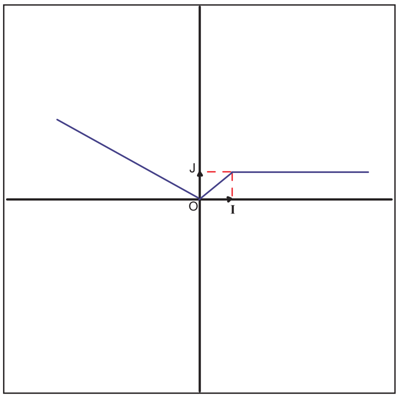
Exercez-vous

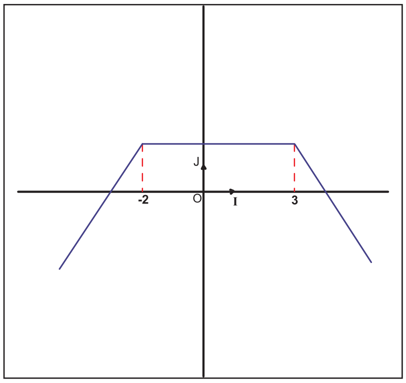
1

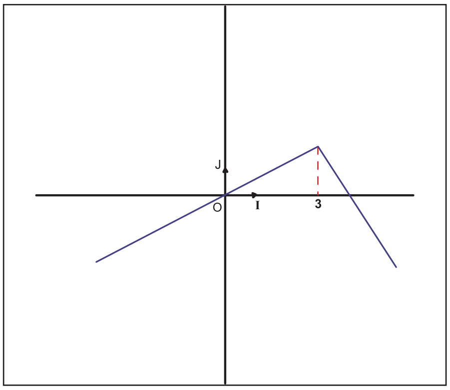
Les graphiques ci-dessous représentent des fonctions.
Indiquer dans chaque cas, les intervalles où la fonction est strictement croissante, strictement décroissante ou constante.











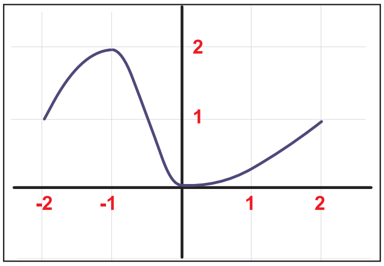
2

Indiquer le sens de variation sur IR de chacune des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto 2x-3 \quad ; \quad g : x \mapsto 1-4x \quad ; \quad h : x \mapsto -1+\frac{1}{2}x \quad ; \quad k : x \mapsto \frac{1}{5}(1-2x)$$

3

Le graphique ci-dessous représente une fonction g définie sur $[-2 ; 2]$.



a) Déterminer g(2), g(0) et g(−1).
b) Déterminer les réels x ayant pour image 1 par g.
c) Indiquer le sens de variation de la fonction g sur $[-2 ; 2]$.

Système linéaires d'inéquations à deux inconnues.

Activité 1

Un commerçant décide d'aménager un mur de longueur 12 m avec :

- Des étagères de type **A** qui mesurent **0,6 m** de long.
- Des étagères de type **B** qui mesurent **1 m** de long.

Ces étagères sont placées côte à côte, horizontalement et à la même hauteur.
Le budget du commerçant est 1400 dinars. Chaque étagère du type **A** vaut 80 dinars et chaque étagère de type **B** vaut 100 dinars.

1. Est-ce vrai que 4 étagères de type **A** et 9 étagères de type **B** conviennent ?
2. Donner des exemples de nombres d'étagères de type **A** et d'étagères de type **B** qui conviennent
On désigne par x le nombre d'étagères de type **A** et y celui de type **B** qui conviennent.
3. Montrer que x et y vérifient les conditions suivantes :

$$x \in \mathrm{IN} \; ; \; y \in \mathrm{IN} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 0{,}6x + y \leq 12 \\ 0{,}8x + y \leq 14 \end{cases}$$

4. Tracer les droites : Δ : $y = -0{,}6\,x + 12$
Δ' : $y = -0{,}8\,x + 14$.

Indiquer la partie du plan contenant tous les points dont les coordonnées (x ; y) vérifient les conditions de **3**.

5. Le commerçant estime que l'aménagement idéal correspond à 3 fois plus d'étagères de type **A** que d'étagères de type **B**. Trouver tous les couples (x ; y) correspondants et déterminer celui qui permet d'obtenir une disposition de longueur maximale.

Activité 2

1. Tracer dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite D d'équation $x - y - 1 = 0$
2. La droite Δ détermine deux demi-plans de frontière Δ, l'un P_1 contenant O, l'autre P_2 ne contenant pas O. Colorer ces deux demi-plans par deux couleurs différentes.
3. a) Indiquer parmi les points A (1,0) ; B (0, –1) ; C (2, –1) ; D (2,3) ; E (1,0)
F(0, –1) ceux qui appartiennent à P_1 et ceux qui appartiennent à P_2 .
b) Indiquer le signe de $x - y - 1$ pour chaque couple de coordonnées des points A, B, C, D, E et F.
c) Quelle conjecture peut-on faire quant au signe de $x - y - 1$, selon que le point de coordonnées (x ; y) appartient à P_1, ou à P_2 ?
4. Quel est l'ensemble des points M (x ; y) du plan tels que $x - y - 1 \geq 0$?

Activité 3

1. Tracer dans un même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les droites D : $x - 1 = 0$ et D' : $y = x + 1$

2. a) Colorer l'ensemble des points du plan de coordonnées (x ; y) tels que $x - 1 \leq 0$?

b) Colorer par une autre couleur l'ensemble des points du plan de coordonnées (x ; y) tels que $y \geq x + 1$?

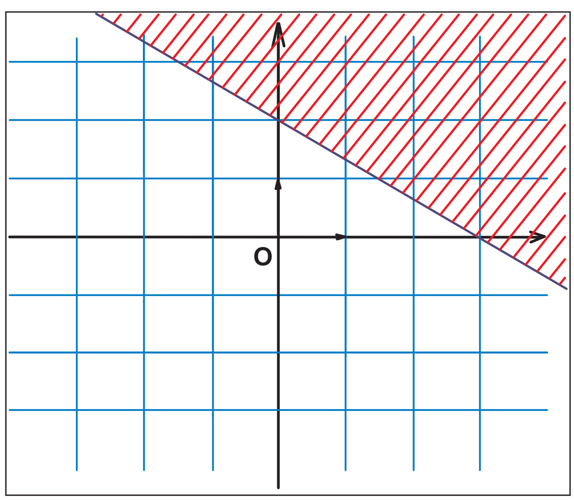
3. Déduire l'ensemble des points M(x ; y) du plan dont les coordonnées (x ; y)

vérifient $\begin{cases} x - 1 \leq 0 \\ y \geq x + 1 \end{cases}$

Exercez-vous

1

Caractériser par une inéquation l'ensemble des points situés dans la zone hachurée



2

Un artisan fabrique des objets de type A et des objets de type B. La réalisation d'un objet de type A demande 2 D de matière première et 4 D de main d'œuvre, celle d'un objet de type B demande 4 D de matière première et 6 D de main d'œuvre.
Les dépenses journalières en main d'œuvre et en matière première ne doivent pas dépasser respectivement 60 D et 72 D.
On veut déterminer le nombre d'objets de chaque type que l'artisan peut fabriquer par jour.

1. Ecrire un système d'inéquations qui tient compte des contraintes ci-dessus.
2. Résoudre graphiquement ce système.

Fonction $x \mapsto ax^2$

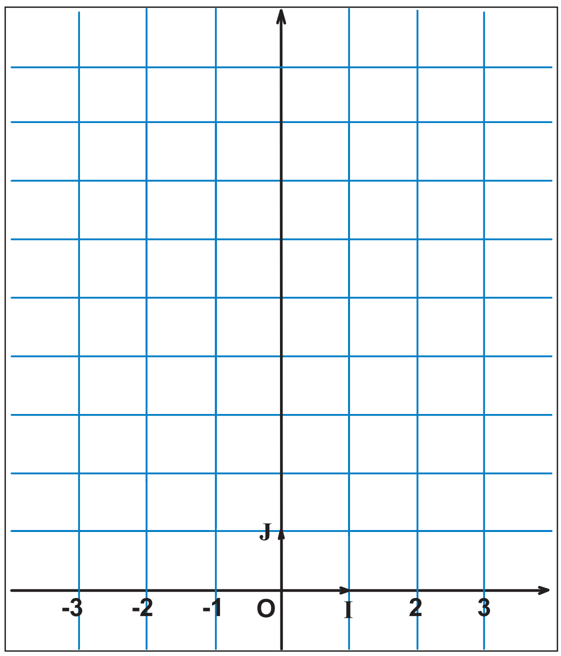
Activité 1

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2$

1. a) Compléter le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2							

b) Placer dans le repère orthogonal ci-dessous les points de coordonnées $(x\ ;\ x^2)$ pour $x \in \{-3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$.



La courbe représentative dans un repère orthogonal d'une fonction paire est symétrique par rapport a l'axe des ordonnées.

c) Peut-on dire que les points placés sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées ? Justifier.

d) Montrer que pour tout x on a $f(-x) = f(x)$.

Pour tous réels x, on a ; $f(-x) = f(x)$. On dit que f est paire et que (OJ) est un axe de symétrie de la courbe de f.

e) Tracer la courbe C de f en reliant ces points par une ligne continue et régulière.

f) Indiquer graphiquement le sens de variations de f.

2. a) Compléter le tableau suivant :

x	10	10^2	10^3	10^5	10^{10}
x^2					

Remarquons que l'on peut rendre f(x) aussi grand que l'on veut, il suffit d'imposer à x d'être assez grand.
Nous dirons que **f(x) tend vers +∞ lorsque x tend vers +∞**

et on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Utiliser la symétrie de la courbe par rapport à (OJ) pour déterminer la limite de f(x) lorsque x tend vers – ∞ .
On résume les résultats précédents dans ce tableau dit **tableau de variation de f** :

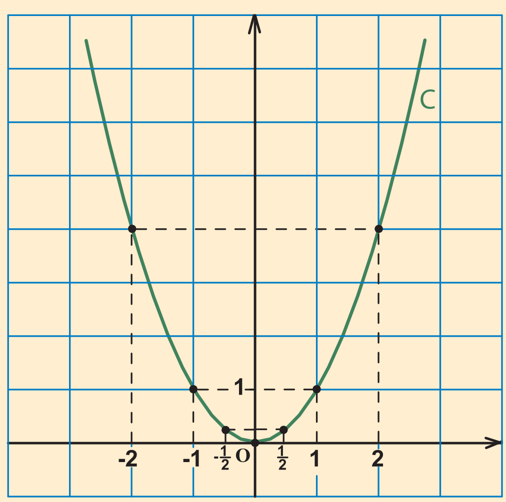
x	$-\infty$		**0**		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			0		

Savoir

Tableau de variation et courbe représentative de la fonction f : $x \mapsto x^2$ sur IR :

x	$-\infty$		**0**		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			0		

- f est paire car pour tout réel x, on a ; f(– x) = f(x)
- f est strictement croissante sur [0 ; + ∞[
- f est strictement décroissante sur]– ∞ ; 0]



La courbe **C** est une **parabole** de sommet O(0 ; 0)

Activité 2

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

P est la représentation graphique de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que f est paire, que peut-on déduire pour **P** ?

2. Montrer que f est strictement croissante sur [0 ; +∞[.

3. a) Compléter le tableau suivant :

x	10	10^2	10^3	10^5	10^{10}
$\frac{1}{2}x^2$					

b) Déduire la limite de f(x) lorsque x tend vers +∞.

c) déterminer le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

4. a) Compléter le tableau suivant :

x	0	1	2	3
f(x)				

b) Tracer **P** dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur IR par $g(x) = -2x^2$.

C est la représentation graphique de g dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que g est paire, que peut-on déduire pour **C** ?

2. Montrer que g est strictement décroissante sur [0 ; +∞[.

3. a) Compléter le tableau suivant :

x	10	10^2	10^3	10^5	10^{10}
$-2x^2$					

b) Déduire la limite de g(x) lorsque x tend vers +∞.

c) Déterminer le tableau de variation de g sur [0 ; +∞[.

4. a) Compléter le tableau suivant :

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2
g(x)				

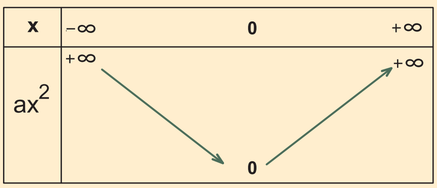
b) Tracer C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Savoir

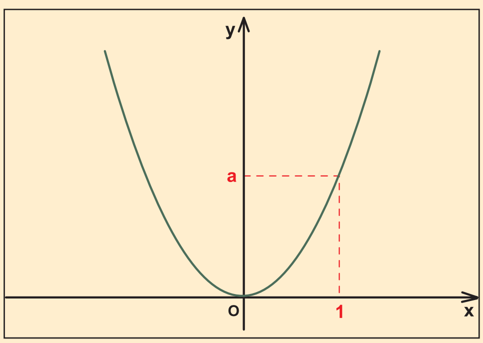
L'étude d'une fonction f définie sur IR par $f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$) permet d'obtenir l'une des deux situations suivantes :

a > 0

Tableau de variation :

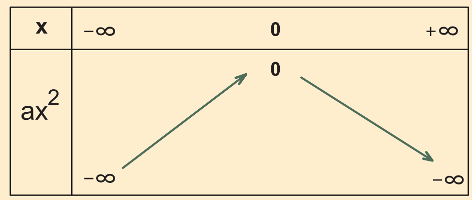


Représentation graphique

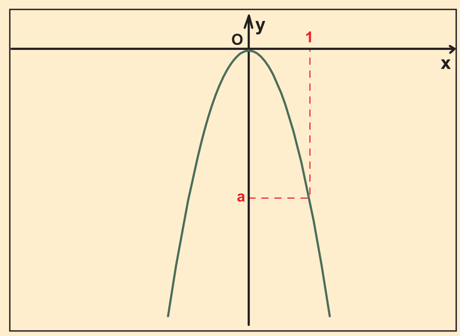


a < 0

Tableau de variation :



Représentation graphique



La courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan est une **parabole** de sommet O (0,0).

Exercez-vous

- Dresser le tableau de variation et représenter graphiquement dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto 3x^2$

b) $g : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2$

Activités

Fonction $x \mapsto ax^2 + b$

Activité 1

On se propose de représenter dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan la fonction définie sur IR par $f(x) = 2x^2+3$.

1. Etudier et représenter graphiquement dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la fonction g définie sur IR par $g(x)= 2x^2$.

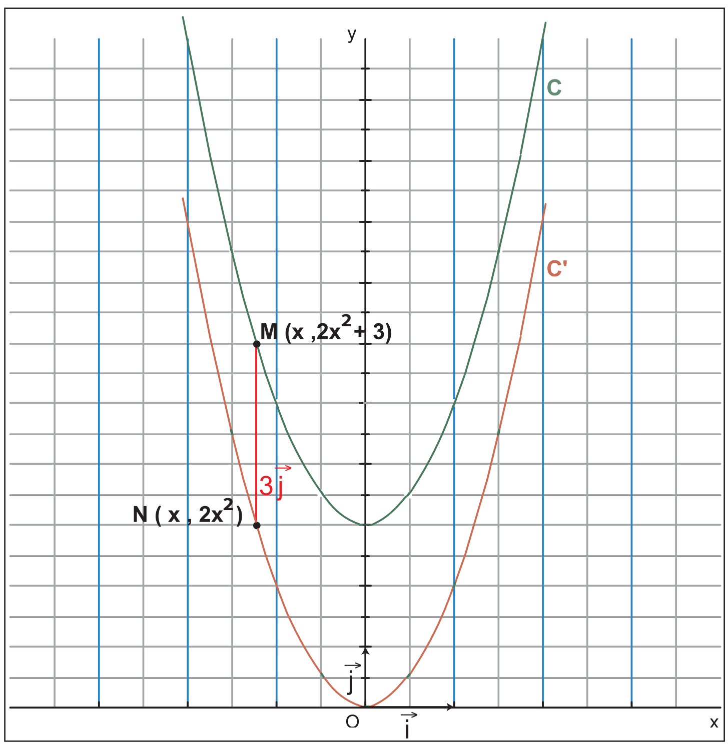
2. C et C' désignent respectivement les courbes représentatives dans le repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ des fonctions f et g.

a) M et N sont deux points d'abscisse x respectivement de C et de C'.
Montrer que le vecteur $\overrightarrow{NM} = 3\vec{j}$.

b) Déduire que le point M est l'image de N par la translation de vecteur $3\vec{j}$.

Remarque :
La courbe C se déduit de la courbe **C'** par la translation de vecteur $3\vec{j}$.

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2+b$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan est une parabole de sommet S (0,b).



C est la parabole de sommet S (0 ; 3)

Exercez-vous

Représenter graphiquement dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan les fonctions :

a) $f : x \mapsto -x^2 + 1$

b) $g : x \mapsto \frac{1}{2} x^2 - 2.$

Fonction $x \mapsto a(x+\alpha)^2$

Activité 1

On se propose de représenter dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan la fonction définie sur IR par $f(x) = 3(x+1)^2$

1. Etudier et représenter graphiquement dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la fonction g définie sur IR par $g(x)= 3x^2$.

2. C et C' désignent respectivement les courbes représentatives dans le repère orthogonal $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$ des fonctions f et g.

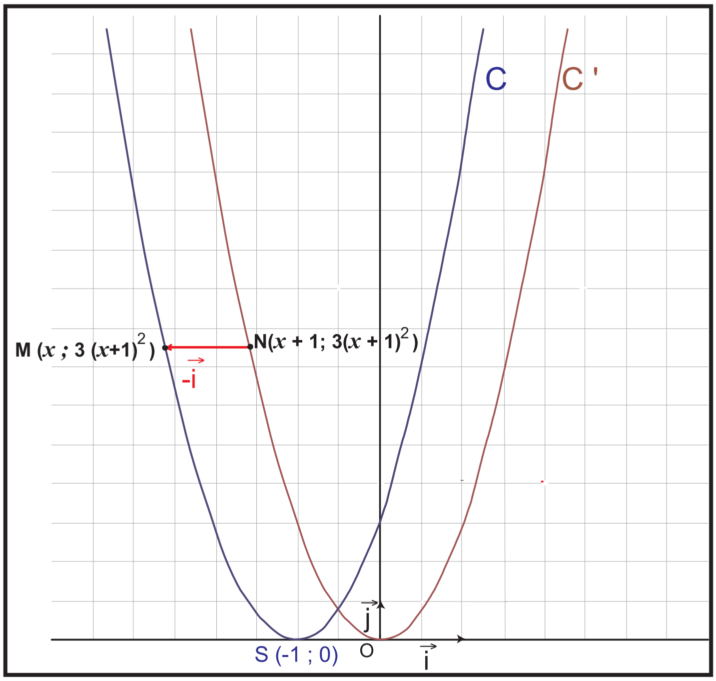
a) x est un réel quelconque, M est le point de C d'abscisse x et N le point de C' d'abscisse x + 1. Montrer que $\overrightarrow{NM} = -\vec{i}$.

b) Déduire que le point M est l'image de N par la translation de vecteur $\vec{i}$.

Remarque :

La courbe **C** se déduit de la courbe **C'** par la translation de vecteur $-\vec{i}$.

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto a(x + \alpha)^2$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan est une parabole de sommet $S(-\alpha, 0)$



C est la parabole de sommet S(–1 ; 0)

Exercez-vous

Représenter graphiquement dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan les fonctions :

a) $f : x \mapsto (x-1)^2$

b) $g : x \mapsto -2(x-3)^2$.

Activités

Fonction $x \mapsto a(x+\alpha)^2 + b$

Activité 1

On se propose de représenter dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$

1. Etudier et représenter graphiquement dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la fonction g définie sur IR par $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

2. C et C' désignent respectivement les courbes représentatives dans le repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ des fonctions f et g.

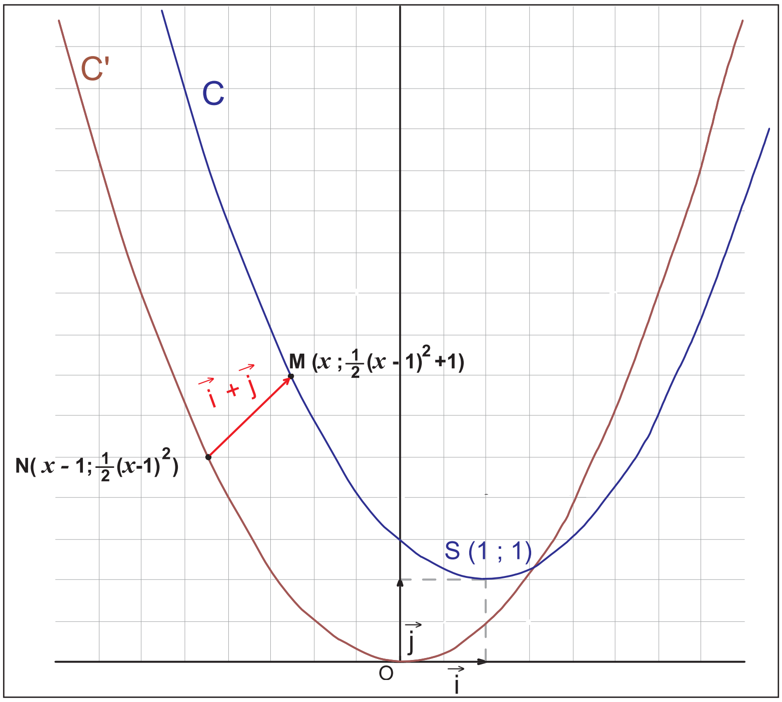
a) x est un réel quelconque, M est le point de C d'abscisse x et N le point de C' d'abscisse x – 1. Montrer que $\overrightarrow{NM} = \vec{i} + \vec{j}$.

b) Déduire que le point M est l'image de N par la translation de vecteur $\vec{i} + \vec{j}$.

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto a(x+\alpha)^2 + b$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan est une **parabole** de sommet $S(-\alpha, b)$

Remarque :

La courbe **C** se déduit de la courbe **C'** par la translation de vecteur $\vec{i} + \vec{j}$.



C est une parabole de sommet S (1 ; 1)

Exercez-vous

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 + 4x$.

1. Vérifier que $f(x) = 2(x+1)^2 - 2$.

2. Etudier et représenter graphiquement dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan la fonction g définie sur IR par $g(x) = 2x^2$.

3. Représenter alors dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative C de f et préciser son sommet.

Savoir

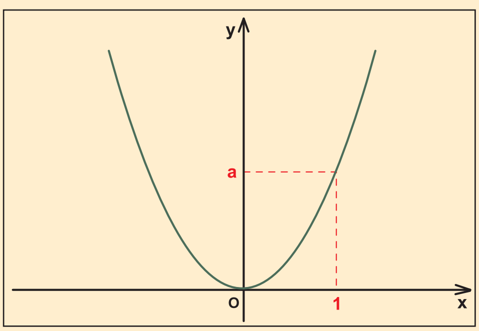
❖ La courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan est une **parabole (P)** de sommet O (0,0), On a :

Pour a > 0

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
ax^2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Représentation graphique

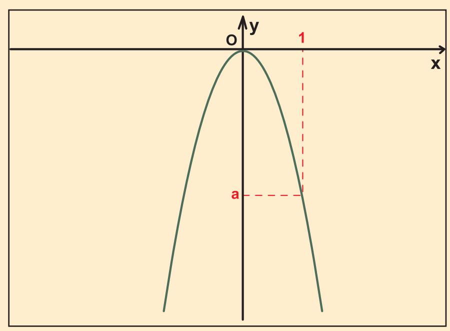


Pour a < 0

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
ax^2	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Représentation graphique



❖ La courbe représentative de la fonction $x \mapsto a(x+\alpha)^2 + b$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan est une **parabole (P')** de sommet S $(-\alpha, b)$.

(P') se déduit de **(P)** par la translation de vecteur $-\alpha\vec{i} + b\vec{j}$.

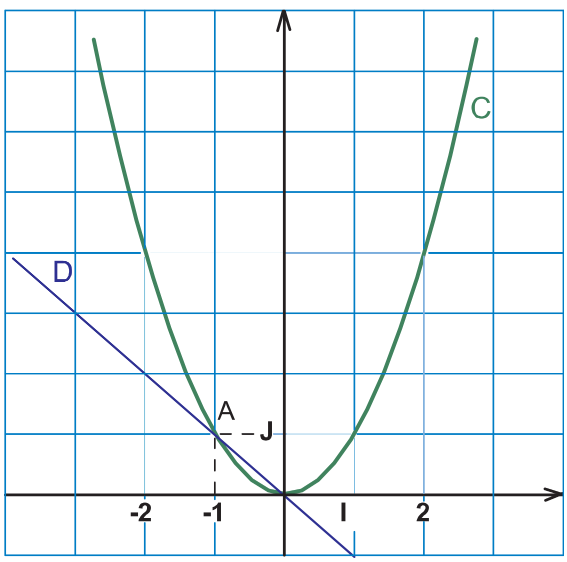
Exercice résolu :

1. Représenter graphiquement dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x$.

2. Déterminer les coordonnées des points communs aux deux courbes représentatives de f et g puis résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

Solution :

1.



2. D'après le graphique ci-dessus les points communs à **C** et à **D** sont O (0 ; 0) et A(–1 ; 1).

Vérifions ce résultat par le calcul :

$f(x) = g(x)$ signifie $x^2 = -x$

signifie $x(x+1) = 0$

signifie $x = 0$ ou $x = -1$

Les solutions de l'inéquations $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de **C** situés au-dessous de **D**.

D'après le graphique :

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ est l'intervalle $[-1 ; 0]$.

Lecture graphique des solutions :

Équation $f(x) = a$	Équation $f(x) = g(x)$
Les solutions sont les abscisses des points de la courbe C_f situés sur la droite d'équation $y = a$.	Les solutions sont les abscisses des points communs des courbes C_f et C_g.

Inéquation $f(x) \leq a$	Inéquation $f(x) \leq g(x)$
Les solutions sont les abscisses des points de la courbe C_f situés au dessous de la droite d'équation $y = a$.	Les solutions sont les abscisses des points de la courbe C_f situés au dessous de la courbe C_g.

Fonction $x \mapsto \frac{a}{x}$

Activité 1

Soit f une fonction définie sur D.
f est dite impaire si pour tout
$x \in D$, $-x \in D$
$f(-x) = -f(x)$.

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, C désigne sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Soit x un réel non nul, comparer f(x) et f(–x).

On dit que f est une fonction impaire. Graphiquement cela signifie que les point M (x ; f(x)) et M' (–x ; f(–x)) qui sont des points de C sont symétrique par rapport à l'origine du repère.

C admet l'origine du repère pour centre de symétrie

3. a) Soient a et b deux réels de $]0 ; +\infty[$ tels que a < b compléter par < ou >

$\frac{1}{a} \ldots \frac{1}{b}$

f(a) ... f(b).

b) Quel est alors le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$?

4- a) Compléter le tableau suivant :

x	10	10^2	10^3	10^5	10^{10}
f(x)					

Que peut-on dire de f(x) si x devient de plus en plus grand ?

Compléter alors :

f(x) tend vers …. lorsque x tend vers ….

$\lim_{x \to \ldots} f(x) = \ldots$

On dit que l'axe des abscisses est une asymptote à C.

b) compléter le tableau suivant :

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
f(x)					

Compléter alors :

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \ldots$

On dit que l'axe des ordonnées est une asymptote à C.

5. Dresser le tableau de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.

6. Compléter le tableau de valeurs suivant :

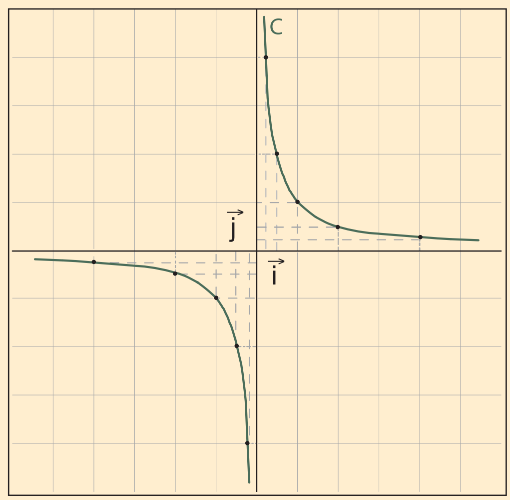
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\frac{1}{x}$					

Placer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan les points de C d'abscisses respectives $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$; 1 ; 2 et 4 puis tracer la courbe C de f (On tiendra compte de la symétrie centrale de centre O).

Savoir

Tableau de variation et courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur IR* :

x	$-\infty$		**0**		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	0



- f est impaire car pour tout réel non nul, on a ; $f(-x) = -f(x)$
- f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$
- f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan est une hyperbole de centre $O(0, 0)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$.

Activité 2

Soit g la fonction définie sur IR* par $g(x) = \frac{2}{x}$.

C est la représentation graphique de g dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que g est impaire, que peut-on déduire pour **C** ?
2. Montrer que g est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.
3.a) Compléter le tableau suivant :

x	10	10^2	10^3	10^5	10^{10}
$\frac{2}{x}$					

b) Déduire la limite de g(x) lorsque x tend vers +∞.
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
c) Compléter le tableau suivant :

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
g(x)					

Déterminer alors : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x)$

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

d) Dresser le tableau de variation de g sur]0 ; +∞[.

4. a) Compléter le tableau suivant :

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
g(x)					

b) Tracer C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Activité 3

Soit h la fonction définie sur IR* par $h(x) = -\frac{4}{x}$.

C est la représentation graphique de h dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que h est impaire, que peut-on déduire pour **C** ?
2. Montrer que h est strictement croissante sur]0 ; +∞[.
3.a) Compléter le tableau suivant :

x	10	10^2	10^3	10^5	10^{10}
$-\frac{4}{x}$					

b) Déduire la limite de h(x) lorsque x tend vers +∞.
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
c) Compléter le tableau suivant :

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$-\frac{4}{x}$					

Déterminer alors : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h(x)$

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Dresser le tableau de variation de h sur] 0 ; +∞[.

4.a) Compléter le tableau suivant :

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4	6	8
h(x)						

b) Tracer C dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Savoir

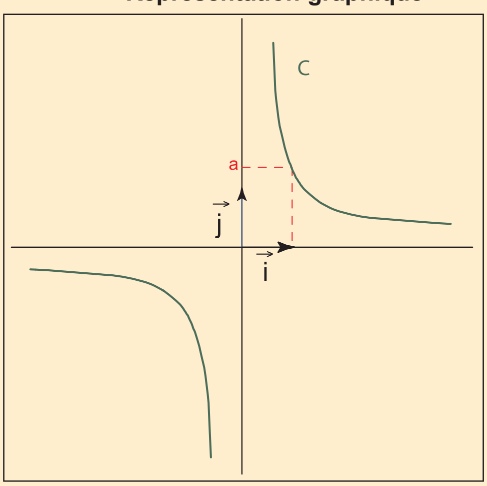
❖ L'étude d'une fonction f définie sur IR* par $f(x) = \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$ permet d'obtenir l'une des deux situations suivantes :

Pour a > 0

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{a}{x}$	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

Représentation graphique

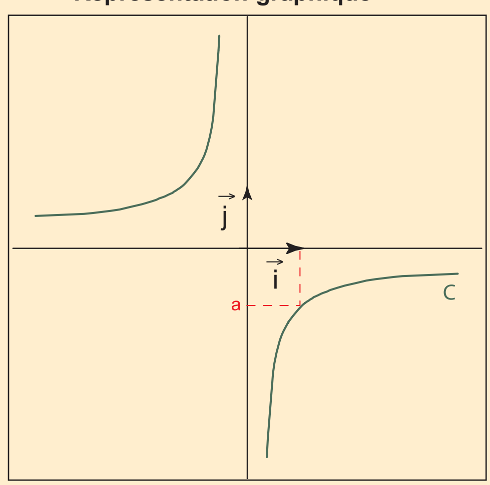


Pour a < 0

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{a}{x}$	0	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0

Représentation graphique



❖ La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{a}{x}$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan est une **hyperbole** de centre O(0 ,0) et d'asymptotes les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$

Exercez-vous

Dresser le tableau de variation et représenter graphiquement dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto \frac{3}{x}$

b) $g : x \mapsto -\frac{1}{2x}$

Fonction $x \mapsto \dfrac{a}{x + b}$

Activité 1

> La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{a}{x + b}$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan est une **hyperbole** de centre $I(-b, 0)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = -b$ et $y = 0$

On se propose de représenter dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan la fonction définie sur $IR \backslash \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$.

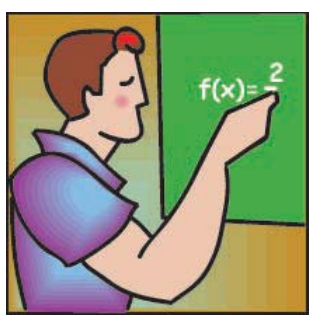
1. Etudier et représenter graphiquement dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la fonction g définie sur IR* par $g(x) = \dfrac{3}{x}$.

2. C et C' désignent respectivement les courbes représentatives dans le repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ des fonctions f et g.

a) x est un réel différent de 1, M est le point de C d'abscisse x et N le point de C' d'abscisse $x - 1$. Montrer que $\overrightarrow{NM} = \vec{i}$.

b) Déduire que le point M est l'image de N par la translation de vecteur $\vec{i}$.

3. Tracer C dans le même repère que C.



L'essentiel du cours

Savoir

❖ La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{a}{x}$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan est une **hyperbole (H)** de centre **I** (0,0) et d'asymptotes les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$

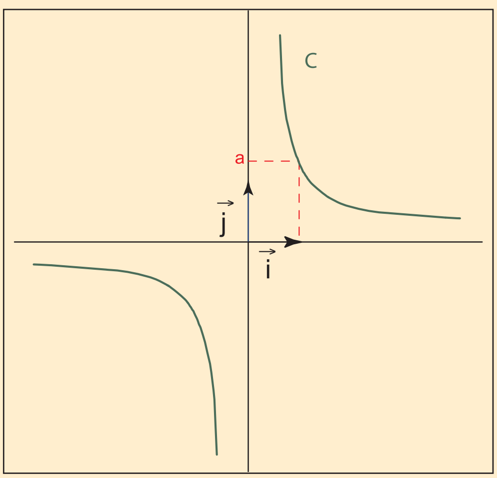
On a :

Pour a > 0

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{a}{x}$	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

Représentation graphique

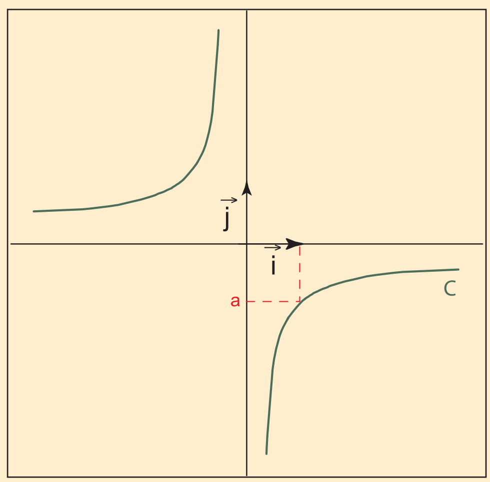


Pour a < 0

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{a}{x}$	0	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0

Représentation graphique



❖ La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{a}{x+b}$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan est une **hyperbole (H')** de centre I (–b,0) et d'asymptotes les droites d'équations $x = -b$ et $y = 0$.

On a : **(H')** se déduit de **(H)** par la translation de vecteur $-b\,\vec{i}$.

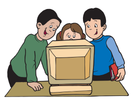
Exercez-vous

Représenter graphiquement dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan les fonctions :

a) $f : x \mapsto \frac{2}{x+1}$

b) $g : x \mapsto -\frac{4}{x+2}$

Réfléchir avec l'ordinateur



Tableaux de valeurs et représentations graphiques

Soit f la fonction définie sur [–3 , 3] par $f(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$

A l'aide d'Excel, on veut donner une allure de la courbe représentative de f.
On se contentera de prendre des valeurs successives de x, comprises entre –3 et 3, avec un pas égal à 0.2

B2 = =(A2+0,5)^2-1,25

	A	B	C	D
1	x	f(x)		
2	-3	5		

Pour cela :

- placer –3 dans la cellule A2 ;
- placer =A2 + 0,2 en A3 ;
- recopier cette formule vers le bas en terminant par la valeur 3 ;
- écrire = (A2 + 0,5)^2 –1,25 en B2 ;

recopier cette formule vers le bas afin d'obtenir les images de tous les nombres de la première colonne.

Pour obtenir une représentation graphique de f dans l'intervalle [–3, 3] :

- sélectionner les valeurs de x et leurs images ;
- choisir le menu «Insertion – Graphique» ;
- prendre «Nuages de points» comme type de graphique ;
- prendre «Nuage de points avec lissage sans marquage des données» comme sous-type de graphique ;
- cliquer sur «Terminer».

1. Que semble être les variations de f sur [–3, 3] ?

2. Quel est le nombre de solutions de l'équation f(x)=0 dans l'intervalle [–3,3] ?

3. Donner graphiquement un encadrement à 1 près de ces solutions.

4. En modifiant le pas, trouver un encadrement à 10^{-2} près de ces solutions.

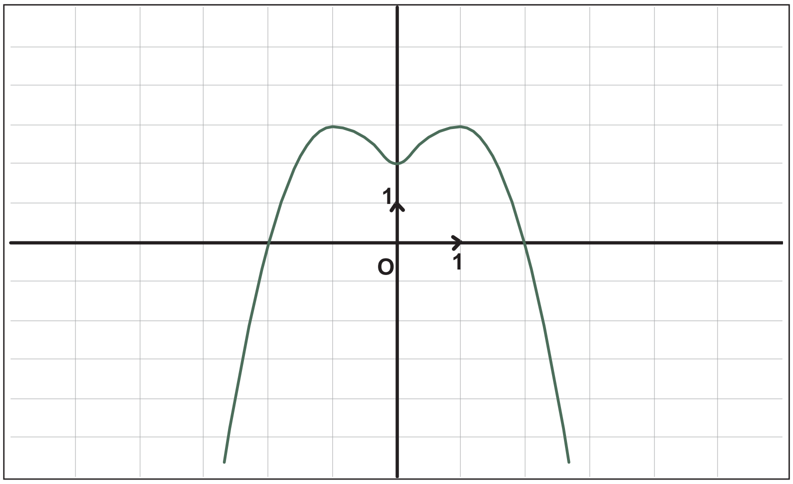
TESTS D'AUTO-EVALUATION

Indiquer la bonne réponse.

1. f est strictement décroissante sur [0,5] alors

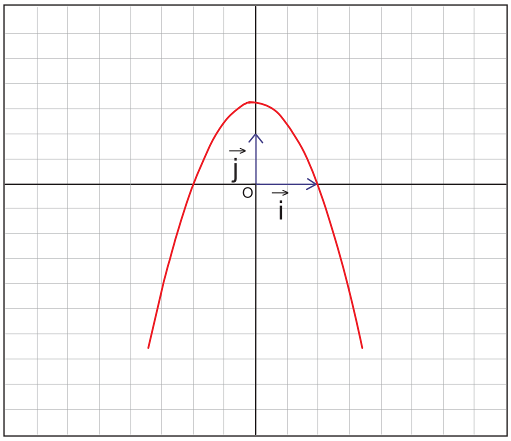
a) $f(0) < f(2)$
b) $f(3) < f(1)$
c) $f(3) > f(5)$

2. La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f.



a) f est paire
b) f est croissante sur $[-2 ; 0]$.
c) f est décroissante sur $[-1 ; 0]$.
d) L'équation $f(x) = 2$ n'admet qu'une solution dans IR_+.

3. La courbe (**C**) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f.



L'équation $f(x) = 0$ a pour solution(s) dans IR

a) -1
b) -1 et 1
c) -1 ou 1
d) 1

L'inéquation $f(x) > 0$ a pour solution(s) dans IR :

a) $\{-1 ; 1\}$
b) $[-1 ; 1]$
c) $]-1 ; 1[$
d) $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

4. La représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \leq 1 \\ x \text{ si } x > 1 \end{cases}$ est :

a) est une droite
b) la réunion de deux demi-droites
c) la réunion de deux segments de droites.

5. La représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto (x-2)^2 + 1$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est une parabole de sommet :

a) S (1 ; 2)
b) S (2 ; 1)
c) S (0 ; 0)

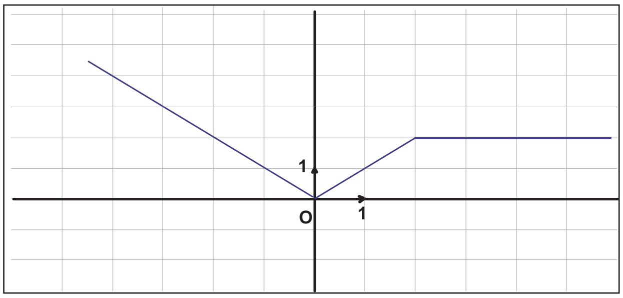
6. C et C' désignent les représentations graphiques dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ des fonctions f et g définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 + 1$, C' se déduit de C par la translation de vecteur :

a) $\vec{i}$
b) $\vec{j}$
c) $\vec{i} + \vec{j}$.

Exercices

1

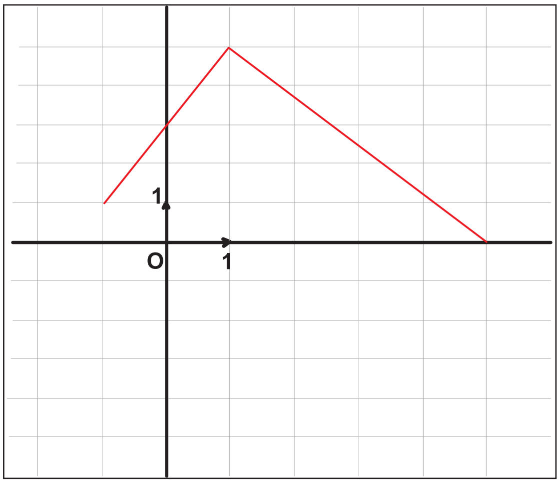
La représentation graphique suivante est celle d'une fonction affine par intervalles h.

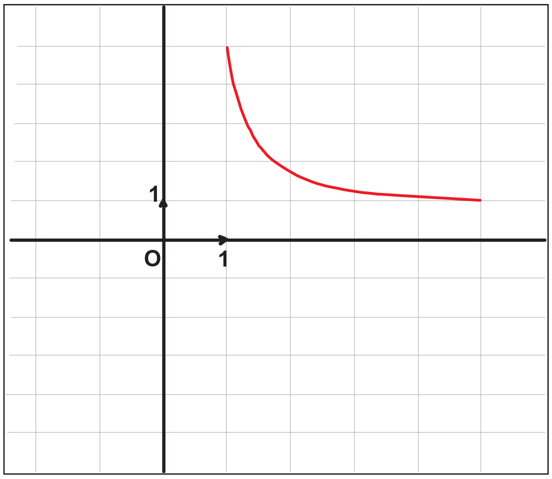


a) déterminer graphiquement les images par h des réels : –1 ,0, 1, 2 et 4.
b) déterminer les antécédents par h des réels : 0, 1 et 2.

2

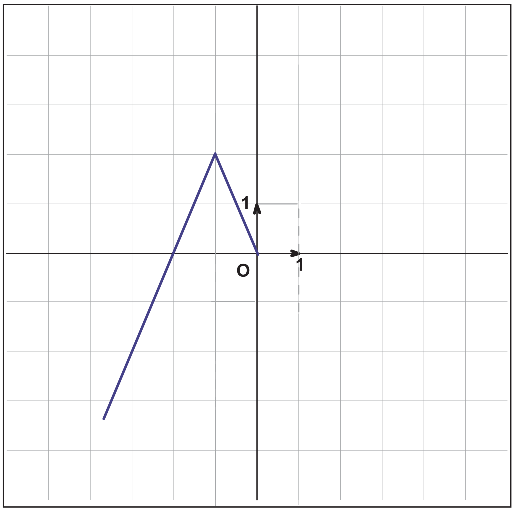
Déterminer par lecture graphique, le sens de variation des fonctions de courbes représentatives ci-dessous





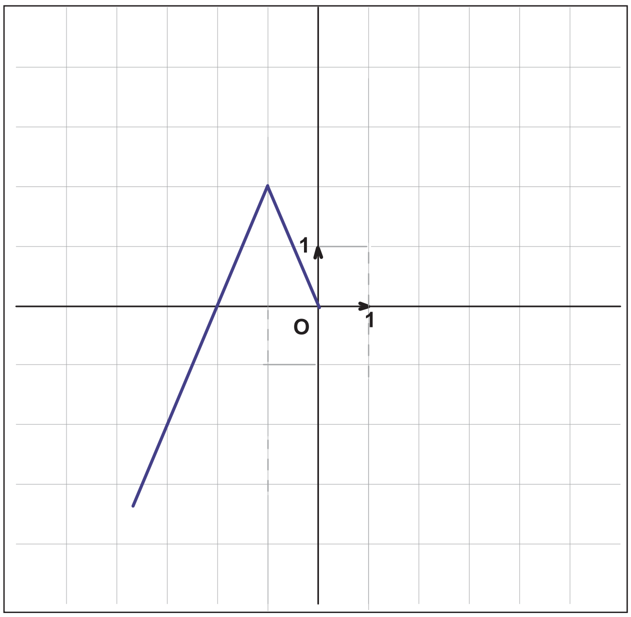
3

La figure ci-dessous représente une partie de la courbe représentative d'une fonction f définie sur IR.
Compléter cette courbe sachant que f est paire.



4

Compléter cette courbe sachant que f est impaire.



5

Voici le tableau de variation d'une fonction définie sur [– 5, 4]

x	-5		0		4
f(x)	6	↘	1	↗	9

Déterminer f(x) sachant que f est une fonction affine par intervalles.

6

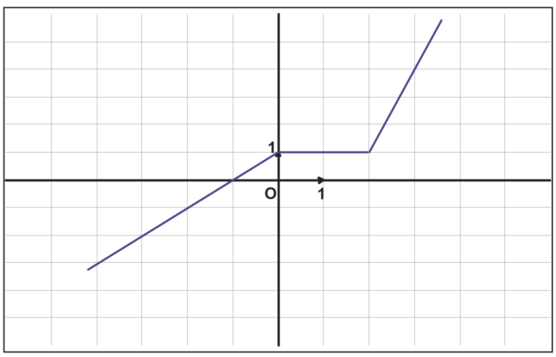
On considère la fonction g définie sur [0,4] par $g(x) = |2x-3| - |x-1|$.
1. Ecrire g(x) sans valeur absolue.
2. Donner la représentation graphique de g.
3. Résoudre graphiquement puis algébriquement l'équation g(x) = 0.

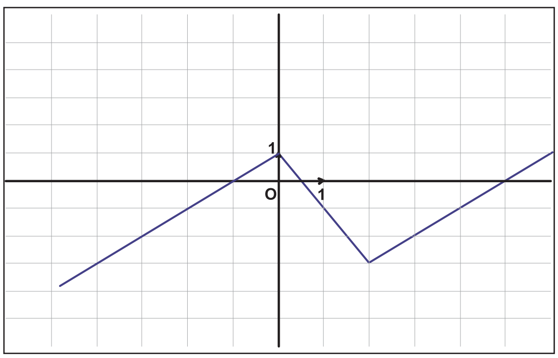
Exercices

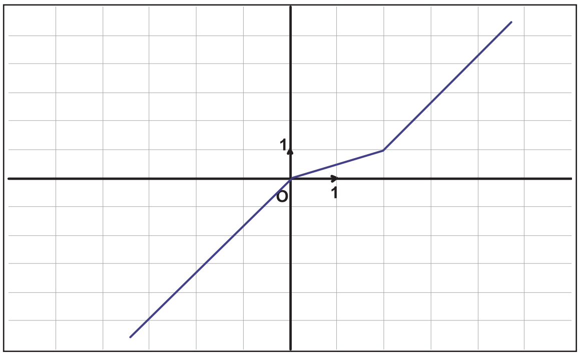
7

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = x + 1 & \text{si } x \in]-\infty\ ;\ 0] \\ f(x) = -2x + 1 & \text{si } x \in [0\ ;\ 2] \\ f(x) = x - 5 & \text{si } x \in]2\ ;\ +\infty] \end{cases}$

1. Déterminer les images par f des réels : – 2, 0, 1, 2, 3 et 5.
2. Une des représentations graphiques ci-dessous représente f . Laquelle ?







8

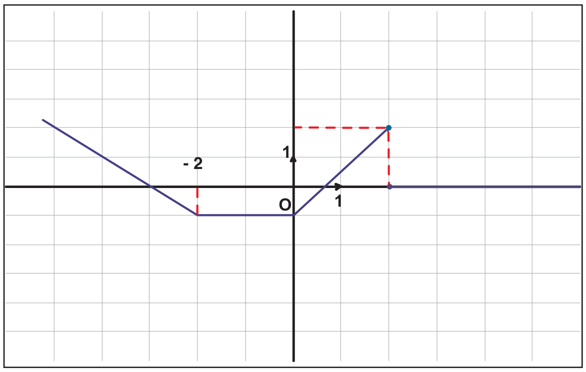
Soit f la fonction affine par intervalles définie sur [–2 ; +∞ [par :

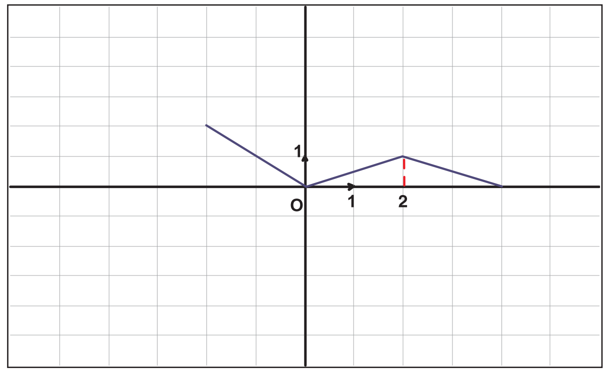
$$\begin{cases} f(x) = -x + 2 & \text{si } x \in]-2\ ;\ 1] \\ f(x) = 2x - 1 & \text{si } x \in [1\ ;\ +\infty] \end{cases}$$

1. Expliquer pourquoi les points A (0 ; 2), B (–1 ; 3),C (1 ; 1), D (3 ; 5) appartiennent à la représentation graphique de f.
2. Placer les points A,B,C et D dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan puis tracer la représentation graphique (C) de f.
3. a) Tracer dans le même repère la droite Δ d'équation y = 4.
b) Déterminer graphiquement les abscisses des points d'intersection de (C) et Δ.
c) Résoudre l'équation f(x) = 4 sur chacun des intervalles [–2 ; 1] et [1 ; +∞ [puis vérifier les résultats de **3.b.**

9

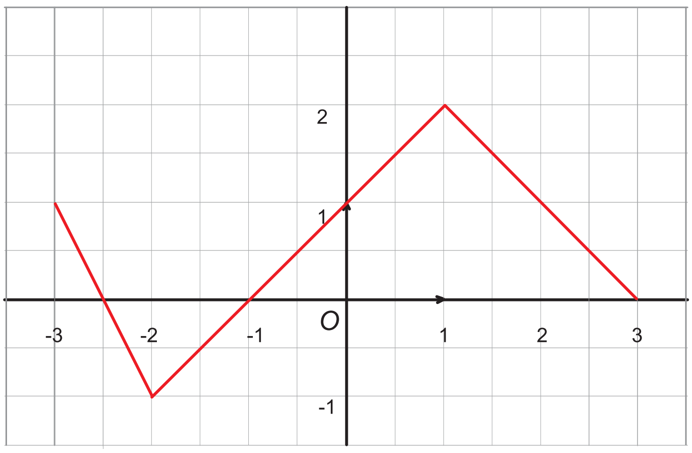
Pour chacun des graphiques ci-dessous, déterminer l'expression de la fonction correspondante.





10

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur [– 3 ; 3].



1. Donner le sens de variation de f.

2. Utiliser le graphique pour résoudre les équations : $f(x) = 1$; $f(x) = 0$; $f(x) = -1$; $f(x) = 3$.

3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = \frac{1}{2}x$ et l'inéquation $f(x) \leq \frac{1}{2}x$.

11

Une agence propose deux types de contrat de location d'une voiture pour une journée :

1^er^ type : 40 dinars de forfait et 0,2 dinars par kilomètre.

2^ème^ type : 20 dinars de forfait et 0,3 dinars par kilomètre.

Pour x kilomètres parcourus, le prix à payer est noté f(x) pour le 1^er^ type de contrat, et g(x) pour le second.

1. a) Donner les expressions de f(x) et g(x).

b) Construire dans un même repère les représentations graphiques de f et de g pour x compris entre 0 et 200.

2. Indiquer, en utilisant le graphique, le type de contrat le plus avantageux suivant le nombre de kilomètres parcourus.

3. Retrouver ces résultats par le calcul.

12

Une équipe de Football propose 3 tarifs pour ses 15 matchs de la saison sportive ; le supporter peut :

– soit payer chaque place plein tarif c'est à dire 5 dinars.
– soit prendre une carte d'abonnement vendue 10dinars et payer alors chaque place 3 dinars.
– soit prendre une carte de fidélité vendue 15 dinars et payer alors chaque place avec une réduction de 50% sur le plein tarif.

1. Exprimer en fonction du nombre x de matchs auxquels le supporter souhaite assister, la dépense f(x), g(x), h(x) suivant le choix qu'il fait.
2. Représenter graphiquement dans un même repère ces 3 fonctions.
3. d'après le graphique,
a) déterminer le tarif le plus intéressant si le supporter désire assister à 5 matchs.
b) conseiller le supporter selon le nombre de matchs auxquels il désire voir.

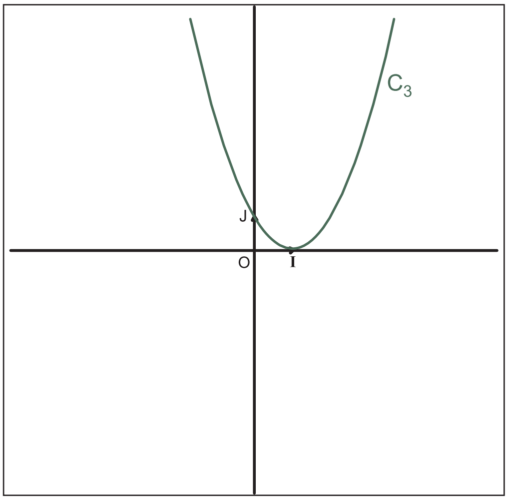
13

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 & \text{si } x \in IR\_ \\ f(x) = -2x + 1 & \text{si } x \in IR_+ \end{cases}$$

Déterminer le sens de variation de f sur IR_ et sur IR_+

14



On donne la représentation graphique d'une fonction f
1. Utiliser le graphique pour résoudre l'équation f(x) = 0
2. Utiliser le graphique pour résoudre l'équation f(x) < 0
3. Utiliser le graphique pour résoudre l'équation f(x) = x+1

15

1. Représenter graphiquement dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les fonctions f et g définies par $f(x) = 2x^2$ et $g(x) = x$.

2. a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$

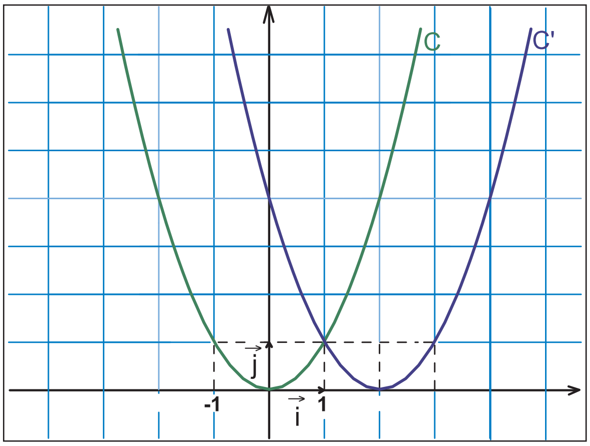
b) Retrouver par calcul les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

16

1. représenter dans un même repère orthogonal les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto -x-1$.

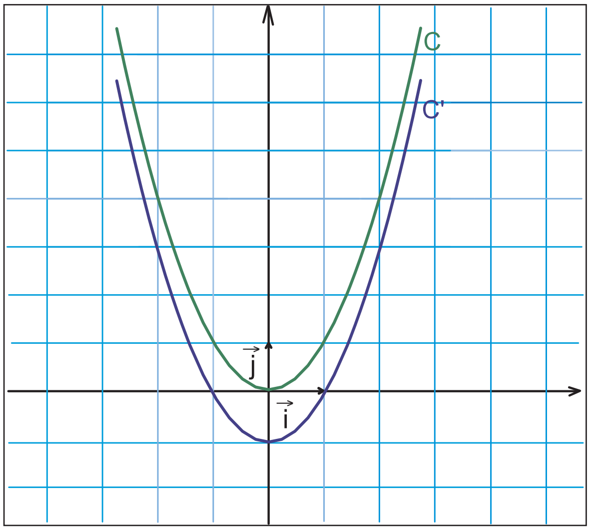
2. Etudier graphiquement le signe de $x^2 + x + 1$.

17



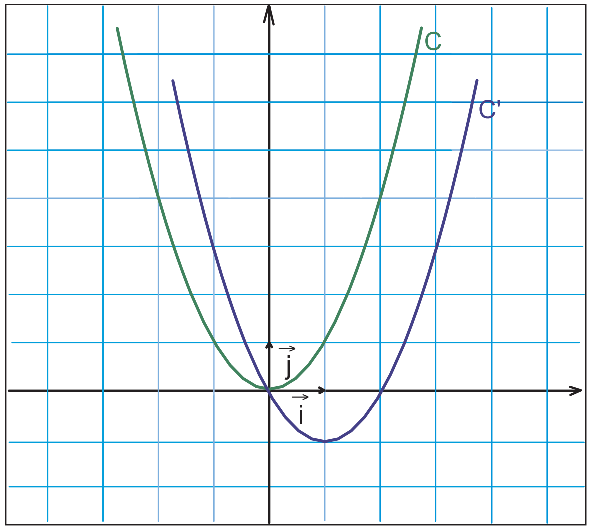
Par quelle translation C' se déduit de C ?

18



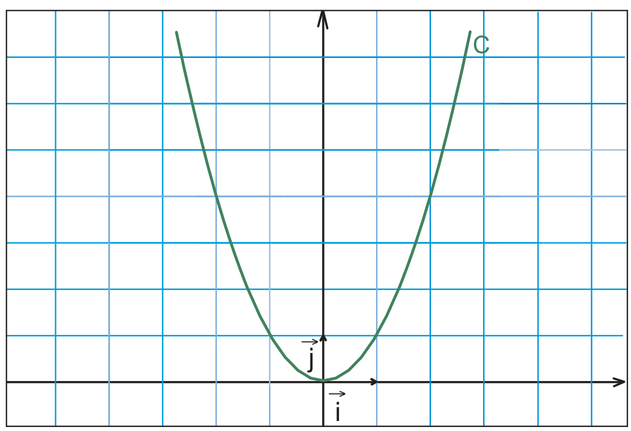
Par quelle translation C' se déduit de C ?

19



Par quelle translation C' se déduit de C ?

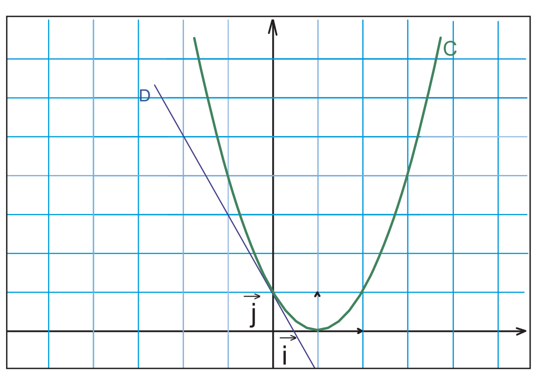
20



Tracer la courbe C' qui se déduit de C par la transformation de vecteur $-2\vec{i}$.

21

On constate sur le dessin qu'autour du point A(0, 1), la droite D : $y = -2x + 1$ est très proche de la parabole P définie par $f(x) = (x-1)^2$.



Utiliser cette remarque pour donner des valeurs approchées (sans calculatrice) de

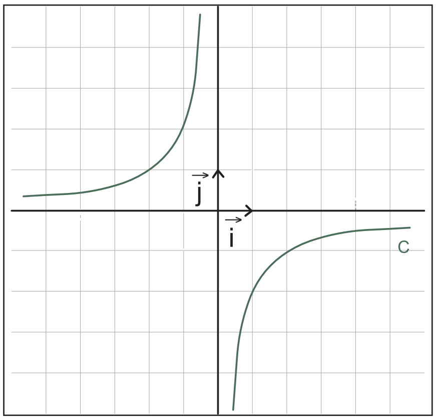
a) $(0{,}009)^2$

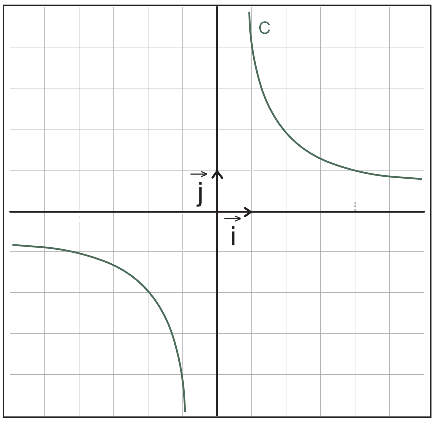
b) $(0{,}0009)^2$

c) $(1{,}001)^2$

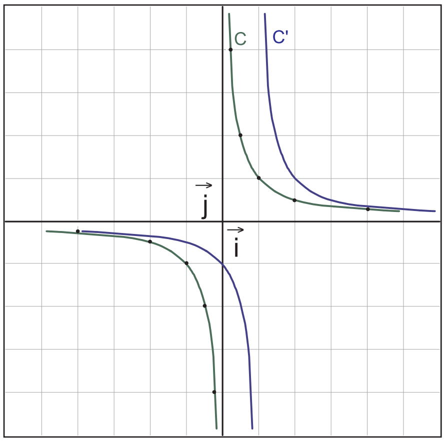
22

L'une des deux courbes ci-dessous représente la fonction f définie sur IR* par : $f(x) = \frac{-1}{2x}$, laquelle.





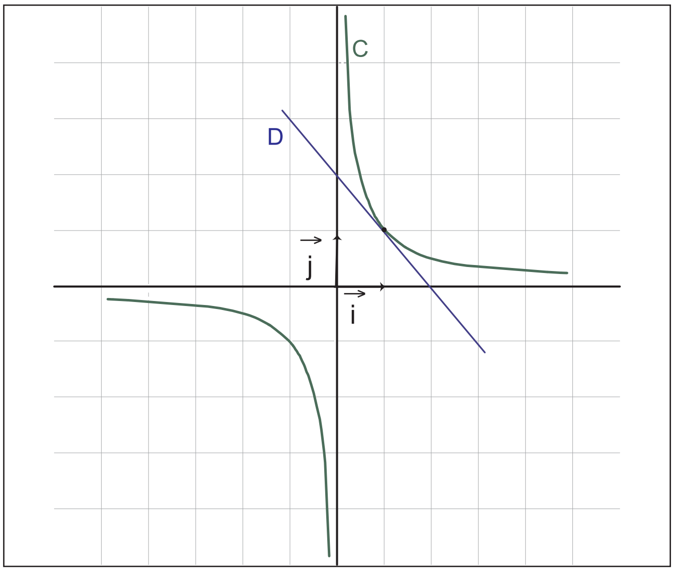
23



Par quelle translation C' se déduit de C ?

24

On constate sur le dessin qu'autour du point A(1,1), la droite D : $y = -x+2$ est très proche de l'hyperbole H définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.



Utiliser cette remarque pour donner des valeurs approchées (sans calculatrice) de

a) $\frac{1}{0{,}99}$

b) $\frac{1}{0{,}999}$

c) $\frac{1}{1{,}001}$

25

f est la fonction $x \mapsto -x+3$ définie sur IR

g est la fonction $x \mapsto \frac{2}{x}$ définie sur IR* dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; C et D sont les courbes représentant g et f.

1. Tracer C et D.
2. Démontrer que le point d'abscisse 1 de D appartient à C.
3. Trouver graphiquement le second point d'intersection de ces courbes.
4. Un rectangle a pour aire $2m^2$ et pour périmètre 6m.
En utilisant le graphique précédent, trouver sa longueur et sa largeur.

26

1. Tracer la représentation graphique de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$

2. Trouver à l'aide du graphique les solutions de l'encadrement $\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 1$

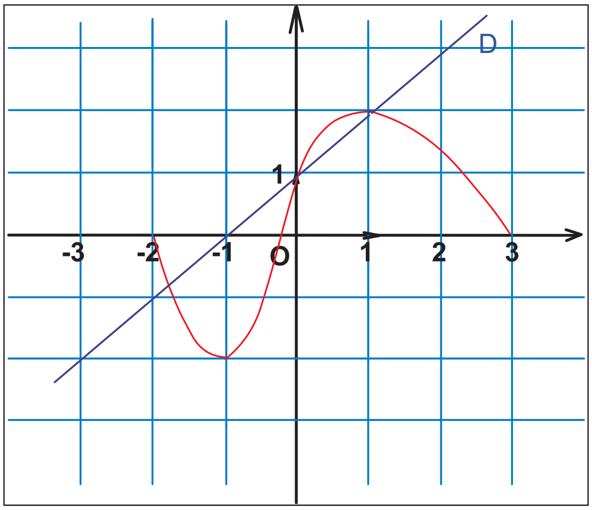
27

1. Représenter dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite Δ d'équation $y = x+1$ et l'hyperbole **H** d'équation $y = \dfrac{1}{x+1}$, en précisant les coordonnées des points d'intersection.

2. A l'aide de ce graphique dresser le tableau de signe de la fonction définie sur $IR\setminus\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - x - 1$.

28

Ci-dessous on a tracé une droite D et la représentation graphique (C) d'une fonction f définie sur [–2 ; 3].



1. Entourer la bonne réponse.
La droite D a pour équation :

$y = 2x-1$; $y = x+1$; $y = \dfrac{1}{2}x+1$; $y = -\dfrac{1}{2}x+2$

2. Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

	AFFIRMATIONS	VRAI ou FAUX
1	L'image de – 2 par f est –2	
2	0 est l'antécédent de 0 par f	
3	f (–2) = f(2)	
4	L'équation f(x) = 0 a deux solutions dans l'intervalle [–2 ; 3]	
5	La fonction f est croissante sur [–1 , 1]	
6	La fonction f est décroissante sur [-2 ; 0]	
7	L'équation f(x) = x+1 a trois solutions dans [–2 ; 3]	

29

Soit la fonction définie sur IR par $f(x) = -2x^2+4x+1$

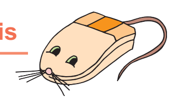
1. Montrer que $f(x) = -2\left(x-1\right)^2 + 3$.

2. a) Construire dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan la courbe C_1 d'équation $y = -2x^2$.

b) Soit C_2 la courbe d'équation $y=-2(x-1)^2$. Expliquer comment on peut obtenir C_2 a partir de C_1 ? Tracer C_2 dans le même repère que C_1.

c) Soit C la courbe représentative de la fonction f. Expliquer comment on peut construire C à partir de C_2 ? Tracer alors C dans le même repère que C_1 et C_2.

30 A vos souris



On se propose de tracer les courbes des fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-4;4]$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

Pour cela :

- Placer -4 dans la cellule A2 ;
- Ecrire dans la cellule A1 le titre de la colonne «x» ;
- Ecrire dans la cellule B1 le titre de la colonne «f(x)» ;
- Ecrire dans la cellule C1 le titre de la colonne «g(x)» ;
- Placer =A2+0,2 en A3 ;
- Recopier cette formule vers le bas en terminant par la valeur 4 ;

a) Quelle formule doit-on placer dans les cellules B2 et C2 avant de «l'étendre» vers le bas ?

b) Représenter graphiquement les fonctions f et g.

4 pas en avant, 3 pas en arrière.

En partant de A qui est une voyelle, j’avance de 4 lettres dans le sens de la flèche, et j’arrive à la lettre E, qui est également une voyelle.
Je continue ensuite selon le principe suivant :

- si la lettre sur laquelle je suis arrivé est une voyelle, j’avance de 4 lettres dans le sens de la flèche.
- si cette lettre est une consonne alors je recule de 3 lettres.

En partant de A? qui est ma première lettre, et en continuant selon la même règle expliquée plus haut, **quelle sera ma 96ème lettre ?**

Enigmes Mathématiques
Fédération française des jeux mathématiques

$$\pi = 3,1415926535897932384626433832 79...$$

Les moyens mnémotechniques

...Il existe un moyen mnémotechnique pour retenir les trente premières décimales de π. C'est de retenir par cœur un petit poème fabriqué de telle façon que les mots aient chacun le nombre de lettres égal à la décimale correspondant à sa place. Nous le citons en entier, bien qu'il soit très connu :

Que j'' aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

Immortel Archimède, artiste, ingénieur,
8 9 7 9

Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
3 2 3 8 4 6 2 6

Pour moi ton problème eut de sérieux avantages.
4 3 3 8 3 2 7 9

Comme on le voit, ce quatrain n'est guère fameux on peut s'amuser à le remplacer par quelques phrases plus sensées ; un concours baroque à ce sujet donna le résultat suivant, qui mériterait d'être encore grandement amélioré. Le problème est difficile (et d'ailleurs, il faut bien l'avouer, sans grand intérêt) :
«Car j'aime à faire apprécier ce nombre, objet des soins patients, longtemps répétés, engendrés par ce dur problème grec : «carrer le cercle. Même son nom habituel est un symbole (périmètre) utile.»
Le jeu s'arrête là, et pour cause ; si on a gagné une décimale sur le quatrain précédent, on peut difficilement aller plus loin, puisque la suivante est un 0.
π = 3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 50...

D'après *«Les nombres et leurs mystères»*
André Warusfel

Les mathématiques arabes

L’essor des mathématiques arabes commence au VIIe siècle après J.- C., c’est-à-dire aux origines de la religion islamique.
Elles vont se développer à partir de multiples problèmes posés par le commerce, l’architecture, l’astronomie, la géographie, l’optique … et vont se caractériser par une synthèse profonde entre les aspirations visant à la résolution de ces problèmes et un travail théorique intense.
Dans le domaine de l’élaboration du calcul algébrique tant abstrait que technique, de la constitution de la théorie des équations, des méthodes algorithmiques au carrefour de l’algèbre et de l’arithmétique, les inventions sont incontestables et les progrès particulièrement décisifs.
On peut distinguer deux étapes dans leur développement : d’abord l’assimilation de l’héritage grec et oriental aux VIIe et VIIIe siècles. Bagdad est le premier grand centre scientifiques sous les règnes d’Al-Mansur (754 - 775) et de Haroun Al-rachid (786 - 809), les bibliothèques sont nombreux et les ouvrages scientifiques souvent copiés.
La traduction des ouvrages de l’Antiquité grecque s’y poursuivra intensément (Euclide, Archimède, Appollonius, Héron, Ptolémée, Diophante), ainsi que l’étude des ouvrages de l’Inde, de la Perse et de la Mésopotamie.
Mais, dés le IX siècles, il y a formation d’une véritable culture mathématiques arabe propre, et les nouveaux travaux sortent de l’orbite des mathématiques hellènes.
Le premier savant éminent de l’école de Bagdad est Muhammad Al-Kwarizmi, qui exerça son activité dans la première moitié du IX siècle au sein d’un groupe de mathématiciens et astronomes qui travaillèrent *à la Maison de la Sagesse* (بيت الحكمة) , sorte d’académie établie à Bagdad sous le règne d’L-Ma’Mun (813 - 833). Cinq de ses ouvrages en partie remaniés sont conservés, et, en particulier, ses deux traités sur l’arithmétique et l’algèbre ont exercé une influence décisive ultérieurement.

5 STATISTIQUES

«Les statistiques. Ca vous fait penser à des choses qu'on n'imaginerait jamais autrement»

[Keith Ridgway]

STATISTIQUES

VÉRIFIER VOS ACQUIS

ACTIVITÉS

COURS

Quartiles
Variance-Ecart type

EXERCICES

S'auto-évaluer
Exercices
Informatique : A vos souris

POINT D'HISTOIRE

Vérifier vos acquis

1

Ce tableau donne la répartition des revenus mensuels des salariés d'une entreprise.

Revenu mensuel (en dinars)	Effectifs
300	15
500	9
800	4
1200	2
1800	1

Diagramme en bâtons :
Il est formé par des segments de droites dont la longueur est proportionnelle aux effectifs ou aux fréquences.

1. Combien de salariés de cette entreprise reçoivent 300D par mois ?
2. Quel est l'effectif total de cette entreprise ?
3. Quelle est la fréquence des ouvriers qui reçoivent 800D ? Exprimer cette fréquence en pourcentage.
4. Quelle est la fréquence en pourcentage des ouvriers qui reçoivent 500D ou moins ?
5. Quel est le revenu mensuel moyen M des salariés de cette entreprise ?
6. Représenter le tableau des revenus de cette entreprise par un diagramme en bâtons.

2

Diagramme circulaire :
Un disque est partagé en secteurs dont l'angle au centre est proportionnel à l'effectif ou à la fréquence.

Dans une boutique les tee-shirts sont vendus dans quatre tailles différentes S, M, L et XL. Les ventes mensuelles sont données par le tableau suivant :

Taille	S	M	L	XL
Nombre de ventes	8	16	12	4

a) Calculer les fréquences de vente pour chaque taille
b) Tracer le diagramme circulaire représentant cette série statistique.

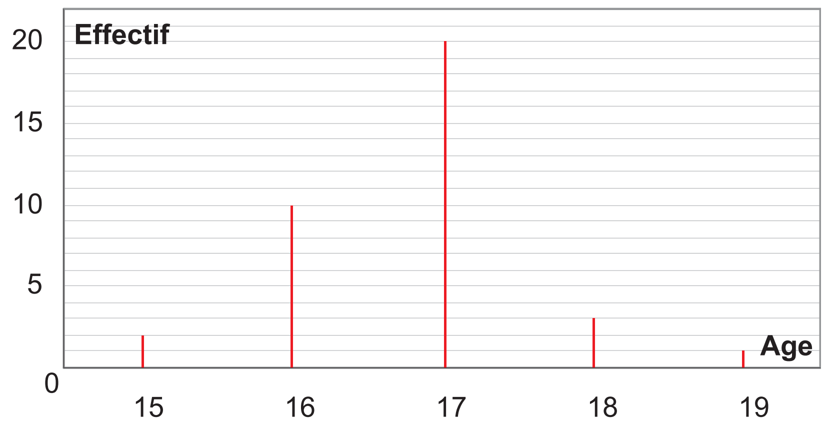
3

On a relevé le temps moyen (en minutes) de parcours de 34 élèves de chez eux au lycée :
4 ; 4 ; 5 ; 5 ; 5 ; 6 ; 6 ; 8 ; 8 ; 8 ; 8 ; 10 ; 12 ; 12 ; 14 ; 16 ; 16 ; 16 ; 17 ; 18 ; 20 ; 22 ; 25 ; 25 ; 25 ; 27 ; 27 ; 30 ; 30 ; 30 ; 32 ; 32 ; 40 ; 42.

1. Présenter les résultats précédents sous forme de classes d'amplitude 10 : [0 ; 10[, [10 ; 20[, … , [40 ; 50[.
2. Construire l'histogramme de la série obtenue.
3. Déterminer graphiquement le mode et la médiane de cette série. Quelles significations ont ces paramètres ?

4

1. Ce diagramme en bâtons donne la répartition des âges des élèves d'une classe de 2ème Lettres.

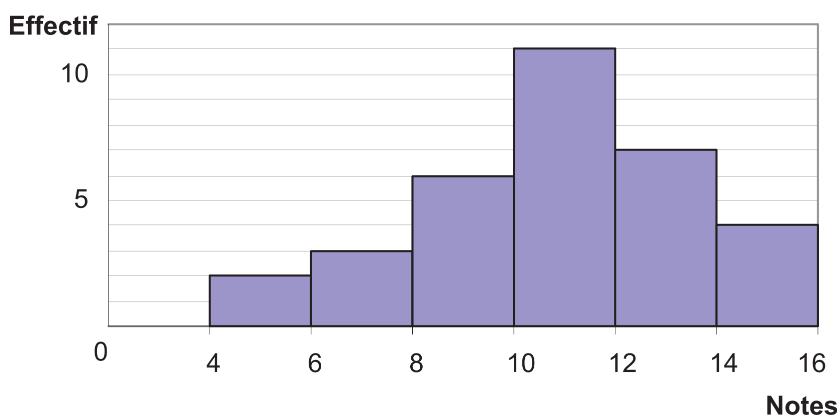


Préciser :

a) Le nombre d'élèves de cette classe qui ont 17 ans ?
b) L'effectif total de cette classe.
c) L'âge moyen de cette classe.

Histogramme :
Lorsque les valeurs du caractère sont groupées en classes, la série statistique est représentée par des rectangles dont les surfaces sont proportionnelles aux effectifs ou aux fréquences correspondants

2. Cet histogramme donne la répartition des notes données dans un devoir de mathématiques pour une classe de 1ère année secondaire.



Préciser :

1. a) L'effectif total de cette classe.
b) La note moyenne M donnée dans ce devoir.
2. Ya-t-il autant d'élèves de cette classe qui ont obtenu une note supérieure à M que d'élèves qui ont obtenu une note inférieure à M ?.

Activités

Quartiles :

Activité 1

Le tableau ci-dessous fournit les âges de 29 personnes de 10 à 50 ans, elles ont été triées par âge croissant.

10	10	12	12	12	13
13	15	16	17	17	18
19	19	20	22	22	25
27	31	31	34	36	40
42	44	46	48	50	

1. Quel est l'age minimal ? Quel est l'age maximal ? Calculer l'étendu des âges.

2. a) Déterminer l'age qui partage la population en deux sous groupes d'effectifs égaux.

b) Justifier qu'un quart de l'effectif est âgé de 15 ans ou moins.

c) Déterminer le plus petit age **a** pour lequel trois quarts de l'effectif a un âge inférieur ou égale à **a**.

15 est appelé premier **quartile** de la série statistique.
a est le **troisième quartile** de cette série.

Activité 2

Le tableau suivant donne les résultats d'une enquête effectuée pour étudier le temps quotidien consacré au transport de 400 employés (unité : 1 min).

Classes	[0 ; 20[	[20 ; 40[	[40 ; 60[	[60 ; 80[	[80 ; 100[
Effectifs	50	100	160	70	20

1. Construire la courbe P des fréquences cumulées croissantes de cette série.

2. Soient Δ et Δ' les droites horizontales passant par les points M et M' de l'axe des ordonnées correspondant respectivement à des fréquences de 25% et de 75%.

Δ et Δ' coupent P respectivement aux points I et I'.

– Lire sur le graphique une valeur approchée de l'abscisse x de I et une valeur approchée x' de I'.
– Justifier qu'un quart environ des employés consacrent chaque jour au transport un temps inférieur à x et trois quarts un temps supérieur.
– Indiquer une propriété analogue pour la valeur x'.

Savoir

Quartiles

Soit une série statistique (x_1 , x_2 , ...x_n) tels que : $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$.

- Les quartiles partagent cette série en quatre parties :
- Le premier quartile Q_1 est la plus petite valeur x_i telle qu'au moins 25% des données soient inférieures ou égales à Q_1.
- Le troisième Quartile Q_3 est la plus petite valeur x_i telle qu'on au moins 75% des données soient inférieures ou égales à Q_3.
- La médiane est le deuxième quartile.
- L'intervalle [Q_1 ; Q_3] est l'intervalle interquartile.

Recherche pratique des quartiles

Lorsqu'on écrit la liste par ordre croissant des valeurs du caractère, chacune d'elles répétée autant de fois que son effectif, N étant l'effectif total, alors :

- Si N/4 est un entier n, le premier quartile Q_1 est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif cumulé croissant n et le troisième quartile Q_3 est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif cumulé croissant 3n.
- Si N/4 n'est pas un entier, le premier quartile Q_1 est la valeur du caractère qui correspond à l'effetif cumulé croissant immédiatement supérieur à N/4 et le troisième quartile Q_3 est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif cumulé croissant immédiatement supérieur à 3N/4.

Exemple :

On considère la série statistique.

Valeurs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Effectifs	4	4	5	5	5	5	6	7	8	8	8	8	9
Valeurs	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
Effectifs	10	11	12	12	14	15	15	15	16	16	16	18	

- $252 \times 0{,}25 = 63$ donc le 1er quartile est $Q_1 = 10$.
- $252 \times 0{,}75 = 189$ donc le 3ème quartile est $Q_3 = 21$

L'intervalle interquartile est [10 ; 21]. Il contient au moins la moitié centrale des notes.

Exercez-vous

1

On considère la série ordonnée des notes obtenues à un test de mathématiques par 36 élèves d'une classe de 2ème Lettres.

4	4	5	5	5	6	4	4	4	4	4
9	10	10	11	11	11	11	12	12	12	12
13	13	13	14	14	15	15	15	16	17	17
17	18	18								

Déterminer le premier et le troisième quartile.

2

Le tableau suivant donne la répartition des âges des professeurs d'un même lycée.

Classes d'âge	[20 ; 25[	[25 ; 30[	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60[
Effectifs	2	4	6	8	18	15	5	2

a) Combien de professeur a-t-on dans ce lycée ?
b) Quel est l'âge moyen des professeurs du lycée ?
c) Représenter le polygone des effectifs cumulés croissants de cette série.
d) Lire sur le graphique la médiane M_e, les quartiles Q_1 et Q_3.

3

Une enquête sur la durée des entretiens téléphoniques a donné les renseignements suivants : (unité : 1min)

Moins de 2	[2 ; 4[	[4 ; 6[	[6 ; 8[	[8 ; 10[	plus de 10
14	16	25	15	17	13

Déterminer les quartiles et préciser l'intervalle interquartile.

Variance – Ecart type :

Activité 1

On a relevé les notes mises par un professeur de mathématiques à deux classes A et B de 30 élèves chacune.

Classe A : 4 ; 6 ; 6 ; 8 ; 8 ; 9 ; 9 ; 9 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 13 ; 13 ; 13 ; 14 ; 14 ; 16 ; 16 ; 18.

Classe B : 2 ; 3 ; 4 ; 4 ; 5 ; 5 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 8 ; 8 ; 8 ; 10 ; 11 ; 11 ; 12 ; 14 ; 14 ; 14 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 17 ; 17 ; 18 ; 18 ; 19 ; 20.

1. Compléter les tableaux suivants :

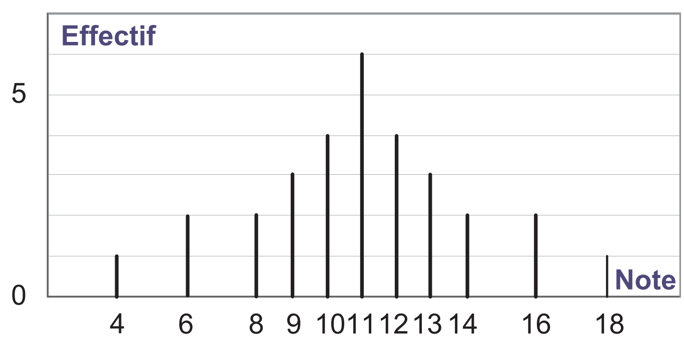
Notes	4	6	8	9	10	11	12	13	14	16	18
Effectifs											

Classe B

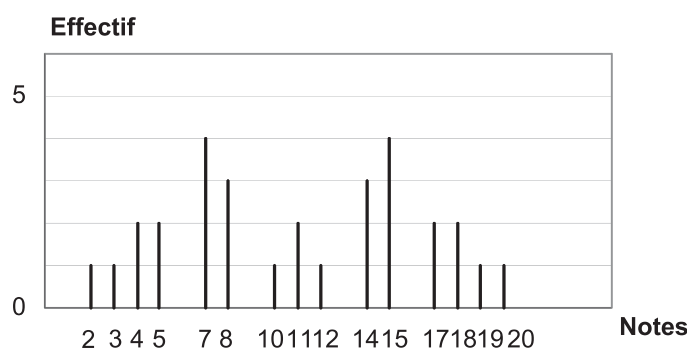
Notes	2	3	4	5	7	8	10	11	12	14	15	17	18	19	20
Effectifs															

2. Vérifier que les deux séries ont même moyenne et même médiane.
3. On considère les diagrammes correspondants à ces deux séries.

Classe A



Classe B



L'observation de ces deux diagrammes permet t-elle d'avoir des renseignements sur la dispersion des notes dans chacune des classes A et B ?

L'écart à la moyenne d'une valeur x_i à la moyenne $\overline{x}$ est $|x_i - \overline{x}|$

4. On se propose de trouver un moyen qui permet d'apprécier cette dispersion.

a) On considère la série relative à la classe A.

- Compléter le tableau suivant :

Notes (valeurs du caractère)	4	6	8	9	10	11	12	13	14	16	18
Effectifs											
Ecart à la moyenne $\lvert x_i - \overline{x} \rvert$											
Carrés des écarts $\lvert x_i - \overline{x} \rvert^2$											

- Calculer la moyenne V de la nouvelle série dont les valeurs sont les carrés des écarts à la moyenne.
- Calculer $\sqrt{V}$.

Cette moyenne est appelée **variance** de la série 1, notée V

b) Calculer de même la variance et l'écart type de la série relative à la classe B.

$\sqrt{V}$ est appelée **écart type** de la série 1.

c) Comparer les deux écarts types.

L'écart type est une mesure de dispersion liée à la moyenne.

Par exemple :

- La série relative à la classe A est resserrée autour de la moyenne car son écart type est faible.
- La série relative à la classe B est dispersé de part et d'autre de la moyenne car son écart type est plus important.

Savoir

On considère la série statistique (x_i , n_i), $1 \leq i \leq p$ d'effectif total n.

La variance de cette série est le réel positif V défini par :

$$V = \frac{1}{n}\left(n_1 (x_1 - \overline{x})^2 + n_2 (x_2 - \overline{x})^2 + ... + n_p (x_p - \overline{x})^2\right)$$

$$V = \frac{1}{n}\left(n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + ... + n_p x_p^2\right) - (\overline{x})^2$$

On peut aussi définir la variance d'une série comme étant la moyenne des carrés des écarts des valeurs du caractère à la moyenne de la série.

L'écart type d'une série statistique est la racine carrée de la variance de cette série .
L'écart type mesure la dispersion des valeurs de la série autour de la moyenne : plus les valeurs sont dispersées, plus l'écart type est grand.

Etapes à suivre dans le Calcul de l'écart type d'une série statistique (x_i , n_i)

- Calculer la moyenne $\overline{x}$.
- Pour chaque valeur x_i, calculer le carré de l'écart $|x_i - \overline{x}|$.
- Pour chaque valeur x_i, calculer le carré de l'écart $|x_i - \overline{x}|^2$.
- Pour chaque valeur x_i, calculer le produit $n_i |x_i - \overline{x}|^2$.
- Calculer la somme de tous ce produits.
- Calculer la moyenne $V = \frac{1}{n}\left(n_1 (x_1 - \overline{x})^2 + n_2 (x_2 - \overline{x})^2 + ... + n_p (x_p - \overline{x})^2\right)$.
- Calculer la racine carrée de cette moyenne.

Exercez-vous

1

Calculer la moyenne et l'écart type des séries suivantes , puis comparer leur dispersion

a)

Valeur	5	6,5	7	12	16	20,5
Effectif	11	50	187	193	46	13

b)

Valeur	5	6,3	9,5	10,2	15,3	20,5
Effectif	9	18	265	316	30	6

2

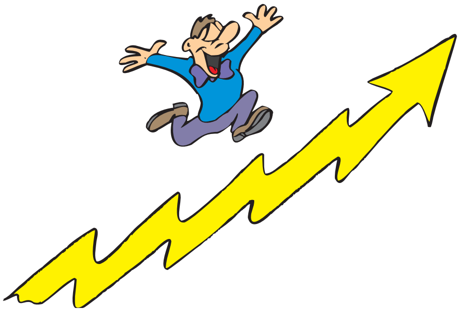
Un professeur d’arabe et un professeur de philosophie discutent de leur classe de terminale lettres concernant leur niveau et s’il s’agit d’une classe homogène ou hétérogène
Enrichir cette discussion en utilisant la moyenne et l’écart type, à partir des notes obtenues

Notes en arabe

8	10	13	13	16	5	10	8	8	15	5	8	5	5	11	12	9	9	8	7	13	12
10	13	11	9	16	12	8	6	12	11	13	6	9	8	10	11	6	6	15	13	11	5

Notes en philosophie

8	10	11	12	11	11	12	8	8	9	10	10	9	11	8	14	9	9	10	12	13	12
11	13	11	8	10	9	7	5	10	10	12	9	9	8	10	11	8	8	13	13	11	7



Paramètres de position

On considère une série statistique (x_i , ni) d'effectif total n :

Valeurs	x_1	x_2	...	x_p
Effectifs	n_1	n_2	...	n_p

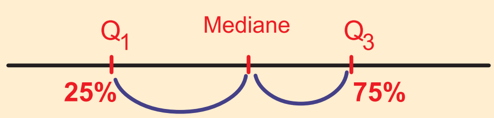
- Le **mode** est une valeur du caractère pour laquelle l'effectif est maximal (une série peut avoir plusieurs modes)
- La **médiane** est la valeur du caractère partageant la population en deux groupes de même effectif.
  – Si l'effectif total de la série est impair alors la médiane est la valeur centrale de cette série.
  – Si l'effectif total de la série est pair alors la médiane est la demi somme des deux valeurs centrales.
- La **moyenne** est donnée par la formule :

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p).$$

$\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_px_p$ ou $f_1, f_2, ..., f_p$ sont les fréquences de cette série.

- **Quartiles**

Le premier quartile Q_1 est la plus petite valeur telle qu'au moins 25% des données soient inférieures ou égales à Q_1.
Le troisième quartile Q_3 est la plus petite valeur telle qu'au moins 75% des données soient inférieures ou égales à Q_3.
L'intervalle [Q_1 ; Q_3] est l'intervalle interquartile.



Paramètres de dispersion

- **L'étendu** est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur du caractère.
- La **variance** de cette série est le réel positif V défini par :

$$V = \frac{1}{n}\left(n_1 (x_1 - \overline{x})^2 + n_2(x_2 - \overline{x})^2 + \dots + n_p(x_p - \overline{x})^2\right)$$

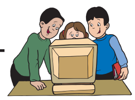
$$V = \frac{1}{n}\left(n_1\, x_1^2 + n_1\, x_1^2 + \dots + n_p\, x_p^2\right) - (\overline{x})^2$$

On peut aussi définir la variation d'une série comme étant la moyenne des carrés des écarts des valeurs du caractère à la moyenne de la série.

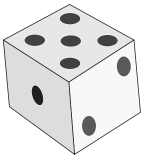
- **L'écart type** de cette série statistique est la racine carrée de la variance de cette série.

L'écart type mesure la dispersion des valeurs de la série autour de la moyenne : plus les valeurs sont dispersées, et plus l'écart type est grand.

Réfléchir avec l'ordinateur



Simulation du lancer d'un dé à six faces numérotées de 1 à 6



1. Dans la cellule A1, Tapez la formule suivante :

= ALEA()

Puis, tapez sur **Entrée**.

ALEA() va faire apparaître dans la case A1 un nombre choisi au hasard par l'ordinateur. Ce nombre est compris entre 0 et 1 sans jamais être à 1.

Indiquer le nombre obtenu.

2. Pour obtenir un nombre entier compris entre 1 et 6 (ce qui apparaît sur les faces d'un dé)

Cliquez sur la case A1, puis tapez la formule suivante :

ENT(ALEA()*6)+1

Tapez **Entrée**.

Indiquez le nombre obtenu.

3. Nous allons maintenant demander à l'ordinateur de simuler 200 lancers du dé et examiner les résultats obtenus.

Pour cela :

Copier la cellule A1. Sélectionnez la plage de la cellule A1 jusqu'à J20 puis coller. Vous obtenez 200 nombres choisis au hasard (on dit aléatoires) par l'ordinateur. Cliquez sur une cellule vide en dehors de votre tableau et tapez plusieurs fois sur la touche **Suppr**. Vous remarquerez que cela relance la génération des nombres aléatoires !

4. Nous allons maintenant comptabiliser le nombre de fois où est sorti le 1. Pour cela taper dans une cellule vide la formule :

=NB.SI(A1:J20 ; 1)

Tapez **Entrée**.

Procéder de même pour comptabiliser le nombre de fois où est sorti le 2, 3, 4, 5 et 6.

Compléter alors le tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6
Nombre de sorties						
Fréquences (en %)						

TESTS D'AUTO-EVALUATION

Q.C.M

Cocher la bonne réponse

1. La couleur des voitures de l'ensemble des personnels d'un lycée est un caractère :
- qualitatif
- quantitatif

2. La taille est un caractère quantitatif :
- discret.
- continue

3. Le nombre de frères et sœurs est un caractère quantitatif :
- discret.
- continue

4. Le(s) mode(s) de cette série : 5, 6, 7, 7, 7, 9, 9, 10, 10, 10, 15, 16, 17. est (sont)
- 10
- 7
- 10 et 7

5. La moyenne de cette liste de nombres : 5, 6, 7, 7, 7, 9, 9, 10, 10, 10, 15, 16, 17 est
- 9
- 10
- 9,9

6. La série statistique 3 ; 6 ; 8 ; 4 ; 10 ; 10 a pour médiane :
- 6
- 7
- 8

7. L'étendue d'une série de notes sur 20 étant égale à 20 alors :
- aucun élève n'a eu 20
- aucun élève n'a eu 0
- il y a au moins un élève qui a eu 0 et au moins un élève qui a eu 20

8. Le mode est
- une mesure de dispersion
- la valeur centrale d'une série
- la valeur associée au plus grand effectif

9. Le tableau ci-dessous représente une série statistique qui donne la répartition des élèves d'une classe selon leurs âges.

Ages	14	15	16	17	18
Effectifs	3	13	7	6	1
Effectifs cumulés croissants	3	16	23	29	30

a) Le premier quartile de cette série est :
- 14
- 7,5
- 15

b) Le troisième quartile de cette série est :
- 22,5
- 16
- 15

1

Compléter le tableau suivant

Valeurs	3	7	9	12	14	Total
Effectifs	36		33		51	240
Fréquences		22,5		27,5		

2

On donne la série statistique suivante :

x_i	20	22	24	25	26	45	46
n_i	4	4	4	4	4	4	4

a) Préciser le mode.
b) Calculer la moyenne de cette série.
c) Montrer que la médiane est 24.

3

On a regroupé sous forme de série statistique l'âge des joueurs seniors d'une équipe de Football

Ages	18	20	21	24	26
Effectifs	4	8	6	5	2

Déterminer l'âge moyen de cette équipe.

4

Voici la série ordonnée des 20 notes obtenues en mathématiques au cours d'un trimestre
5 ;8 ;8 ;8 ; 9 ;9 ;10 ;10 ;10 ; 10 ;11 ;13 ; 14 ; 14 ;14 ;14 ; 16 ; 18 ;18 ;20

1. a) Quelle est la fréquence de la note 10 ?
b) Quelle est la note moyenne ?
c) Quelle est la note médiane ?

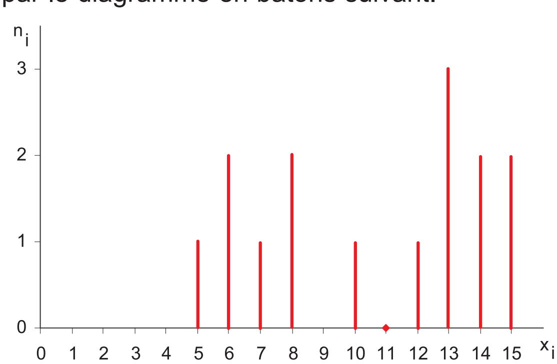
2. Quelle est l'étendue de cette série ? interpréter.

5

Construire une série de sept notes dont la moyenne est 10 et dont la médiane est 9.

6

La série ① est définie par le diagramme en bâtons suivant.

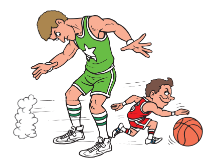


Déterminer sa moyenne, sa médiane et son mode.

La série ② est définie par les valeurs suivantes :
2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 12 ; 12 ; 15 ; 16 ; 17.
Construire le diagramme en bâtons de cette série.
Montrer que les deux séries ont même médiane même moyenne et même mode.

7

Le caractère statistique étudié est la taille (en mètre) des joueurs de Basket Ball dans deux équipes.
Equipe 1 : 1,76 ; 1,79 ; 1,82 ; 1,82 ; 1,84.
Equipe 2 : 1,73 ; 1,78 ; 1,82 ; 1,82 ; 1,90.



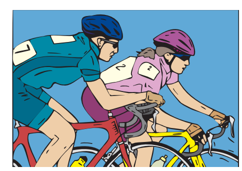
a) Quelle est la taille moyenne de chaque équipe ?
b) Déterminer l'étendue de la série des tailles de chaque équipe. Commenter.

8

On relevé le prix de vente d'un article et le nombre d'articles vendus chez différents fournisseurs.
Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Prix de vente en dinars	15	16	17	18	19
Nombre d'articles vendus	97	34	43	20	6

Donner le prix de vente moyen d'un article ?



9

Une course groupe 25 cyclistes . On relève les résultats suivants :

35 min12s	33min22s	32min12s	30min15s	34min12s	32min27s	33min41s	30min47s	31min22s	31min13s
34min42s	33min12s	32min52s	31min47s	33min15s	32min16s	35min16s	35min15s	34min17s	32min07s
35min09s	35min08s	35min18s	32min32s	30min26s					

1. Regrouper les temps obtenus par classes d'amplitudes 0,5 min : [29,5 ; 30[; [30 ; 30,5[; ...
2. Dresser un tableau des effectifs et des fréquences .
3. Tracer l'histogramme et le polygone des effectifs.

10

Le tableau ci-dessous fournit la répartition des notes de trois classes de 30 élèves
au devoir commun de mathématiques.

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Classe A : effectifs	0	0	0	0	1	0	0	1	3	4	6	2	5	3	2	0	2	0	1	0	0
Classe B : effectifs	0	0	0	0	2	1	2	2	1	2	5	3	2	1	1	3	1	2	2	0	0
Classe C : effectifs	0	0	0	0	3	4	1	2	0	0	5	1	0	0	4	4	3	1	2	0	0

a) Quelle est la note la plus fréquente pour chaque classe ?
b) Calculer la note moyenne pour chaque classe. Interpréter.
c) Représenter chacune de ces séries à l'aide d'un diagramme en bâtons.
d) Expliquer la dispersion des notes pour chaque classe.

11

Une enquête sur le prix en dinars d'un article auprès de 80 magasins donne les résultats ci-dessous.

Prix (en dinars)	[10 ; 12[	[12 ; 14[	[14 ;16[	[16 ;18[	[18 ; 20[
Effectifs (nombre de magasins)	8	20	32	15	5

a) Construire l'histogramme des effectifs.
b) Calculer les fréquences cumulées.
c) Quel est le pourcentage de magasins pratiquant un prix :

- Inférieur à 14 D ?
- Inférieur à 17 D ?
- Compris entre 14D et 17 D ?

12

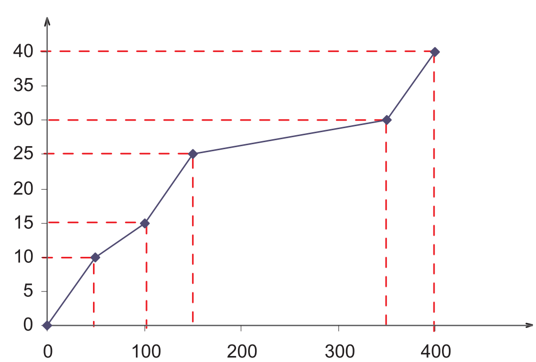
On considère la série statistique :

Valeurs	4	7	9	11	14
Effectifs	2	1	4	3	2

a) Construire le diagramme en bâtons de cette série.
b) Calculer la moyenne de la série.
c) Déterminer la médiane, le 1er quartile et le 3ème quartile de la série.

13

On a représenté ci-dessous le polygone des effectifs cumulés croissants d'une série statistique.



Lire sur le graphique la médiane, les quartiles Q_1 et Q_3.

14

On considère la série statistique :

Classe	[5 ; 7[	[7 ; 9[	[9 , 11[	[11 ; 13[
Effectif	12	6	8	16

a) Construire l'histogramme de la série.
b) Calculer la moyenne et l'écart type de la série.

15

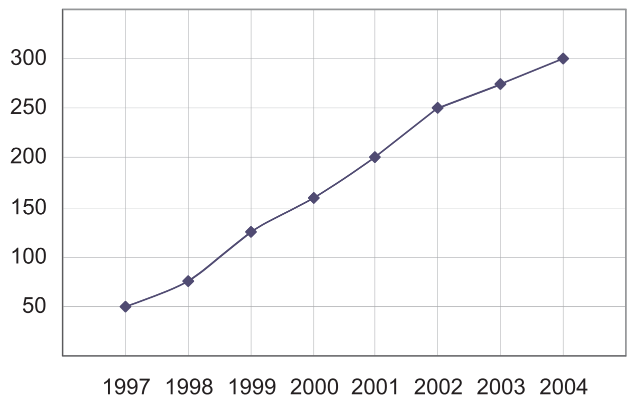
Le tableau suivant donne l'évolution du nombre d'élèves de classe terminales du lycée de Grombalia de 1996 à 2004 pour la section lettres.

Année	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Section Lettres	110	97	106	99	117	118	124	112	147

b) Placer dans un repère orthogonal les points d'abscisse l'année et d'ordonnée le coefficient multiplicateur correspondant.
c) Joindre les points par des segments.

16

La représentation graphique ci-dessous donne l'évolution des chiffres d'affaires d'une entreprise (en milliers de Dinars).



1. L'entreprise est-elle en expansion ?
2. Déterminer la moyenne des chiffres d'affaires.

17

Indicateurs des télécommunications

	1998	1999	2000	2001	2002
Nombre d'abonnés téléphoniques (en milliers)	752	850	955	1056	1148

	1998	1999	2000	2001	2002
Nombre d'abonnés à des téléphones mobiles (GSM)	30598	43320	103985	375910	561434

Source : *Ministère des Communications*
http://www.ins.nat.tn

1. Représenter dans un même repère orthogonal les courbes d'évolution des deux séries à partir de l'année 1998.
2. Commenter les graphiques et quelles sont les conclusions que l'on peut en tirer ?

Qui a triché ?

Un professeur a donné à ses élèves l'exercice suivant :
Pour demain, vous allez lancer 100 fois une pièce de monnaie et noter la suite des résultats.
Pierre et Paul font tous les deux l'exercice mais l'un, plus fainéant que l'autre, décide de ne pas lancer la pièce et d'écrire au hasard une suite de P et de F. Voici les résultats de leur simulation :

Simulation de Pierre
P P F P F F P F F P P P F P F F P F F P P F F P F P F P P F F F P P F F P F F P F P P F F P F P F P
F F P F P P F P F F P F P P F F F P F P F P P P F P F P P F P F P F P F P F F P P F P P F P F F F P

Simulation de Paul
P P F P P F P P F F P P P P P P F F P F P P P P F F F F P F P P P P F P P P F F F P P P F P P F F F
P F P F F P F F P P F P F F P F P P P F F P F P P P F F P P P P P F F F F P F F P F P P P P F F P F

Des calculs sophistiqués montrent que dans une série de 100 lancers, il y a plus de 80% de chance de trouver au moins une suite de 6 lancers identiques.

Selon vous, qui a triché Pierre ou Paul ?

D'après : *http://bacamaths.net*

Comment présenter mon 8/20 ?

- L'interrogation de statistique n'a pas été terrible : **8/20**. Comment annoncer cela à mes parents ?
  Dans l'ensemble il faut dire que ce n'était pas fameux. Nous somme 10 en classe et les résultats sont catastrophiques! Pensez donc. Le petit génie a bien sûr eu 19, mais à part cela il y avait un 10, quatre 9 et trois 2.
  D'accord, le **mode** est 9/20 et la **médiane** est également 9/20. Mais si je calcule la **moyenne**, je trouve 7,9/20. Je dirai donc à Papa que je suis au-dessus de la **moyenne**.
- Encore un **8**. Mais cette fois les notes sont 2, 3, 4, 5, 7, 8(moi), 9, 9, 18, 19 (le génie).
  J'ai calculé la **moyenne**, mais cette fois elle est de 8,4 ; je suis en dessous de la **moyenne** ; et le **mode** est 9. Heureusement, il n'y en a que 4 qui ont mieux réussi que moi et les 5 autres sont après. Je dirai donc à Papa que je suis au-dessus de la **médiane**.
- Décidément, je n'ai pas de chance. Je suis abonné au **8/20**. C'est sûrement la faute du prof!
  Cette fois les questions étaient tellement dures qu'il y en 3 qui ont eu 7/20!. Les autres ont obtenu 19 (toujours le même) 18, 12, 11, 10 et 2 (c'est aussi toujours le même). J'ai calculé la **moyenne** ; cela fait 10,1. Pas de chance, je suis en dessous. Et cette fois il y en a 5 qui ont plus que mois ! Ça ne va plus l'histoire de la **médiane**!. Heureusement grâce aux trois copains, le mode est 7. Je dirai cette fois à Papa que je suis au-dessus du **mode**.

(J'espère qu'il ne comprend rien aux différences entre moyenne, médiane et mode).

D'après le site : *http://www.bib.ulb.ac.be*

«Dans 95% des occasions où ils n'ont rien à dire, 99% des commentateurs sportifs donnent des statistiques».

[Anonyme]